

## PROBLEM STEROWANIA OPTYMALNEGO DLA CZTEROWIRNIKOWEGO BSP

BARTOSZ BRZOWSKI\*, GRZEGORZ KOWALECZKO\*\*

Wojskowa Akademia Techniczna\*

Insatytyt Techniczny Wojsk Lotniczych, Wyższa Szkoła Oficerska Sił Powietrznych\*\*

### Streszczenie

*Sformułowanie problemu sterowania optymalnego podzielone jest na cztery etapy: opracowanie modelu matematycznego sterowanego obiektu, określenie ograniczeń wektorów stanu i sterowań, zdeterminowanie zadania sterowania, oraz zdefiniowanie wskaźnika jakości. Wszystkie te etapy zostały przeprowadzone w pracy dla czterowirnikowego bezpilotowego statku powietrznego (BSP). W ten sposób określony został problem sterowania optymalnego dla tego typu obiektu latającego. Kolejne etapy badań uwzględniają doprecyzowanie ograniczeń i macierzy wagowych wskaźnika jakości oraz implementację algorytmów sterowania optymalnego i weryfikację ich funkcjonalności.*

### WPROWADZENIE

Wielowirnikowe BSP stają się w ostatnich latach coraz bardziej popularnym typem statku powietrznego, co widać poprzez duże zainteresowanie licznych ośrodków naukowych na całym świecie. Swą popularność zawdzięczają głównie dzięki temu, że wielu elektroników, robotyków i automatyków buduje tego typu obiekty i opracowuje dla nich systemy sterowania [2, 5, 8, 9]. Jednakże w swoich pracach pomijają najczęściej zagadnienia aerodynamiki i mechaniki lotu traktując BSP jako obiekt statycznie niestateczny o sześciu stopniach swobody. Ten artykuł stanowi przykład odmiennego podejścia bazującego na pełnym modelu matematycznym dynamiki lotu czterowirnikowego BSP, dla którego sformułowany został problem sterowania optymalnego. Sformułowanie problemu sterowania optymalnego podzielone jest na cztery etapy: opracowanie modelu matematycznego sterowanego obiektu, określenie ograniczeń wektorów stanu i sterowań, zdeterminowanie zadania sterowania oraz zdefiniowanie wskaźnika jakości [1, 6, 10]. Wszystkie te etapy zostały przeprowadzone i opisane w pracy dla czterowirnikowego bezpilotowego statku powietrznego (BSP).

### MODEL MATEMATYCZNY DYNAMIKI LOTU

Pierwszym etapem pracy przy formułowaniu problemu sterowania optymalnego jest opracowanie modelu matematycznego sterowanego obiektu w przestrzeni stanów (1).

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \end{cases} \quad (1)$$

gdzie:  $t$  - czas,  $\mathbf{x}$  - wektor stanu,  $\mathbf{u}$  - wektor sterowania,  $\mathbf{y}$  - obserwator stanu.

Wektor stanu (2) składa się z dwunastu parametrów lotu, dla których określono zamknięty układ równań różniczkowych zwyczajnych (3), który został opracowany na podstawie bilansu sił i momentów działających na quadrotor, uzupełnionych związkami kinematycznymi dotyczącymi kątów Eulera oraz współrzędnych położenia w nieruchomym układzie związanym z Ziemią [7]. Równania sił i momentów działających na BSP uwzględniają siły (4): ciągu śmigieł, grawitacyjną i aerodynamiczną oraz momenty: od śmigieł (5), aerodynamiczne (6) i giroskopowe (7). Macierze transformacji układu współrzędnych związanego z BSP do układu związanego z Ziemią (8) określono na podstawie metody kosinusów kierunkowych.

$$\mathbf{x} = \left[ u, v, w, p, q, r, \Phi, \Theta, \Psi, x_g, y_g, z_g \right]^T, \quad (2)$$

gdzie:

$u, v, w$  - składowe wektora prędkości bezwzględnej  $\mathbf{V}$  w układzie związanym z quadrotorem;

$p, q, r$  - składowe wektora prędkości kątowej  $\boldsymbol{\Omega}$  quadrotora względem układu inercyjnego związanego z Ziemią;

$\Phi, \Theta, \Psi$  - kąty Eulera;

$x_g, y_g, z_g$  - współrzędne środka masy quadrotora w układzie  $O_g x_g y_g z_g$  związanym z Ziemią.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \dot{u} = \frac{F_x}{m} + rv - qw \\ \dot{v} = \frac{F_y}{m} + pw - ru \\ \dot{w} = \frac{F_z}{m} + qu - pv \\ \dot{p} = \frac{I_{sm} + I_{aer} + I_{gir} + (I_y - I_z)qr}{I_x} \\ \dot{q} = \frac{M_{sm} + M_{aer} + M_{gir} + (I_z - I_x)rp}{I_y} \\ \dot{r} = \frac{N_{sm} + N_{aer} + N_{gir} + (I_z - I_y)pq}{I_z} \\ \dot{\Phi} = p + (r \cos \phi + q \sin \phi) \operatorname{tg} \Theta \\ \dot{\Theta} = q \cos \phi - r \sin \phi \\ \dot{\Psi} = \frac{r \cos \phi + q \sin \phi}{\cos \Theta} \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_g \\ \dot{y}_g \\ \dot{z}_g \end{bmatrix} = L_{s/g}^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 T_{xi} \\ \sum_{i=1}^4 T_{yi} \\ \sum_{i=1}^4 T_{zi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -mg \sin \Theta \\ mg \cos \Theta \sin \phi \\ mg \cos \Theta \cos \phi \end{bmatrix} + \frac{\rho V_*^2}{2} S \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{xa} \\ C_{ya} \\ C_{za} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} L_{sm} \\ M_{sm} \\ N_{sm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l(T_{z2} - T_{z4}) - h \sum_{i=1}^4 T_{yi} \\ l(T_{z3} - T_{z1}) + h \sum_{i=1}^4 T_{xi} \\ l(T_{y1} - T_{y3}) + l(T_{x4} - T_{x2}) + \sum_{i=1}^4 M_{op\_i} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} L_{aer} \\ M_{aer} \\ N_{aer} \end{bmatrix} = \frac{\rho V_*^2}{2} S \begin{bmatrix} -r_{aer} (C_{xa} \sin \beta - C_{ya} \cos \beta) \\ r_{aer} (C_{xa} \cos \alpha \cos \beta + C_{ya} \cos \alpha \sin \beta - C_{za} \sin \alpha) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} L_{gir} \\ M_{gir} \\ N_{gir} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -qJ \sum_{i=1}^4 \omega_i \\ pJ \sum_{i=1}^4 \omega_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$L_{s/g} = \begin{bmatrix} \cos \Psi \cos \Theta & \sin \Psi \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \cos \Psi \sin \Theta \cos \Phi - \sin \Psi \cos \Phi & \sin \Psi \sin \Theta \sin \Phi + \cos \Phi \cos \Phi & \cos \Theta \sin \Phi \\ \cos \Psi \sin \Theta \cos \Phi + \sin \Psi \sin \Phi & \sin \Psi \sin \Theta \cos \Phi - \cos \Phi \sin \Phi & \cos \Theta \cos \Phi \end{bmatrix} \quad (8)$$

W powyższych równaniach oznaczono:

$\alpha$  - kąt natarcia quadrotora

$\beta$  - kąt ślizgu quadrotora

$m$  - masa quadrotora

$I_x, I_y, I_z$  - momenty bezwładności quadrotora

$J$  - moment bezwładności śmigła

$l$  - odległość śmigła od osi pionowej quadrotora

$r_{aer}$  - odległość płaszczyzny śmigieł od środka masy

Wektor sygnałów wyjściowych (9) zawiera trzynaście parametrów możliwych do pomiaru na pokładzie quadrotora za pomocą zastosowanych czujników, czyli: trójosiowych akcelero-

metru i giroskopu, odbiornika GPS, radiowysokościomierza oraz pomiaru prędkości obrotowej silników [3]. Zależności pomiędzy wektorem sygnałów wyjściowych, a wektorem stanu tworzą układ trzynastu równań wyjść (10) stanowiących dopełnienie modelu czterowirnikowego BSP w przestrzeni stanów. Zmierzona prędkość obrotowa każdego z silników związana jest zależnością liniową ze sterującym go sygnałem PWM (ang. Pulse Width Modulation).

$$y = \left[ a_x, a_y, a_z, p_{gyro}, q_{gyro}, r_{gyro}, x_{GPS}, y_{GPS}, H, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \right]^T, \quad (9)$$

gdzie:

$a_x, a_y, a_z$  - przyspieszenia z trójosiowego akcelerometru w układzie związanym z BSP;

$p_{gyro}, q_{gyro}, r_{gyro}$  - prędkości kątowe z trójosiowego giroskopu w układzie związanym z BSP;

$x_{gps}, y_{gps}$  - szerokość i długość geograficzna z odbiornika GPS;

$H$  - wysokość z radiowysokościomierza;

$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  - prędkość obrotowa każdego z czterech silników.

$$y = \begin{cases} a_x = \frac{F_x}{m} + rv - qw \\ a_y = \frac{F_y}{m} + pw - ru \\ a_z = \frac{F_z}{m} + qu - pv \\ p_{gyro} = p \\ q_{gyro} = q \\ r_{gyro} = r \\ x_{GPS} = x_g \\ y_{GPS} = y_g \\ H = z_g \\ \omega_1 = aS_{pWM1} \\ \omega_2 = aS_{pWM2} \\ \omega_3 = aS_{pWM3} \\ \omega_4 = aS_{pWM4} \end{cases} \quad (10)$$

## OGRANICZENIA STEROWANIA

Drugim etapem pracy jest zdefiniowanie ograniczeń dla wektora stanu  $\mathbf{x}$  oraz wektora sterowań  $\mathbf{u}$ . Wprowadzenie ograniczeń pozwala na wykonywanie manewrów w bezpiecznych przedziałach zmian parametrów lotu oraz uniemożliwia zadanie wartości sygnałów sterujących wykraczającej poza fizyczne zakresy układów wykonawczych. Na podstawie badań symulacyjnych i prób w locie quadrotora stwierdzono, że konieczne jest ograniczenie trzech zmiennych wektora stanu, aby zapewnić bezpieczny i stabilny lot BSP. Przede wszystkim za-

stosowany algorytm nie może dopuścić do obniżenia wysokości lotu poniżej 1 m ze względu na pojawiający się efekt przypowierzchniowy oraz możliwość kolizji z powierzchnią Ziemi podczas wykonywania manewrów. Wyjątek dla tego ograniczenia stanowi oczywiście manewr lądowania. Kolejne dwa ograniczenia dotyczą kątów pochylenia i przechylenia. Duże wartości tych kątów powodują zwiększenie prędkości postępowej i tym samym stwarzają zagrożenie powstania znaczących uszkodzeń w przypadku awarii systemu starowania. Jest to szczególnie istotne zagadnienie podczas początkowych prac dotyczących opracowywanego algorytmu sterowania optymalnego. Dlatego też zdecydowano się dopuścić zmiany tych parametrów w zakresie  $\pm 10^\circ$ .

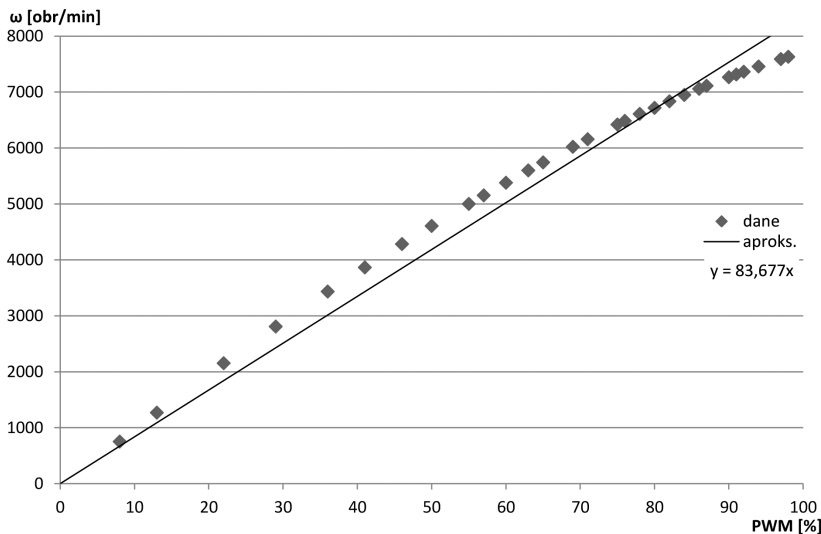
$$\begin{cases} z_g \geq 1 \\ \Phi \in -10;10 \\ \Theta \in -10;10 \end{cases} \quad (11)$$

Podane ograniczenia wektora stanu (11) stanowią wstępny zbiór, który może wymagać modyfikacji i rozszerzenia w trakcie prowadzonych doświadczeń. Z zakończonych do tej pory badań symulacyjnych wynika, że skokowe zmiany sygnałów sterujących powodują czasami destabilizację obiektu ze względu na gwałtowny wzrost prędkości kątowych. Oznacza to prawdopodobieństwo poszerzenia ograniczeń o dozwolone wartości prędkości kątowych lub wprowadzenie konieczności stopniowych zmian wartości sygnałów sterujących.

Sterowanie quadrotorem odbywa się poprzez zmianę prędkości obrotowej każdego z silników [3]. Z tego powodu wektor sterowań (12) składa się z czterech parametrów, których wartość zależy liniowo od sygnału PWM generowanego przez system sterowania.

$$\mathbf{u} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4]^T \quad (12)$$

Zależność ta jest ściśle powiązana z zastosowanym silnikiem (Axi 2212/26), śmigłem (10"x4,5) oraz źródłem zasilania (4000mAh, 11,1 V). Liniowość wynika z charakterystyki zastosowanych regulatorów oraz została potwierdzona badaniami statycznymi (Rys. 1).



Rys. 1. Zależność pomiędzy prędkością obrotową silników, a sygnałem sterującym PWM.

Weryfikacja zastosowanego współczynnika prostej aproksymującej zostanie przeprowadzona poprzez identyfikację tego parametru na podstawie zarejestrowanych danych z lotu. Procedura ta powinna być przeprowadzana w przypadku modyfikacji elementów zespołu napędowego lub zastosowania opracowanych algorytmów w systemach sterowania innych czterowirnikowych BSP. Wartość maksymalna  $\omega_{\max}$  dopuszczalnej prędkości obrotowej określona jest dla maksymalnego wypełnienia sygnału PWM, określona na podstawie aproksymacji liniowej  $y=ax$  wyników badania statycznego silników. Z kolei wartość minimalna  $\omega_{\min}$  została obliczona z wykorzystaniem teorii impulsowej wirnika nośnego w przypadku pionowego opadania z przyspieszeniem  $0,5 \text{ m/s}^2$ . W ten sposób określne zostały ograniczenia dla wektora sterowań (13).

$$\mathbf{u} \in \langle \omega_{\min}, \omega_{\max} \rangle := \left\langle \sqrt{\frac{m(g-0,5)}{2C_T \rho R^2 S_{sm}}}; 100a \right\rangle \quad (13)$$

Jak wspomniano wcześniej, podane wartości ograniczeń wektora stanu i wektora sterowań zostały określone na podstawie symulacji oraz rejestracji parametrów lotu podczas sterowania ręcznego i nie stanowią ostatecznego i zamkniętego zbioru. Dopuszcza się możliwość ich modyfikacji podczas weryfikacji zastosowanych algorytmów sterowania, gdyż nie wszystkie przypadki krytyczne mogły zostać uwzględnione podczas początkowych rozważań analitycznych.

#### ZADANIE STEROWANIA

Kolejny etap badań polega na określeniu zadania sterowania, które jest ściśle powiązane z parametrami wektora stanu w chwili końcowej. Zadanie sterowania zostało wstępnie podzielone na cztery podstawowe fazy: zawis, zmianę kierunku lotu oraz ruch w pionie i poziomie. W kolejnych badaniach planuje się rozbudowanie zadań sterowania, tak aby uwzględniały ruch złożony z kilku faz podstawowych. Dla każdej z podstawowych faz lotu określony został oddzielnie wektor warunków końcowych. W przypadku zawisu quadrotor powinien utrzymywać położenie w przestrzeni, a więc wszystkie składowe prędkości kątowej i postępowej powinny być równe zero (14). W tym przypadku wartości kątów Eulera nie mogą być jednoznacznie określone ze względu na nieznaną wzajemną orientację układów odniesienia: związanego z samolotem i związanego z Ziemią.

$$\mathbf{x}_{\text{zawis}} = [0, 0, 0, 0, 0, 0, \sim, \sim, \sim, x_{\text{zawis}}, y_{\text{zawis}}, z_{\text{zawis}}]^T, \quad (14)$$

Zakłada się, że podczas wstępnych badań zmiana kierunku lotu odbywać się będzie w zawisie. Oznacza to, że w porównaniu do wcześniej omówionego wektora warunków końcowych różnić się on będzie tylko zadaną wartością składowej  $r$  prędkości kątowej (15).

$$\mathbf{x}_{\text{kurs}} = [0, 0, 0, 0, 0, r_{\text{kurs}}, \sim, \sim, \sim, x_{\text{kurs}}, y_{\text{kurs}}, z_{\text{kurs}}]^T, \quad (15)$$

Przyjmuje się też, że quadrotor będzie opadać i wznosić się ze stałą prędkością, więc w stosunku do zawisu zmianie ulegną wartości końcowe dwóch parametrów. Wysokość nie może być jednoznacznie ustalona, natomiast składowa prędkości będzie przyjmować stałą wartość.

$$\mathbf{x}_{\text{wys}} = [0, 0, w_{\text{wys}}, 0, 0, 0, \sim, \sim, \sim, x_{\text{wys}}, y_{\text{wys}}, \sim]^T \quad (16)$$

Ruch w poziomie traktuje się jako ruch w określonym kierunku, z zadaną prędkością i stałą wysokością. Wartościami, które nie mogą być jednoznacznie określone są w tym przypadku kąty pochylenia i przechylenia oraz położenie  $x$  i  $y$  (17). Pozostałe parametry powinny być równe zeru.

$$\mathbf{x}_{\text{ruch}} = [u_{\text{ruch}}, 0, 0, 0, 0, 0, \sim, \sim, \Psi_{\text{ruch}}, \sim, \sim, z_{\text{ruch}}]^T, \quad (17)$$

### WSKAŹNIK JAKOŚCI STEROWANIA

Ostatnim etapem pracy podczas formułowania problemu sterowania optymalnego jest wybór wskaźnika jakości (18). Funkcje  $h(\mathbf{x}(t_k), t_k)$  oraz  $k(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$  nazywane są funkcjami kosztów. Często w trakcie badań muszą być one modyfikowane, aby otrzymać optymalne wyniki, ponieważ celem teorii sterowania optymalnego jest wypracowanie takich sygnałów sterujących, które pozwalają na przebieg procesu minimalizując wskaźnik jakości przy spełnieniu ograniczeń [6].

$$\mathbf{J} = h(\mathbf{x}(t_k), t_k) + \int_{t_0}^{t_k} k(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (18)$$

Wstępne badania algorytmów sterowania zakładają sprawdzenie zachowania się BSP podczas zmiany zadań pomiędzy każdą z przyjętych podstawowych faz lotu [4]. Optymalizacja sterowania dla każdej z nich polega na doborze sygnału sterującego, który zapewnia minimalizację różnic pomiędzy wartościami wektora stanu oraz wektora opisującego założony stan końcowy quadratora przy jak najmniejszych zmianach sygnałów sterujących. Oznacza to, że formuła określająca wskaźnik jakości sterowania jest taka sama dla każdej z faz lotu (19). Różnica dotyczy natomiast wartości elementów macierzy wagowych  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$ . Pierwsza z nich jest macierzą diagonalną o wartościach na głównej przekątnej określających znaczenie odpowiadających im parametrów wektora stanu w realizowanym zadaniu sterowania. Jeżeli dany parametr jest nieistotny lub ma nie być brany pod uwagę, wówczas odpowiednia wartość wynosi zero. W wektorach współczynników wagowych  $\mathbf{q}$  dla poszczególnych, podstawowych faz lotu (21-24) wartości 0 przyjmowane są w przypadku parametrów, które nie zostały jednoznacznie ustalone w wektorach opisujących założony stan końcowy. Pozostałe wartości zostaną sprecyzowane po przeprowadzeniu serii doświadczeń z wykorzystaniem algorytmów sterowania optymalnego. Również wówczas dobrane wartości diagonalnej macierzy wagowej wektora sterowań (25) zostaną.

$$\mathbf{J} = \int_{t_0}^{\infty} \left\{ [\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{\text{final}}(t)]^T \mathbf{Q} [\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{\text{final}}(t)] + [\mathbf{u}(t)]^T \mathbf{R} [\mathbf{u}(t)] \right\} dt \quad (19)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q}^T \mathbf{I} \quad (20)$$

$$\mathbf{q}_{\text{zawis}} = \left[ q_{uzawis}, q_{vzawis}, q_{wzawis}, q_{pzawis}, q_{qzawis}, q_{rzawis}, 0, 0, 0, q_{x_gzawis}, q_{y_gzawis}, q_{z_gzawis} \right] \quad (21)$$

$$\mathbf{q}_{\text{kurs}} = \left[ q_{ukurs}, q_{vkurs}, q_{wkurs}, q_{pkurs}, q_{qkurs}, q_{rkurs}, 0, 0, 0, q_{x_gkurs}, q_{y_gkurs}, q_{z_gkurs} \right] \quad (22)$$

$$\mathbf{q}_{\text{wys}} = \left[ q_{uwys}, q_{vwys}, q_{wwys}, q_{pwys}, q_{qwys}, q_{rwys}, 0, 0, 0, q_{x_gwys}, q_{y_gwys}, 0 \right] \quad (23)$$

$$\mathbf{q}_{\text{ruch}} = \left[ q_{uruch}, q_{vruch}, q_{wruch}, q_{pruch}, q_{qruch}, q_{rruch}, 0, 0, q_{\psi ruch}, 0, 0, q_{zgruch} \right] \quad (24)$$

$$\mathbf{R} = \left[ r_1, r_2, r_3, r_4 \right]^T \mathbf{I} \quad (25)$$

## PODSUMOWANIE

Opisany w artykule problem sterowania optymalnego stanowi pierwszy etap opracowania algorytmu sterowania optymalnego. Algorytm ten zostanie zastosowany w systemie awionicznym czterowirnikowego bezpilotowego statku powietrznego. Przygotowany model matematyczny dynamiki lotu w przestrzeni sterowań, zdeterminowany zbiór ograniczeń wektora stanu i wektora sterowań, założony stan końcowy quadrotora w poszczególnych fazach lotu oraz zdefiniowany wskaźnik jakości sterowania określają szczegółowo problem sterowania optymalnego dla czterowirnikowego BSP. Został on z powodzeniem przygotowany do zastosowania w systemie sterowania i będzie zaimplementowany w komputerze pokładowym po ostatecznym opracowaniu i przetestowaniu algorytmu sterowania optymalnego. Wówczas w kolejnych etapach badań przyjęty początkowo zestaw ograniczeń zostanie uzupełniony, zostaną zweryfikowane postacie wektora stanu opisującego założony stan końcowy quadrotora oraz dobrane zostaną precyzyjne wartości macierzy współczynników wagowych. Po walidacji opracowanego systemu sterowania dla czterech wybranych podstawowych faz lotu należało będzie dokonać ich integracji i rozszerzenia o kolejne zadania w celu opracowania pełnego systemu sterowania pozwalającego na przeprowadzenie płynnego i dynamicznego lotu.

## LITERATURA

- [1] Athans M., Falb P.L.: Sterowanie optymalne, wstęp do teorii i jej zastosowania., WNT, Warszawa 1966;
- [2] Boubdallah S., Noth A., Siegwart R.: :PID vs LQ Control Techniques Applied to an Indoor Micro Quadrotor
- [3] Brzozowski B., Falkowski K.: Unmanned Aerial Vehicle of quadrotor class for civil and military purposes, Scientific aspects of unmanned mobile vehicle, Kielce 2010, pp. 27-34
- [4] Brzozowski B., Kowaleczko G.: Study of an optimal control problem formulation for a quadrotor UAV., Proceedings of 5th International Conference on SAUMO, Dęblin 2013, pp. 26-27.
- [5] Czyba R., Szafrński G.: Control Structure Impact on the Flying Performance of the Multi-Rotor VTOL Platform – Design, Analysis and Experimental Validation, International Journal of Advanced Robotic Systems, 2013, Vol 10, 62:2013.
- [6] Kirk E. D.: Optimal Control Theory An Introduction., Dover Publications Inc., 2004;
- [7] Kowaleczko G., Kuliński M., Nowakowski M.: Preliminary study of the quadrotor flight dynamics., Scientific aspects of unmanned mobile vehicle, Kielce 2010, pp. 123-144.
- [8] Salih A. L., Moghavvemi M., Mohamed H. A. F., Gaeid K. S.: Flight PID controller design for a UAV quadrotor, Scientific Research and Essays Vol. 5(23), 2010, pp. 3660-3667
- [9] Sharma A., Barve A.: Controlling of Quad-rotor UAV Using PID Controller and Fuzzy Logic Controller, International Journal of Electrical, Electronics and Computer Engineering 1(2), 2012, pp. 38-41.
- [10] Takahashi Y., Rabins M.J., Auslander D.M.: Sterowanie i systemy dynamiczne., WNT, Warszawa 1976;



---

BARTOSZ BRZozowski, GRZEGORZ KOWALECZKO

## OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR A QUADROTOR UAV

### Abstract

*Optimal control formulation is divided into four stages: development of a mathematical model of a controlled object dynamics, constraint declaration for state and control vectors, determination of control objectives, and definition of performance measure. All of those stages were successfully conducted and described in the paper for a quadrotor unmanned aerial vehicle (UAV). That way optimal control problem was determined for this type of a flying object. Following researches include precise determination of constraints and weight matrixes of performance measure as well as implementation of optimal control algorithms and their functionality verification.*