

GILEWSKI Wojciech, NAGÓRSKA Magdalena

O WPLYWIE WIELKOŚCI PEWNEGO OSŁABIENIA PODŁOŻA W ZAGADNIENIU WESTERGAARDA

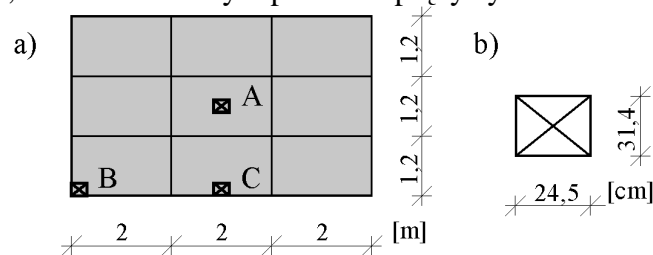
Streszczenie

We wcześniejszej pracy autorów [3] zbadano wpływ pewnego typu osłabień podłoża pod płytą nawierzchni drogowej sztywnej w zagadnieniu Westergaarda [1,2], tj. określeniu maksymalnych ugięć i maksymalnych naprężeń w płycie prostokątnej sprężystej spoczywającej na podłożu Winklera w przypadku obciążenia kołem pojazdu w trzech położeniach: w narożu, na środku i przy krawędzi płyty. Jako osłabienie podłoża przyjęto jego brak na powierzchni prostokątnej równej 1/9 powierzchni płyty – w różnych położeniach względem płyty. Dla każdego z obciążeń określono najniekorzystniejsze położenia osłabienia podłoża. W tym artykule przedstawiono wyniki badania wrażliwości maksymalnych ugięć i maksymalnych naprężeń rozciągających na wielkość osłabienia podłoża w zdefiniowanych w pracy [3] najniekorzystniejszych położeniach. Analizowano jaki wpływ ma wielkość ubytku podłoża na rozważane wielkości. Przedstawiono plany warstwiczne maksymalnych naprężeń rozciągających w różnych wariantach zadania oraz wykresy zależności maksymalnych naprężeń i przemieszczeń w funkcji wielkości ubytku podłoża. Określono, przy jakich rozmiarach osłabienia podłoża może mieć ono istotny wpływ na wytrzymałość płyty. Przeprowadzone obliczenia wykonano z wykorzystaniem metody elementów skończonych, na bazie wcześniejszych doświadczeń modelowania.

WSTĘP

Badania dotyczące określenia stanu przemieszczeń i naprężeń w płytach betonowych posadowionych na sprężystym podłożu datuje się na początek lat 20-tych XX wieku. Najistotniejsze wyniki podane zostały w cyklu prac H.M. Westergaarda [5-7], zapoczątkowanych pracą w języku duńskim z roku 1923, opublikowaną po angielsku w roku 1926 [5]. Tzw. zagadnienie Westergaarda jest do dnia dzisiejszego jednym z ważniejszych zagadnień związanych z analizą i projektowaniem sztywnych nawierzchni komunikacyjnych (por. np. [4]). Polega ono na wyznaczeniu maksymalnych ugięć i naprężeń w prostokątnej płycie betonowej posadowionej na sprężystym podłożu. Obciążenie płyty kołem pojazdu znajduje się w narożu, w środku i na środku krawędzi tej płyty. W klasycznym zagadnieniu Westergaarda analizuje się płyty nieskończone lub półnieskończone, gdyż jedynie w takich zadaniach udało się otrzymać rozwiązania analityczne. W pracy [3] poddano analizie współczesne, numeryczne rozwiązania metodą elementów skończonych [8] przy użyciu programu Abaqus [1] i wykazano, że możliwe jest dobranie odpowiedniej geometrii konstrukcji i skalibrowanie parametrów tak, aby zamodelować poprawnie zagadnienie Westergaarda. Modelowana była płyta o tak dobranej geometrii, aby w obliczeniach maksymalnych przemieszczeń i naprężeń nie był obserwowany wpływ warunków brzegowych. *De facto* modelowano zatem płytę półnieskończoną. W pracy [2]

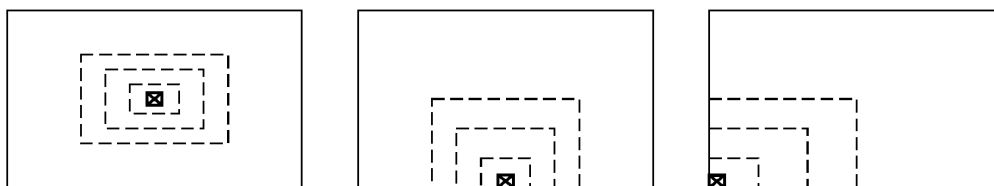
przeanalizowano pewne uogólnienie zagadnienia Westergaarda na analizę płyt o skończonych wymiarach, składających się z dziewięciu segmentów (Rys. 1), z których każdy może być posadowiony, lub nie, na odkształcalnym podłożu sprężystym.



Rys. 1. Schemat uogólnionego zagadnienia Westergaarda

Obciążenie przykładane było na obszarze prostokątnym, o wymiarach odpowiadających kołu pojazdu. Jednym z wniosków pracy [2] jest stwierdzenie, że najbardziej niebezpieczny dla stanu wyężenia płyty jest ubytek podłoża w segmencie w którym znajduje się obciążenie.

Przedmiotem niniejszej pracy jest rozszerzenie poprzednich rozważań autorów [3,2] na istotną z praktycznego punktu widzenia ocenę wrażliwości stanu naprężenia i przemieszczenia płyty na zmiany wymiarów ubytku podłoża. Przy każdym z trzech rodzajów obciążenia rozważano cztery przypadki obliczeniowe: brak ubytku podłoża, ubytek na segmencie 1/9 płyty (taki jak w pracy [2]), ubytek o połowę mniejszy i ubytek o połowę większy (Rys. 2).



Rys. 2. Zakres ubytku podłoża w schematach obliczeniowych

Analizowano maksymalne naprężenia rozciągające w płycie, oraz jej maksymalne przemieszczenia. Wyniki obliczeń dla wszystkich przypadków zestawiono w tabelach i na wykresach. Jakościowe różnice w rozkładach maksymalnych naprężeń przedstawiono dla wybranych, reprezentatywnych przypadków w postaci planów warstwicowych.

1. MODELOWANIE METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Przedmiotem rozważań jest płyta prostokątna, swobodna na wszystkich krawędziach, o stałej grubości h (Rys. 1). Płyta jest w całości, lub częściowo posadowiona na sprężystym podłożu (por. Rys. 2).

Założenia i dane obliczeniowe:

1. Założenia modelu obliczeniowego:

- płyta o średniej grubości (według teorii Hencky'ego- Boole'a) spoczywająca na sprężystym podłożu Winklera,
- materiał płyty jest sprężysty, jednorodny i izotropowy,
- analiza prowadzona jest w zakresie małych deformacji.

2. Rozmiary płyty:

- długość i szerokość: $l \times b = 6 \text{ m} \times 3.6 \text{ m}$,
- grubość: $h = 0.2 \text{ m}$ lub $h = 0.5 \text{ m}$

Rozmiary te odpowiadają przykładowym rozmiarom drogowych płyt betonowych.

3. Dane materiałowe płyty:

- moduł Younga: $E = 30 \text{ GPa}$,
- współczynnik Poissona: $\nu = 0.167$

Dane te odpowiadają betonowi B25(C20/25) stosowanemu w nawierzchniach drogowych i lotniskowych.

4. Podłoże sprężyste typu Winklera:

- współczynnik sztywności podłoża: $k = 10 \times 10^6 \text{ N/m}^3$ lub $k = 100 \times 10^6 \text{ N/m}^3$.

Dane te odpowiadają granicznym wartościom bardzo miękkiego i bardzo twardego podłoża.

5. Obciążenie:

Jako obciążenie płyty przyjęto ciśnienie o wartości 650 kPa równomiernie rozłożone na powierzchni prostokątnej o wymiarach $24.5 \times 31.4 \text{ [cm]}$. Wymiary te są tak dobrane, aby wypadkowa obciążenia wynosiła 50 kN, co odpowiada naciskowi na nawierzchnię standardowego koła samochodowego. Intensywność obciążenia 650 kPa jest w przybliżeniu równa ciśnieniu w oponie standardowego koła pojazdu.

Obliczenia przeprowadzono metodą elementów skończonych (MES) (por. np. [8]). Wykorzystano elementy powłokowe S4R [1] zgodne z teorią płyt o średniej grubości, które wybrano spośród kilku możliwych do wykorzystania elementów, bazując na doświadczeniach modelowania płyt półnieskończonych [3]. Przyjęto równomierny (200 x 120) podział na elementy skończone o rozmiarach ok. $3\text{cm} \times 3\text{cm}$ (dokładnie zamodelowano obszar przyłożenia obciążenia).

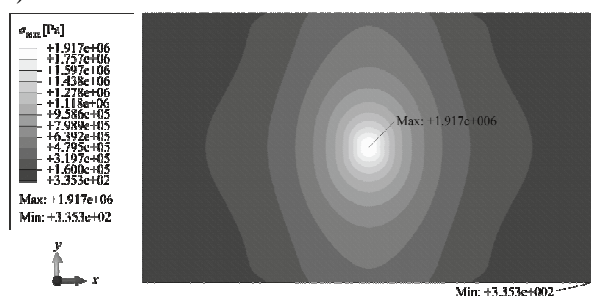
2. WYNIKI I ANALIZA OBLICZEŃ

Analiza numeryczna pozwala na określenie jakościowe i ilościowe wrażliwości przemieszczeń oraz naprężeń na wielkość ubytku podłoża w wybranym fragmencie płyty. Do analizy wrażliwości wyników na wielkość ubytku podłoża wybrano najniekorzystniejsze przypadki ubytku podłoża – w każdym z trzech rozważanych zadań był to ubytek w sąsiedztwie przykładanego obciążenia (por. [2])

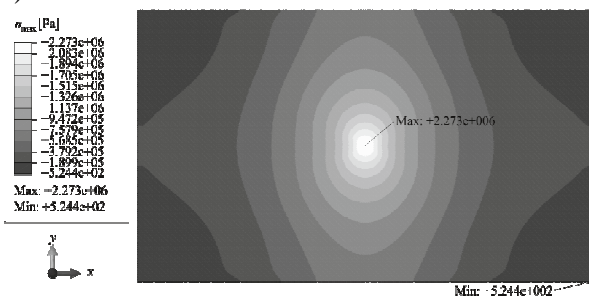
Obciążenie w środku płyty.

Rozkłady przemieszczeń oraz mapy maksymalnych naprężeń rozciągających nie różnią się zasadniczo dla różnych parametrów zadania. Maksymalne przemieszczenia występują zawsze pod obciążeniem. Maksymalne naprężenia rozciągające są zawsze w środku płyty na dolnej płaszczyźnie (Rys. 3). Wyniki ilościowe zestawiono w Tab.1 i na Rys. 4. Różnice wyników przy ubytku podłoża sięgają 35.9 % w naprężeniach i nawet 114.6 % w przemieszczeniach.

a)



b)



Rys. 3. Plany warstwicowe maksymalnych naprężeń rozciągających ($h=20\text{cm}$, $k = 10 \times 10^6 \text{ N/m}^3$).
Obciążenie w środku płyty. a) Podłoże na całości płyty, b) Największy ubytek podłoża.

Tab. 1. Wartości maksymalnych przemieszczeń i naprężeń rozciągających. Obciążenie w środku płyty.

$h = 20 \text{ cm}, k = 10 \times 10^6 \text{ N/m}^3$

ubytek podłoża (d)	w_{\max} [mm]	różnica [%]	σ_{\max} [MPa]	różnica [%]
0	0,545	-	1,917	-
1/2	0,580	6,4	1,994	4,0
1	0,679	24,6	2,123	10,7
3/2	0,849	55,8	2,273	18,6

$h = 20 \text{ cm}, k = 100 \times 10^6 \text{ N/m}^3$

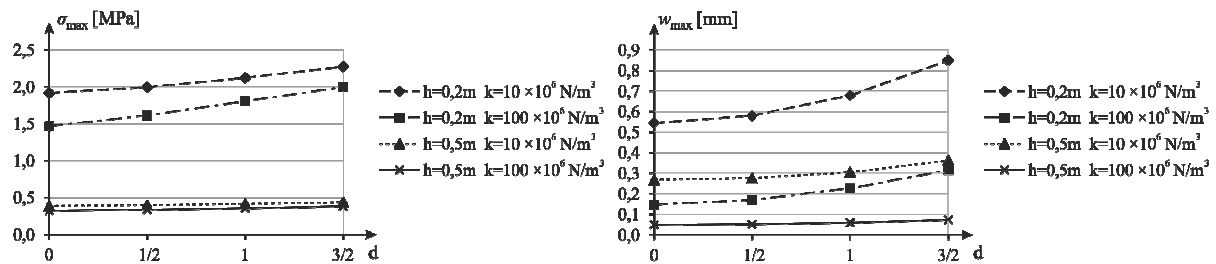
ubytek podłoża (d)	w_{\max} [mm]	różnica [%]	σ_{\max} [MPa]	różnica [%]
0	0,147	-	1,469	-
1/2	0,170	15,6	1,615	9,9
1	0,227	54,4	1,807	23,0
3/2	0,315	114,3	1,997	35,9

$h = 50 \text{ cm}, k = 10 \times 10^6 \text{ N/m}^3$

ubytek podłoża (d)	w_{\max} [mm]	różnica [%]	σ_{\max} [MPa]	różnica [%]
0	0,268	-	0,389	-
1/2	0,277	3,4	0,398	2,3
1	0,305	13,8	0,415	6,7
3/2	0,362	35,1	0,438	12,6

$h = 50 \text{ cm}, k = 100 \times 10^6 \text{ N/m}^3$

ubytek podłoża (d)	w_{\max} [mm]	różnica [%]	σ_{\max} [MPa]	różnica [%]
0	0,049	-	0,325	-
1/2	0,052	6,1	0,337	3,7
1	0,059	20,4	0,357	9,8
3/2	0,073	49,0	0,382	17,5



Rys. 4. Rozkład maksymalnych naprężeń rozciągających i ugięć w funkcji wielkości ubytku podłoża. Obciążenie w środku płyty.

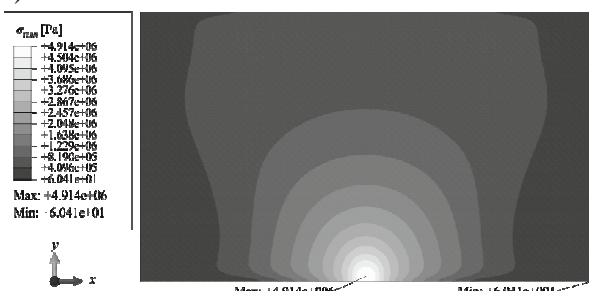
Obciążenie na krawędzi płyty

Rozkłady przemieszczeń oraz mapy maksymalnych naprężeń rozciągających nie różnią się zasadniczo dla różnych parametrów zadania. Maksymalne przemieszczenia występują zawsze pod obciążeniem. Maksymalne naprężenia rozciągające są zawsze w środku boku płyty na dolnej płaszczyźnie (Rys. 5). Wyniki ilościowe zestawiono w Tab.2 i na Rys. 6. Różnice przy ubytku podłoża sięgają 66 % w naprężeniach i nawet 240.7 % w przemieszczeniach.

a)



b)



Rys. 5. Plany warstwiczne maksymalnych naprężeń rozciągających ($h=20\text{cm}, k = 10 \times 10^6 \text{ N/m}^3$). Obciążenie w środku boku.. a) Podłoże na całości płyty, b) Największy ubytek podłoża.

Tab. 2. Wartości maksymalnych przemieszczeń i naprężeń rozciągających. Obciążenie w środku boku płyty.

$h = 20 \text{ cm}, k = 10 \times 10^6 \text{ N/m}^3$

ubytek podłoża (d)	w_{\max} [mm]	różnica [%]	σ_{\max} [MPa]	różnica [%]
0	1,622	-	3,478	-
1/2	1,883	16,1	3,844	10,5
1	2,535	56,3	4,358	25,3
3/2	3,623	123,4	4,914	41,3

$h = 20 \text{ cm}, k = 100 \times 10^6 \text{ N/m}^3$

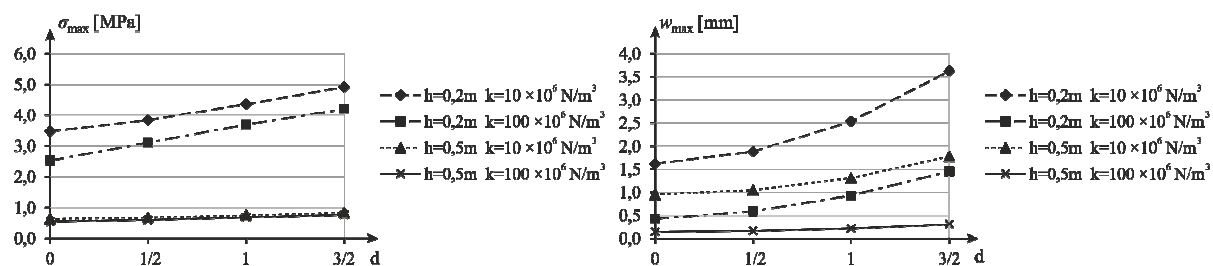
ubytek podłoża (d)	w_{\max} [mm]	różnica [%]	σ_{\max} [MPa]	różnica [%]
0	0,427	-	2,529	-
1/2	0,589	37,9	3,114	23,1
1	0,934	118,7	3,698	46,2
3/2	1,455	240,7	4,197	66,0

$h = 50 \text{ cm}, k = 10 \times 10^6 \text{ N/m}^3$

ubytek podłoża (d)	w_{\max} [mm]	różnica [%]	σ_{\max} [MPa]	różnica [%]
0	0,954	-	0,632	-
1/2	1,050	10,1	0,676	7,0
1	1,312	37,5	0,750	18,7
3/2	1,776	86,2	0,833	31,9

$h = 50 \text{ cm}, k = 100 \times 10^6 \text{ N/m}^3$

ubytek podłoża (d)	w_{\max} [mm]	różnica [%]	σ_{\max} [MPa]	różnica [%]
0	0,147	-	0,545	-
1/2	0,168	14,3	0,599	9,9
1	0,221	50,3	0,680	24,8
3/2	0,309	110,2	0,769	41,1



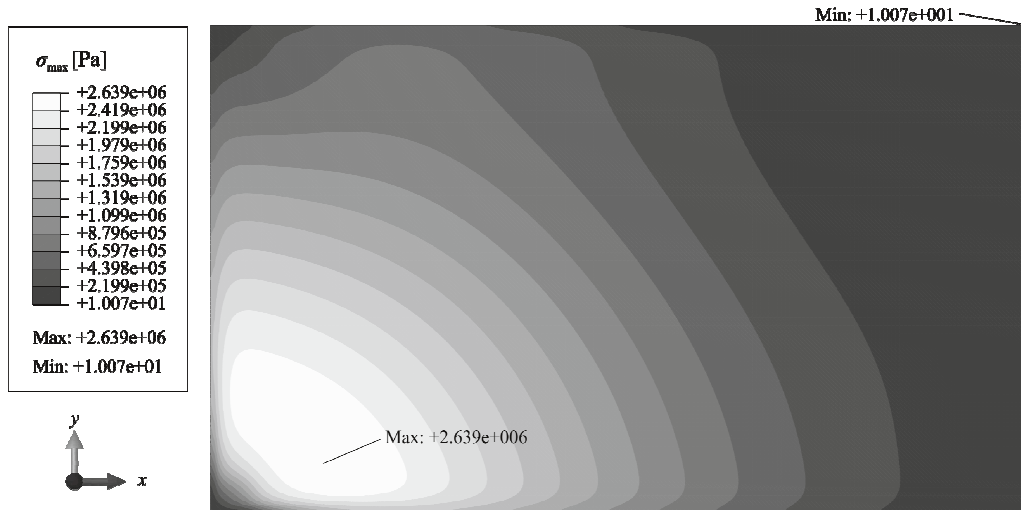
Rys. 6. Rozkład maksymalnych naprężeń rozciągających i ugięć w funkcji wielkości ubytku podłoża. Obciążenie w środku boku płyty.

Obciążenie w narożu płyty

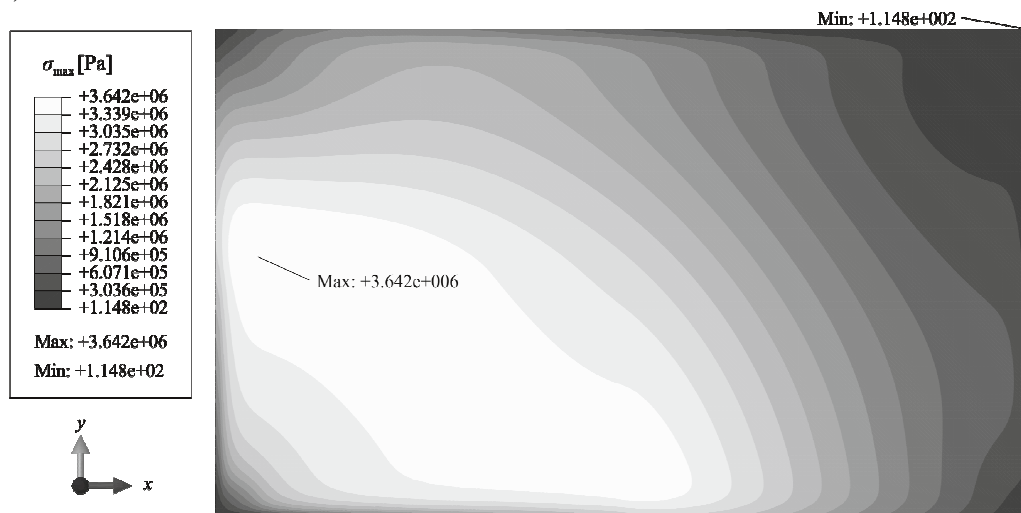
Rozkłady przemieszczeń nie różnią się zasadniczo dla różnych parametrów zadania. Maksymalne przemieszczenia występują zawsze pod obciążeniem. Jednak rozkłady maksymalnych naprężeń rozciągających zmieniają się jakościowo wraz ze zmianą parametrów – występują one na górnej płaszczyźnie płyty, natomiast zmienia się położenie punktu w którym występuje maksimum (Rys. 7-10). Aby było to dokładnie widoczne przedstawiono większe rysunki niż w poprzednio rozważanych przypadkach. W płycie najbardziej osłabionej o grubości 20 cm (Rys. 7,8) położenie punktu maksymalnego naprężenia przesuwają się w górę rysunku, zaś dla płyty o grubości 50 cm (Rys. 9,10) przesuwają się w prawo rysunku, niezależnie od tego, czy podłoże jest miękkie czy sztywne.

Wyniki ilościowe zestawiono w Tab. 3 i na Rys. 11. Tym razem różnice wyników są znacznie większe niż w poprzednio rozważanych przypadkach – przy największym ubytku podłoża sięgają 117.1 % w naprężeniach i nawet 491.3 % w przemieszczeniach. Szczególnie wrażliwa na wielkość ubytku podłoża jest płyta cienka (20 cm) posadowiona na sztywnym podłożu sprężystym.

a)

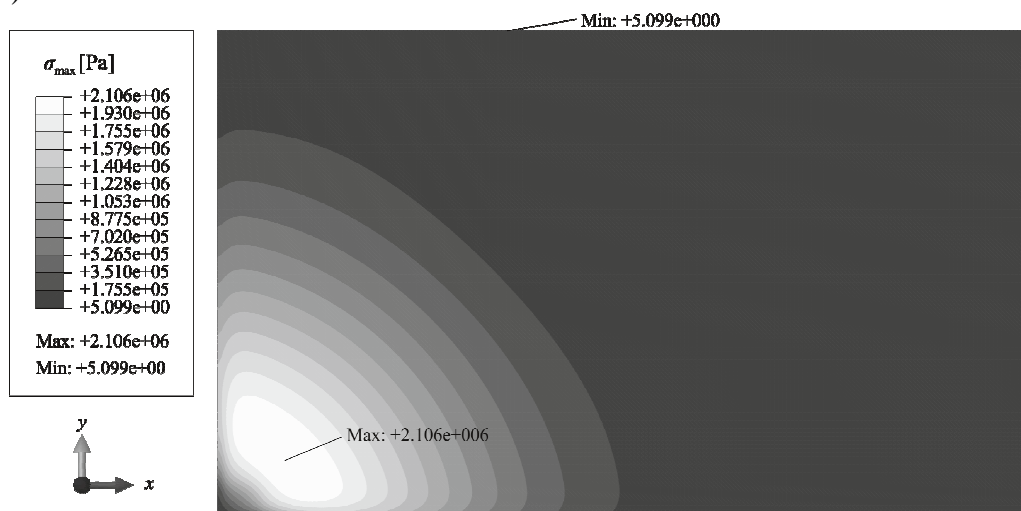


b)

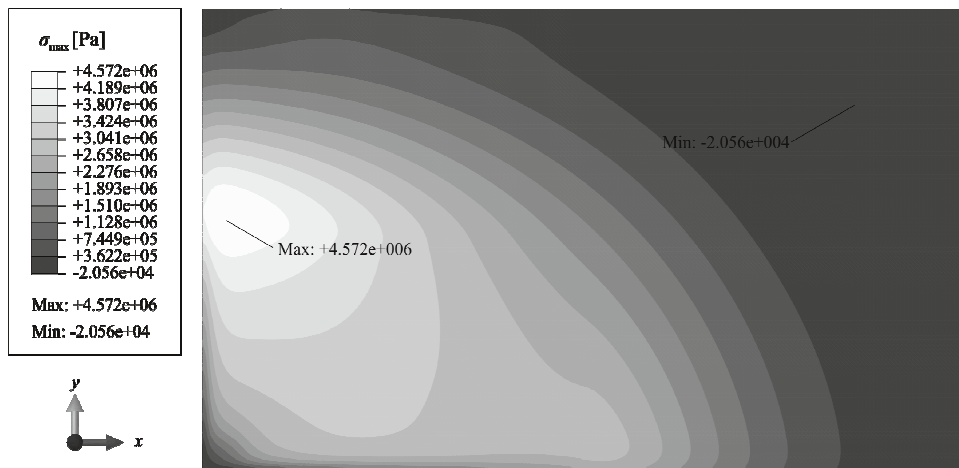


Rys. 7. Plany warstwiczne maksymalnych naprężeń rozciągających ($h=20\text{cm}$, $k = 10 \times 10^6 \text{ N/m}^3$).
Obciążenie w narożu. a) Podłoże na całości płyty, b) Największy ubytek podłoża.

a)

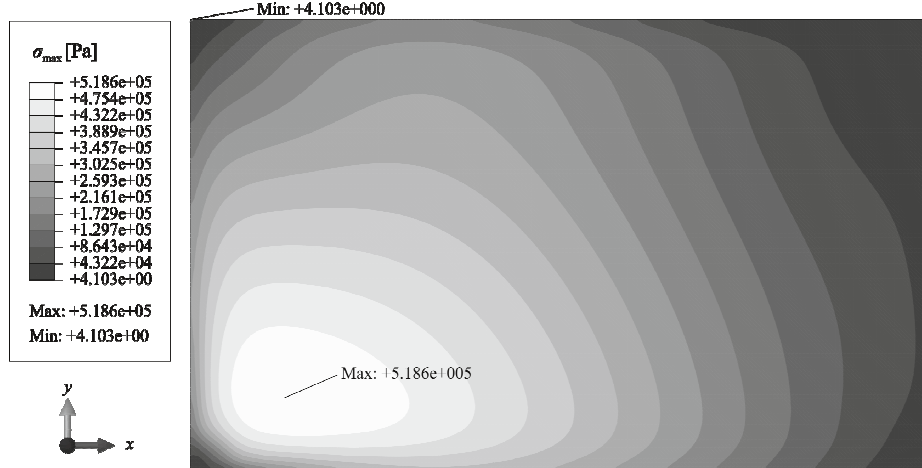


b)

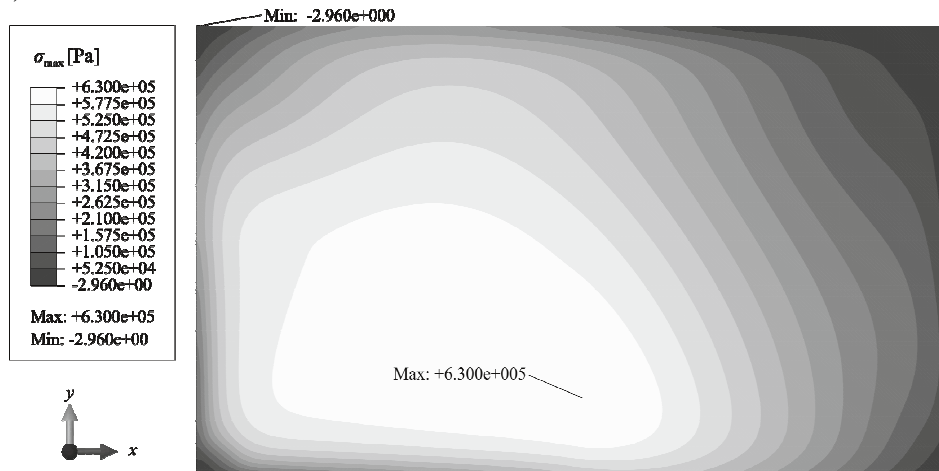


Rys. 8. Plany warstwowe maksymalnych naprężeń rozciągających ($h=20\text{cm}$, $k = 100 \times 10^6 \text{ N/m}^3$).
Obciążenie w narożu. a) Podłoże na całości płyty, b) Największy ubytek podłoża.

a)

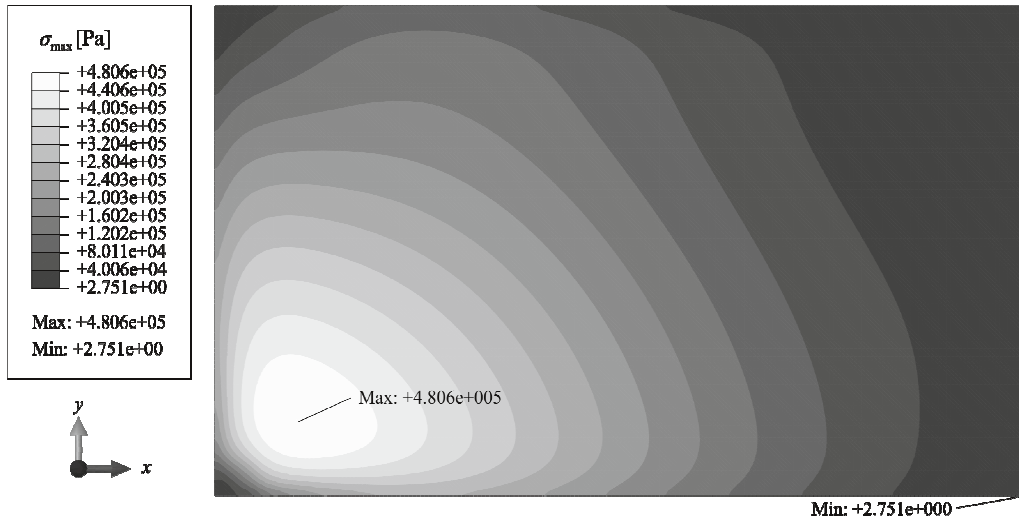


b)

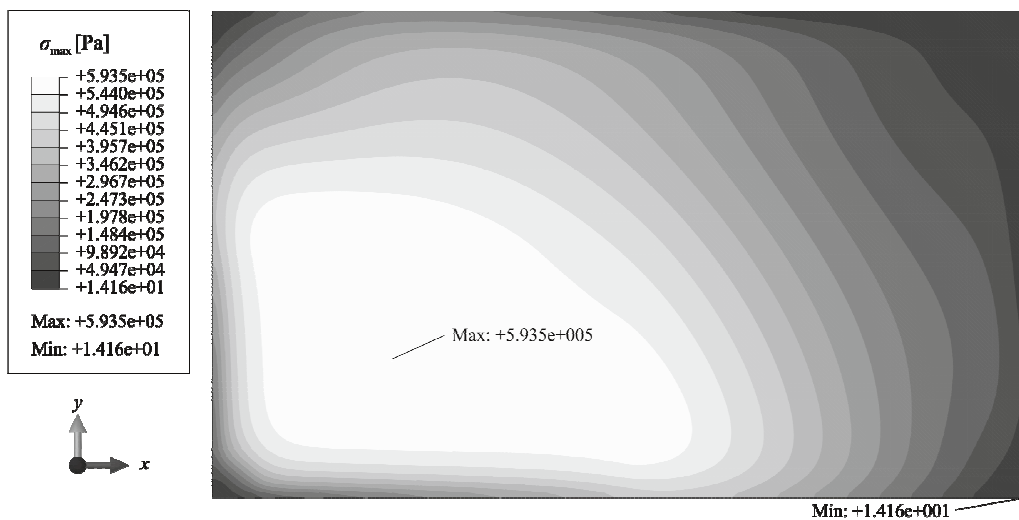


Rys. 9. Plany warstwowe maksymalnych naprężeń rozciągających ($h=50\text{cm}$, $k = 10 \times 10^6 \text{ N/m}^3$).
Obciążenie w narożu. a) Podłoże na całości płyty, b) Największy ubytek podłoża.

a)



b)



Rys. 10. Plany warstwiczne maksymalnych naprężeń rozciągających ($h=50\text{cm}$, $k = 100 \times 10^6 \text{ N/m}^3$). Obciążenie w narożu. a) Podłoże na całości płyty, b) Największy ubytek podłoża.

Tab. 3. Wartości maksymalnych przemieszczeń i naprężeń rozciągających. Obciążenie w narożu płyty.

$h = 20 \text{ cm}$, $k = 10 \times 10^6 \text{ N/m}^3$

ubytek podłoża (d)	w_{\max} [mm]	różnica [%]	σ_{\max} [MPa]	różnica [%]
0	3,932	-	2,639	-
1/2	5,266	33,9	3,165	19,9
1	8,268	110,3	3,519	33,3
3/2	13,204	235,8	3,642	38,0

$h = 20 \text{ cm}$, $k = 100 \times 10^6 \text{ N/m}^3$

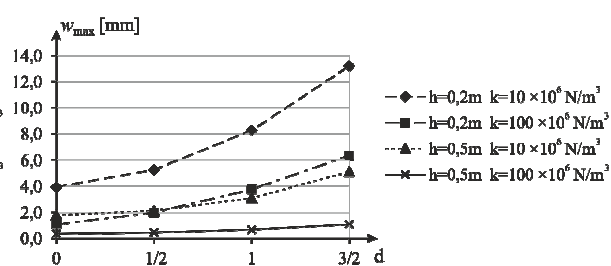
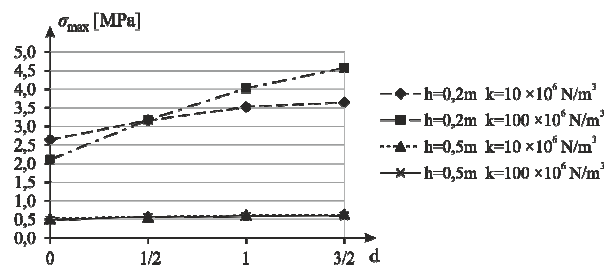
ubytek podłoża (d)	w_{\max} [mm]	różnica [%]	σ_{\max} [MPa]	różnica [%]
0	1,074	-	2,106	-
1/2	1,976	84,0	3,171	50,6
1	3,754	249,5	4,025	91,1
3/2	6,351	491,3	4,572	117,1

$h = 50 \text{ cm}, k = 10 \times 10^6 \text{ N/m}^3$

ubytek podłoża (d)	w_{\max} [mm]	różnica [%]	σ_{\max} [MPa]	różnica [%]
0	1,797	-	0,519	-
1/2	2,129	18,5	0,572	10,2
1	3,099	72,5	0,613	18,1
3/2	5,105	184,1	0,630	21,4

$h = 50 \text{ cm}, k = 100 \times 10^6 \text{ N/m}^3$

ubytek podłoża (d)	w_{\max} [mm]	różnica [%]	σ_{\max} [MPa]	różnica [%]
0	0,342	-	0,481	-
1/2	0,444	29,8	0,557	15,8
1	0,677	98,0	0,585	21,6
3/2	1,073	213,7	0,594	23,5



Rys. 11. Rozkład maksymalnych naprężeń rozciągających i ugięć w funkcji wielkości ubytku podłoża. Obciążenie w narożu płyty.

PODSUMOWANIE

Otrzymane wyniki obliczeń mogą stanowić pomoc przy projektowaniu płyt drogowych z uwzględnieniem możliwości ubytku podłoża spod części płyty (Tab. 1-3). W wielu z analizowanych przypadków wyniki przy osłabionym podłożu znacznie się różnią od wyników otrzymanych gdy podłoże jest nienaruszone. Uprawnionym wydaje się wniosek, że wykorzystana do obliczeń metoda elementów skończonych pozwala na modelowanie płyt drogowych, które pracują w warunkach zbliżonych do rzeczywistych. Klasyczne rozwiązania Westergaarda nie pozwalały na taką analizę.

BIBLIOGRAFIA

1. ABAQUS/Standard User's Manual. Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc., version 6.6, USA, 2006
2. Gilewski W., Nagórska M., *O pewnym osłabieniu podłoża w zagadnieniu Westergaarda – modelowanie metodą elementów skończonych*. Rozdział 7. Teoretyczne Podstawy Budownictwa. S. Jemioło, M. Gajewski, eds., Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2013
3. Gilewski W., Nagórski R., Sitek M., *Zagadnienie Westergaarda – weryfikacja i modelowanie metodą elementów skończonych*. Acta Scientiarum Poloniarum, Seria Architectura, vol. 10, nr.3, 2011, 5-26
4. Szydło A., *Nawierzchnie drogowe z betonu cementowego. Teoria, wymiarowanie, realizacja*. Polski Cement, Kraków 2004
5. Westergaard H. M., *Stresses in concrete pavements computed by theoretical analysis*. Public Roads, Vol. 7, No. 2, April 1926
6. Westergaard H. M., *Analytical tools for judging results of structural tests of concrete pavement*. Public Roads, Vol.14, No.10, December 1933
7. Westergaard H. M., *New formulas for stresses in concrete pavements of airfield*. American Society of Civil Engineers, May 1947
8. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., *The Finite Element Method*. Oxford, 2000

ON THE INFLUENCE OF THE SIZE OF CERTAIN WEAKNESS OF FOUNDATION IN THE WESTERGAARD PROBLEM

Abstract

In the previous paper of the authors [3] the analysis of some regular weakness of the foundation in the Westergaard problem was discussed. Maximum displacements and maximum stresses were considered. The weakness was 1/9 of the plate area in various positions. The most dangerous situations were defined. The present paper is an extension of previous considerations for the analysis of sensitivity of the results for the size of weakness. The results are presented in the form of maximal stress maps (for qualitative analysis) as well as the tables and graphs (for quantitative analysis). The plate was modeled with the use of the finite element method.

Autorzy:

dr hab. inż. **Wojciech Gilewski**, prof. PW – Politechnika Warszawska, Instytut Inżynierii Budowlanej, e-mail: w.gilewski@il.pw.edu.pl

mgr inż. **Magdalena Nagórska** – Politechnika Warszawska, Instytut Dróg i Mostów, e-mail: m.nagorska@il.pw.edu.pl