



Metoda relaksacji dynamicznej w analizie zginanych elementów żelbetowych

ANNA SZCZEŚNIAK, ADAM STOLARSKI

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Inżynierii Lądowej i Geodezji,
00-908 Warszawa, ul. gen. S. Kaliskiego 2, anna.szczesniak@wat.edu.pl, astolarski@wat.edu.pl

Streszczenie. W pracy przedstawiono metodę analizy nieliniowego zachowania elementów żelbetowych poddanych działaniu krótkotrwałego obciążenia statycznego. Przeprowadzono rozważania w zakresie modelowania procesów odkształcania elementu żelbetowego. Metodę analizy wyężenia układu konstrukcyjnego opracowano z wykorzystaniem metody różnic skończonych. Do rozwiązania układów nieliniowych równań równowagi zastosowano metodę relaksacji dynamicznej, która po wprowadzeniu tłumienia krytycznego pozwala na opis statycznego zachowania elementu konstrukcyjnego. W celu zwiększenia skuteczności metody w zakresie analizy pokrytycznej, w procedurze obliczeniowej uwzględniono parametr długości łuku na ścieżce równowagi.

Słowa kluczowe: elementy żelbetowe, nieliniowość fizyczna, nieliniowość geometryczna, metoda relaksacji dynamicznej, metoda długości łuku

DOI: 10.5604/12345865.1186402

1. Wstęp

Celem pracy jest opracowanie modelu obliczeniowego zginanych elementów żelbetowych, który umożliwi badanie zachowania elementu od stanu czysto sprężystego, przez stan sprężysto-plastyczny, do pełnego uplastycznienia, osłabienia i zniszczenia przekroju.

Uzyskanie rozwiązania wymaga przeprowadzenia rozważań modelowania procesów odkształcenia płaskiego, prętowego elementu konstrukcyjnego oraz opracowania rozwiązań numerycznych.

Analiza elementu konstrukcyjnego obejmuje opis zachowania zginanego elementu żelbetowego, modelowanego jako ustrój prętowy, obciążonego statycznie.

Podstawą teoretycznego modelowania zachowania elementu konstrukcyjnego są równania umiarkowanie dużych przemieszczeń ustroju prętowego z uwzględnieniem wpływu zmian kąta obrotu przekroju poprzecznego (krzywizny) i odkształceń postaciowych.

Metoda analizy wyężenia układu konstrukcyjnego opracowana została z wykorzystaniem metody różnic skończonych. Do rozwiązywania układów nieliniowych równań równowagi zastosowana została metoda relaksacji dynamicznej. W tej metodzie rozwiązanie zagadnienia sprowadza się do analizy procesu pseudodynamicznego z uwzględnieniem tłumienia krytycznego — jako ruchu aperiodycznego dążącego do położenia równowagi pod wpływem działającego obciążenia. Rozwiązanie uzyskuje się w procesie iteracyjnym utożsamianym z rekurencyjnym procesem obliczeniowym w kolejnych krokach pseudoczasu. Metoda relaksacji dynamicznej stosowana jest do analizy zagadnień o dużej nieliniowości.

W celu zwiększenia efektywności metody w zakresie pokrytycznym do procedury numerycznej wprowadzony został parametr długości łuku na ścieżce równowagi. Takie podejście jest określane jako metoda długości łuku. Metoda ta na drodze iteracji pozwala na jednoczesne wyznaczenie poszukiwanych przemieszczeń i parametru obciążenia poprzez śledzenie ścieżki równowagi posiadającej lokalne punkty graniczne. Koncepcja metody długości łuku opisana została w pracy Riksa [7], a jej dalsze modyfikacje prezentowane są m.in. w pracach Ramma [6], Crisfielda [3], Schweizrehofa i Wriggersa [8]. Praktyczne zastosowanie metody relaksacji dynamicznej w połączeniu z metodą długości łuku w analizie konstrukcji prezentowane jest w pracach Remesha i Krishnamoorthy [5], Pasqualino i Estefen [4]. Przy czym rozwiązania te nie dotyczą analizy zginanych elementów żelbetowych w zakresie niesprężystym.

Na podstawie opracowanej metody analizy wyężenia zginanych elementów żelbetowych sporządzony zostanie ogólny algorytm obliczeniowy, który następnie posłuży do przygotowania procedury numerycznej w języku programowania Fortran do obliczania odkształceń, naprężeń, sił wewnętrznych i przemieszczeń. W kolejnym etapie pracy przedstawione zostaną szczegółowe zastosowania opracowanej metody w analizie belek żelbetowych w porównaniu do dostępnych w piśmiennictwie wyników doświadczalnych i innych rozwiązań teoretycznych.

2. Układ równań podstawowych

2.1. Równania ruchu

Analiza obejmuje pracę zginanych elementów żelbetowych, modelowanych jako płaski ustrój prętowy z uwzględnieniem jego zakrzywienia początkowego. Ustrój prętowy obciążony jest statycznie, krótkotrwałym obciążeniem nierównomiernie

rozłożonym i siłami skupionymi, działającymi w płaszczyźnie prostopadłej do osi podłużnej elementu obliczeniowego.

W rozpatrywanym elemencie żelbetowym uwzględniamy charakterystyczne uwarunkowania geometryczne, tj. zmienny rozkład przekroju betonu i stali zbrojeniowej, zakrzywienie początkowe oraz warunki brzegowe wynikające ze sposobu podparcia i działającego obciążenia zewnętrznego.

Dla elementu konstrukcyjnego rozpatrywanego jako żelbetowy element prętowy, charakteryzującego się masą jednostkową μ , jednostkowym masowym momentem bezwładności j , jednostkowymi współczynnikami tłumienia c dla przemieszczeń liniowych i c_f dla przemieszczeń kątowych, wyprowadzone zostały równania równowagi dynamicznej.

W globalnym kartezjańskim układzie współrzędnych $\{x(u), z(w)\}$, dla układu sił wewnętrznych poprzecznych Q i momentów zginających M oraz obciążenia zewnętrznego $\{p_z\}$, sił bezwładności poprzecznej i obrotowej $\{\mu\ddot{w}, j\ddot{\varphi}\}$ działających na odkształcony element o długości ds i kącie nachylenia θ , różniczkowe równania równowagi mają postać:

$$\begin{cases} -\frac{\partial(Q\cos\theta)}{\partial s} - p_z(s) + \mu\ddot{w} + c\dot{w} = 0 \\ \frac{\partial M}{\partial s} - Q - j\ddot{\varphi} - c_f\dot{\varphi} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

2.2. Związki geometryczne

Uwzględniamy liniowe związki geometryczne, które odnoszą się do zmiany średniego kąta obrotu przekroju poprzecznego $\kappa(s)$ oraz średniego kąta odkształcenia postaciowego $\gamma(s)$.

$$\begin{cases} \kappa(s) = \frac{d\varphi}{ds} \\ \gamma(s) = \varphi + \Phi, \quad \Phi = \theta^0 - \theta, \end{cases} \quad (2)$$

gdzie: φ — średni kąt obrotu przekroju poprzecznego;
 Φ — kąt obrotu osi środkowej pręta.

2.3. Równania równowagi wewnętrznej w przekroju poprzecznym

Model obliczeniowy przekroju poprzecznego elementu prętowego powstaje w wyniku dyskretyzacji, czyli podziału przekroju na warstwy betonowe o grubości Δh oraz wyróżnienia dwu warstw stalowych o przekrojach A_{s1} i A_{s2} (rys. 1). Zastosowana dyskretyzacja przekroju poprzecznego została opracowana zgodnie z interpretacją opisaną przez Bąka i Stolarskiego w pracy [2].

Praca modelu obliczeniowego przekroju jest uwarunkowana modelami odkształcenia betonu i stali oraz hipotezą kinematyczną. Podstawą tej hipotezy jest założenie płaskiego przekroju, który nie jest prostopadły do odkształconej osi środkowej elementu, tj. osi przechodzącej przez połowę wysokości przekroju poprzecznego. Hipoteza kinematyczna określa stan odkształcenia wszystkich warstw przekroju oraz zasadę współpracy warstw aktywnych, tj. warstw stalowych i warstw betonowych przenoszących naprężenia.

W zależności od zdolności odkształceniowych betonu na ściskanie i rozciąganie wyróżniamy warstwy betonu przenoszące naprężenia oraz warstwy nieprzenoszące naprężeń, zarysowane (przy rozciąganiu) lub zmiażdżone (przy ściskaniu). Warstwy zarysowane mogą po zamknięciu rysy ponownie przenosić naprężenie ściskające, a warstwy zmiażdżone stają się trwale warstwami biernymi i nie mogą przenosić żadnych naprężeń.

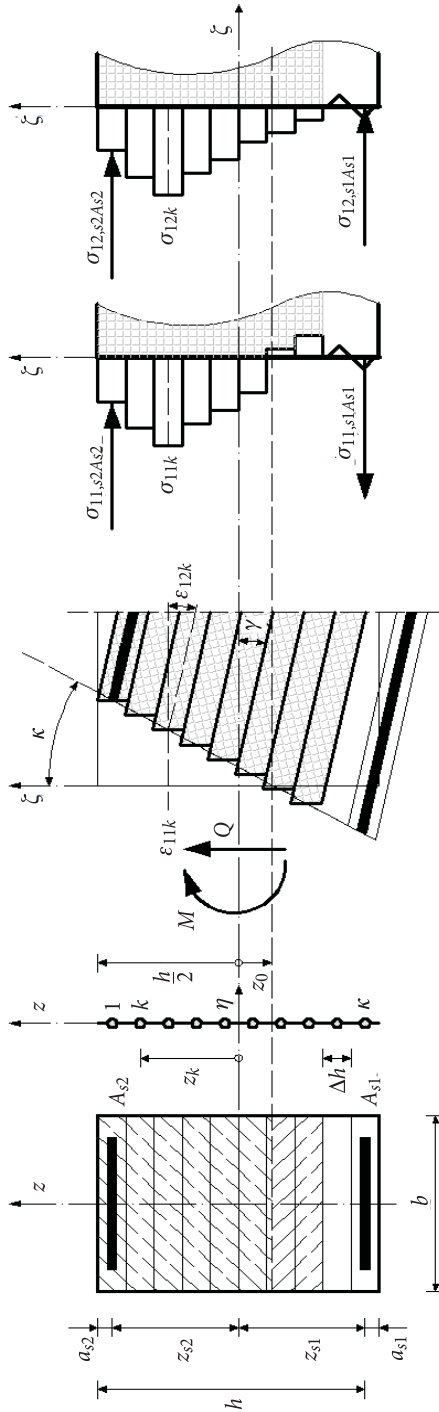
Stan odkształcenia w poszczególnych warstwach przekroju poprzecznego dla danej chwili $t_n = t_{n-1} + \Delta t$ jest określony następująco:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11r}^n = z_r \cdot \kappa^n, & z_r = (z_k, z_{s1}, z_{s2}), \quad k = 1, 2, \dots, K \\ \varepsilon_{12r}^n = \frac{1}{2} \gamma^n. \end{cases} \quad (3)$$

Dla znanej zmiany średniego kąta obrotu przekroju poprzecznego κ^n , oraz średniego kąta odkształcenia postaciowego γ^n wartości siły poprzecznej Q^n oraz momentu zginającego M^n wyznacza się z równań równowagi przekroju poprzecznego:

$$\begin{cases} N^n = \sum_{k=1}^K \sigma_{11,k}^n \cdot A_{c,k}^n + \sigma_{11,s1}^n \cdot A_{s1} + \sigma_{11,s2}^n \cdot A_{s2} = 0 \\ M^n = \sum_{k=1}^K \sigma_{11,k}^n \cdot A_{c,k}^n \cdot z_k + \sigma_{11,s1}^n \cdot A_{s1} \cdot z_{s1} + \sigma_{11,s2}^n \cdot A_{s2} \cdot z_{s2} \\ Q^n = \sum_{k=1}^K \sigma_{12,k}^n \cdot A_{c,k}^n + \sigma_{12,s1}^n \cdot A_{s1} + \sigma_{12,s2}^n \cdot A_{s2}, \end{cases} \quad (4)$$

gdzie: $A_{z,k}^n$ — pole powierzchni k -tej warstwy przekroju betonowego w n -tym kroku obciążenia;
 $A_{s1,2}$ — pole powierzchni rozciąganej/ściskanej stali zbrojeniowej.



Rys. 1. Model przekroju poprzecznego

Naprężenia σ_{11}^n i σ_{12}^n określane są według przyjętego modelu betonu, natomiast naprężenia $\sigma_{11,s1,2}^n$ i $\sigma_{12,s2}^n$ na podstawie przyjętego modelu stali i ustalane w płaskim zredukowanym stanie naprężenia ściskanie/rozciąganie ze ścinaniem. Przykładowe modele materiałów konstrukcyjnych dla betonu i stali przedstawione zostały w pracach Szczęśniak i Stolarskiego [11, 12] i w pracy Stolarskiego [10].

2.4. Dyskretyzacja różnicowa elementu prętowego

Równania równowagi (1) oraz związki geometryczne (2) wraz z modelem przekroju poprzecznego zdefiniowanym równaniami (3) i (4), uzupełnione modelami odkształcenia materiałów, stanowią sformułowanie problemu w ramach technicznej teorii konstrukcji prętowych.

Układ równań podstawowych przedstawiony został w formie różnicowej na podstawie przyjętej dyskretyzacji modelu obliczeniowego.

Dyskretyzacja ustrojów prętowych polega na dokonaniu podziału osi środkowej prętów węzłami o współrzędnych $(x, z)_i$, $i = 1, 2, \dots, i-1, i, i+1, \dots, I$ (rys. 2).

W przyjętym modelu założono podział elementu na węzły wewnętrzne i brzegowe. Spośród węzłów wewnętrznych wyróżniono węzły główne (nieparzyste) związane z podstawowymi punktami podziału oraz węzły pośrednie (parzyste) związane z odcinkami łączącymi podstawowe punkty podziału.

Węzły główne są przekrojami, w których w sposób dokładny obliczane są krzywizny i momenty zginające, natomiast wartości sił poprzecznych wyznaczane są na podstawie uśrednionego kąta odkształcenia postaciowego wyznaczonego dla sąsiednich odcinków podziału.

Z kolei w węzłach pośrednich utożsamianych z odcinkami podziału w sposób dokładny obliczany jest kąt odkształcenia postaciowego oraz siły poprzeczne, natomiast wartości momentów zginających wyznaczane są na podstawie uśrednionych krzywizn z sąsiednich węzłów głównych.

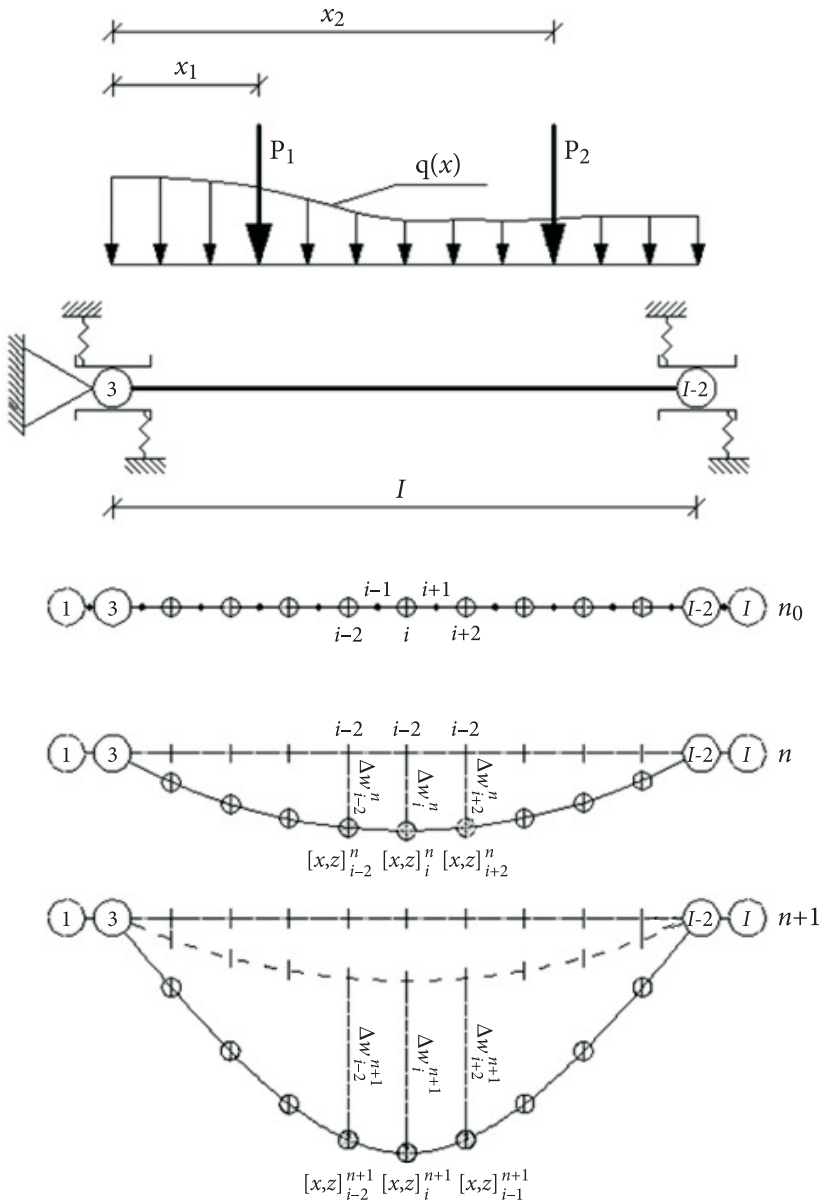
Na tej podstawie równania równowagi (1) można zapisać w węzłach podziału przestrzennego $i = 3, I - 2, 2$ w postaci różnicowej:

$$\begin{cases} -Q_{i1} \cos \theta_{i1} + Q_{i0} \cos \theta_{i0} - P_z(s_i) + m(s_i) \ddot{w}_i + C(s_i) \dot{w}_i = 0 \\ M_{i+2} - M_i - Q_{i1} \Delta s_{i1} - J(s_{i1}) \ddot{\varphi}_{i1} - C_f(s_{i1}) \dot{\varphi}_{i1} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

gdzie: $i1 = i + 1$, $i0 = i - 1$ — oznaczenie odcinków wewnętrznego podziału przestrzennego;

Q_{i1} — siła poprzeczna w odcinku podziału $i1 = i + 1$;

M_i — moment zginający w węźle głównym i .



Rys. 2. Dyskretyzacja różnicowa modelu obliczeniowego prętowego elementu konstrukcyjnego

Składowe długości odcinka podziału $i1 = i + 1$ są określone następująco:

$$\begin{cases} \Delta x_{i1} = x_{i+1} - x_i \\ \Delta z_{i1} = z_{i+1} - z_i \\ \Delta s_{i1} = \sqrt{\Delta x_{i1}^2 + \Delta z_{i1}^2} \end{cases} \quad (6)$$

Funkcje kątów obrotu odcinka podziału $i1 = i + 1$ mają postać:

$$\begin{cases} \sin \theta_{i1} = \frac{\Delta z_{i1}}{\Delta s_{i1}} \\ \cos \theta_{i1} = \frac{\Delta x_{i1}}{\Delta s_{i1}} \end{cases} \quad (7)$$

Składową obciążenia i -tego węzła opisuje równanie:

$$P_z(s_i) = p_z(s_i) \Delta \bar{x}_i, \quad (8)$$

gdzie: $\Delta \bar{x}_i = \frac{\Delta x_{i1} + \Delta x_{i0}}{2}$.

Masa skupiona węzła głównego i jest określona następująco:

$$m(s_i) = \mu(s_i) \Delta \bar{s}_i, \quad (9)$$

gdzie: $\Delta \bar{s}_i = \frac{\Delta s_{i1} + \Delta s_{i0}}{2}$, $\mu(s_i) = \rho_{cs} A_{cs}$ — jednostkowa masa elementu żelbetowego o przekroju poprzecznym A_{cs} ; ρ_{cs} — gęstość właściwa żelbetu.

Masowy moment bezwładności odcinka podziału $i1 = i + 1$ wynosi:

$$J(s_{i1}) = j(s_{i1}) \Delta s_{i1}, \quad (10)$$

gdzie: $j(s_{i1}) = \rho_{cs} J_{cs}^o$ — jednostkowy masowy moment bezwładności elementu żelbetowego charakteryzujący się środkowym (głównym) momentem bezwładności obrotowej J_{cs}^o .

Współczynnik tłumienia dla przemieszczeń liniowych w węzle głównym i określa zależność:

$$C(s_i) = c(s_i) \Delta \bar{s}_i, \quad (11)$$

a współczynnik tłumienia dla przemieszczeń kątowych dla odcinka podziału $i1 = i + 1$ wynosi:

$$C_f(s_{i1}) = c_f(s_{i1}) \Delta s_{i1}, \quad (12)$$

gdzie: $c(s_i) = \alpha \mu(s_i)$ — jednostkowy współczynnik tłumienia dla przemieszczeń liniowych elementu żelbetowego charakteryzującego się częstotliwością i okresem drgań liniowych;

$$\alpha = 2\omega_o = \frac{4\pi}{T}, \quad c_f(s_{i1}) = \alpha_f j(s_{i1}) \text{ — jednostkowy współczynnik}$$

tłumienia dla przemieszczeń kątowych elementu żelbetowego charakteryzującego się częstotliwością i okresem drgań obrotowych

$$\alpha_f = 2\omega_{of} = \frac{4\pi}{T_f}.$$

Jeżeli następujące wartości:

$$\begin{cases} \alpha_{kr} = 2\omega_{o,kr} = \frac{4\pi}{T_{kr}} \\ \alpha_{f,kr} = 2\omega_{of,kr} = \frac{4\pi}{T_{f,kr}} \end{cases} \quad (13)$$

oznaczają odpowiednio krytyczne wartości częstotliwości i okresu drgań liniowych oraz krytyczne wartości częstotliwości i okresu drgań obrotowych określone dla nietłumionych, sprężystych drgań elementów żelbetowych, to następujące nierówności określają:

$$\alpha < \alpha_{kr} \text{ i } \alpha_f < \alpha_{f,kr} \text{ — ruch drgający tłumiony,}$$

$$\alpha \geq \alpha_{kr} \text{ i } \alpha_f \geq \alpha_{f,kr} \text{ — monotoniczny ruch tłumiony.}$$

Wprowadzenie dyskretyzacji osi środkowej pozwala również na różnicowe sformułowanie związków geometrycznych (2) w postaci:

— dla węzłów głównych podziału $i = 3, I - 2, 2$

$$\begin{cases} \kappa(s_i) = \frac{\varphi_{i1} - \varphi_{i0}}{\Delta \bar{s}_i} \\ \gamma(s_i) = \bar{\varphi}_i + \bar{\Phi}_i, \end{cases} \quad (14)$$

— dla odcinków podziału $i1 = 2, I - 1, 2$

$$\begin{cases} \kappa(s_{i1}) = \frac{\kappa(s_{i1+1}) + \kappa(s_{i1-1})}{2} \\ \gamma(s_{i1}) = \varphi_{i1} + \Phi_{i1}, \end{cases} \quad (15)$$

gdzie: $\bar{\varphi}_i$ — średnia wartość kąta obrotu przekroju poprzecznego na odcinku $(i, i + 1)$:

$$\bar{\varphi}_i = \frac{\varphi_{i1} + \varphi_{i0}}{2}, \quad (16)$$

$\bar{\Phi}_i$ — średnia wartość kąta obrotu osi środkowej na odcinku $(i, i + 1)$:

$$\bar{\Phi}_i = \frac{\Phi_{i1} + \Phi_{i0}}{2}. \quad (17)$$

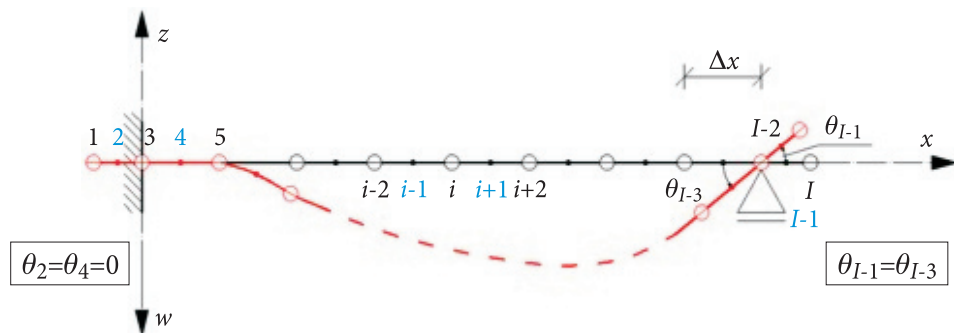
Kąty obrotu Φ_{i1} występujące w zależności (17) dla odcinka $(i, i + 1)$ z uwzględnieniem (2)₃ można wyznaczyć w następujący sposób:

$$\Phi_{i1} = \theta_{i1}^0 - \theta_{i1} \cong \sin(\theta_{i1}^0 - \theta_{i1}) = \sin \theta_{i1}^0 \cdot \cos \theta_{i1} - \cos \theta_{i1}^0 \cdot \sin \theta_{i1}. \quad (18)$$

Dyskretyzacja osi środkowej modelu prętowego umożliwia przeprowadzenie analizy stanów przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia przekrojów poprzecznych oraz określenie przestrzennej zmienności sztywności przekrojów.

2.5. Warunki brzegowe

Warunki brzegowe sformułowano przez wprowadzenie tzw. węzłów podwójnych składających się z węzłów fikcyjnych $i_{b1} = 1$ lub $i_{b1} = I$ oraz pokrywających się z nimi węzłów rzeczywistych $i_{r1} = i_{b1} + 2$ lub $i_{r1} = i_{b1} - 2$ (rys. 3). W węzłach tych nie występuje różnica przemieszczeń i mają one te same współrzędne podczas deformacji konstrukcji.



Rys. 3. Warunki brzegowe modelu obliczeniowego

$$\left(x_{i_r}, z_{i_r}\right)^n = \left(x_{i_b}, z_{i_b}\right)^n = \left(x_{i_r}, z_{i_r}\right)^0. \quad (19)$$

Węzły te tworzą fikcyjne odcinki brzegowe $i_{b1}1 = i_{b1} + 1$ lub $i_{b1}0 = i_{b1} - 1$ o zerowej długości, dla których, w zależności od sposobu zamocowania brzegu, przyjmujemy następujące warunki brzegowe:

$$\begin{cases} \varphi_{i_{b1}1} = k\varphi_{i_r1} \\ \Phi_{i_{b1}1} = k\Phi_{i_r1} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} \varphi_{i_{b1}0} = k\varphi_{i_r0} \\ \Phi_{i_{b1}0} = k\Phi_{i_r0} \end{cases} \quad (20)$$

gdzie: $k = 0$ dla brzegu utwierdzonego;
 $k = 1$ dla brzegu przegubowego.

Wykorzystując podane zależności, możemy wyznaczyć średni kąt obrotu przekroju poprzecznego i średnie odkształcenia postaciowe w rzeczywistym węźle brzegowym.

3. Metoda rozwiązania układu równań równowagi

3.1. Istota metody rozwiązania

Układ równań (5) opisujący problem dynamicznego zachowania niesprężystego elementu żelbetowego rozwiązano przy zastosowaniu tłumienia krytycznego $c = \max(c_{i,kr})$ dla przemieszczeń liniowych i $c_f = \max(c_{fi,kr})$ dla przemieszczeń kątowych, co umożliwia w przejściu granicznym opis zagadnienia statycznego. Taka metoda rozwiązania jest określana jako metoda relaksacji dynamicznej.

W celu zwiększenia efektywności rozwiązania w zakresie analizy pokrytycznej w rozwiązaniu układu nieliniowych równań równowagi dynamicznej uwzględniona została metoda śledzenia ścieżki rozwiązania dla wielu zmiennych [13, 14]. Ogólna idea metody polega na włączeniu do analizy równań ruchu dodatkowego równania więzów łączącego parametr obciążenia i wektor przyrostów przemieszczenia z przyrostem długości łuku na ścieżce rozwiązania.

3.2. Rozwiązanie numeryczne równań ruchu

Rozwiązanie układu równań (5) uzyskano metodą numeryczną z wykorzystaniem dyskretyzacji względem czasu. W tym celu zastosowano bezpośrednią metodę różnicową względem czasu. Metoda ta polega na aproksymacji rozwiązania dla przemieszczeń liniowych $w(x_i, t_n)$ w każdym węźle podziału oraz przemieszczeń kątowych $\varphi(x_i, t_n)$, w każdym odcinku podziału osi środkowej modelu prętowego, zgodnie z następującym schematem różnicowym, w kolejnych chwilach czasowych $t_{n-1} = t_n - \Delta t$, $t_n = n\Delta t$, $t_{n+1} = t_n + \Delta t$:

$$\begin{cases} w_i^n = w_i^{n-1} + \Delta w_i^n \\ \varphi_i^n = \varphi_i^{n-1} + \Delta \varphi_i^n. \end{cases} \quad (21)$$

Schematy różnicowe aproksymujące prędkości przemieszczeń i przyspieszenia w układzie równań (5) przyjęto analogicznie do (21).

W równaniach (21) przyrosty odpowiednich przemieszczeń są określone na podstawie równań (5)

$$\begin{cases} \Delta w_i^n = b_i \Delta w_i^{n-1} + a_i [Q_{i1} \cos \theta_{i1} - Q_{i0} \cos \theta_{i0} + P_z(s_i)] \\ \Delta \varphi_{i1}^n = b_{f1} \Delta \varphi_{i1}^{n-1} + a_{f1} (M_{i+2} - M_i - Q_{i1} \Delta s_{i1}), \end{cases} \quad (22)$$

gdzie:

$$b_i = \frac{m_i}{m_i + C_i \Delta t} \quad \text{i} \quad a_i = \frac{\Delta t^2}{m_i + C_i \Delta t}$$

oraz $b_{f1} = \frac{j_i}{j_i + C_{f1} \Delta t} \quad \text{i} \quad a_{f1} = \frac{\Delta t^2}{j_i + C_{f1} \Delta t}.$

Warunki początkowe dla kroku $t_0 = 0$ przyjęto w postaci

$$\Delta w_i^{-1} = 0, \quad \Delta \varphi_i^{-1} = 0. \quad (23)$$

Warunkiem zakończenia iteracyjnego rozwiązania równania ruchu tłumionego jest osiągnięcie zbieżności przemieszczeń w kolejnych chwilach czasowych:

$$\|\Delta w_i^n\| \leq \varepsilon_{\Delta w}. \quad (24)$$

Krok czasowy Δt wyznaczony został z uwagi na stabilność metody numerycznego całkowania równania różnicowego i ma postać [1, 2, 9]

$$\Delta t = \alpha_r \min \{ \Delta t_{(b)}, \Delta t_{(f)} \}, \quad (25)$$

gdzie: $\Delta t_{(b)} = \frac{1}{2} \Delta \bar{s}_{i \min}^{-2} \sqrt{\frac{\mu(s_i)}{B_{cs}}}$ — krytyczny krok czasowy dla problemu sprężystego zginania;

$\Delta t_{(f)} = \Delta \bar{s}_{i \min} \sqrt{\frac{\rho_{cs}}{\mu_c}}$ — krytyczny krok czasowy dla problemu propagacji

sprężystych fal postaciowych;

$\alpha_r = 0,2 \div 0,9$ — współczynnik pewności dla kroku czasowego ze względu na nieliniowość zadania;

$\mu(s_i) = \rho_{cs} A_{cs}$ — masa jednostkowa elementu;

ρ_{cs} — masa właściwa żelbetu;
 $B_{cs} = E_c J_{cs}$ — sztywność zginania przekroju żelbetowego w zakresie sprężystym;
 E_c — moduł odkształcenia podłużnego;
 μ_c — moduł odkształcenia poprzecznego;
 J_{cs} — moment bezwładności niezarysowanego (sprężystego) przekroju żelbetowego;
 $\rho_{s \max}$ — największy w całym elemencie żelbetowym całkowity stopień zbrojenia przekroju.

3.3. Rozwiązanie równania więzów

Równanie więzów przyjęto w następującej postaci [3, 14]

$$f(\mathbf{q}, \lambda) = \Delta \mathbf{q}_m^T \Delta \mathbf{q}_m + \Delta \lambda_m^2 - \Delta l^2 = 0, \quad (26)$$

gdzie: Δl — przyjęty przyrost (parametr) długości łuku na ścieżce rozwiązania;

$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} w \\ \varphi \end{Bmatrix}$ — wektor poszukiwanych przemieszczeń;

$\Delta \lambda_m = \lambda^n - \lambda_m$ — przyrost aktualnego parametru obciążenia λ^n ;

$\Delta \mathbf{q}_m = \mathbf{q}^n - \mathbf{q}_m$ — przyrost aktualnego wektora niewiadomych przemieszczeń \mathbf{q}^n względem ostatnich zbieżnych wartości parametru obciążenia λ_m oraz wektora przemieszczeń \mathbf{q}_m uzyskanych z założoną dokładnością w poprzednim kroku obciążenia m .

Zaproponowano wyznaczenie parametru obciążenia λ^n przez bezpośrednie rozwiązanie równania więzów (26). Sposób ten wymaga badania znaku wyróżnika $g(\mathbf{q}) = \Delta l^2 - \Delta \mathbf{q}_m^T \Delta \mathbf{q}_m$ oraz określenia rozwiązań

$$\lambda_{1,2}^n = \lambda_m \pm \sqrt{\Delta l^2 - \Delta \mathbf{q}_m^T \Delta \mathbf{q}_m}, \text{ jeżeli } g(\mathbf{q}) \geq 0,$$

$$\lambda_{1,2}^n = \lambda_m \pm \sqrt{\Delta \mathbf{q}_m^T \Delta \mathbf{q}_m - \Delta l^2}, \text{ jeżeli } g(\mathbf{q}) < 0,$$

a następnie dokonania wyboru rozwiązania według kryterium najmniejszej „odległości” względem rozwiązania uzyskanego w kroku obciążenia $m - 1$, czyli najmniejszego kąta (lub największego kosinusa tego kąta) pomiędzy rozwiązaniem w aktualnym kroku obciążenia m a rozwiązaniem w poprzednim kroku obciążenia $m - 1$:

$$\vartheta = \min(\vartheta_1, \vartheta_2) = \min \left(\arccos \frac{\Delta \mathbf{q}_{m,1} \Delta \mathbf{q}_{m-1}}{\Delta l^2}, \arccos \frac{\Delta \mathbf{q}_{m,2} \Delta \mathbf{q}_{m-1}}{\Delta l^2} \right). \quad (27)$$

Z analizy warunków rozwiązania równania więzów (26) wynika, że kryterium to spełnia rozwiązanie zapisane w postaci

$$\lambda^n = \lambda_m + \text{sign}(\Delta l^2 - \Delta \mathbf{q}_m^T \Delta \mathbf{q}_m) \sqrt{\text{abs}(\Delta l^2 - \Delta \mathbf{q}_m^T \Delta \mathbf{q}_m)}. \quad (28)$$

3.4. Ideowy algorytm rozwiązania rozszerzonego układu równań

Równanie więzów (26) wraz z układem równań ruchu (22) tworzą rozszerzony układ równań, który jest rozwiązywany iteracyjnie w każdej chwili czasu $t_n = n\Delta t$.

Rozszerzony układ równań umożliwia wyznaczenie nie tylko poszukiwanego wektora przemieszczeń \mathbf{q} , lecz także parametru obciążenia λ na nieliniowej ścieżce równowagi zawierającej lokalne punkty graniczne.

Rozwiązanie rozszerzonego układu równań jest dwuetapowe i polega na wyznaczeniu: (I etap — predykcji) parametru obciążenia w zależności od wartości przemieszczeń z poprzedniego kroku iteracyjnego na podstawie równania więzów (26); (II etap — korekcji) nowych wartości przemieszczeń w następnym kroku iteracyjnym z układu równań ruchu (22).

Układ równań (22) można przedstawić w postaci:

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}, \lambda) = \Delta \mathbf{q}^n - \Delta \mathbf{q}_G^n - \Delta \lambda^n \Delta \mathbf{q}_P^n = 0, \quad (29)$$

gdzie: $\Delta \mathbf{q}^n = \begin{Bmatrix} \Delta w_i^n \\ \Delta \varphi_{i1}^n \end{Bmatrix}$ — wektor poszukiwanych przyrostów przemieszczeń;

$\Delta \mathbf{q}_P^n = \begin{Bmatrix} a_i P_z(s_i) \\ 0 \end{Bmatrix}$ — wektor składowych przyrostów przemieszczeń

od całkowitego obciążenia;

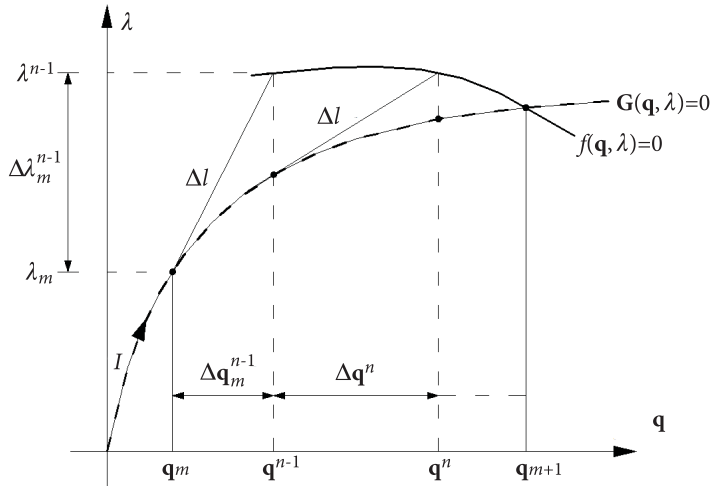
$\Delta \mathbf{q}_G^n = \begin{Bmatrix} b_i \Delta w_i^{n-1} + a_i [Q_{i1} \cos \theta_{i1} - Q_{i0} \cos \theta_{i0}] \\ b_{fi} \Delta \varphi_{i1}^{n-1} + a_{fi} (M_{i+2} - M_i - Q_{i1} \Delta s_{i1}) \end{Bmatrix} + \lambda^{n-1} \Delta \mathbf{q}_P^n$ — wektor

składowych przyrostów przemieszczeń dla parametru obciążenia λ^{n-1} z poprzedniego kroku czasowego.

Schemat iteracyjnego rozwiązania rozszerzonego układu równań (29) $\mathbf{G}(\mathbf{q}, \lambda) = 0$ oraz równania więzów (26) $f(\mathbf{q}, \lambda) = 0$ przedstawiono na rysunku 4.

Rozwiązanie uzyskuje się po (n)-tej iteracji utożsamianej z krokiem czasowym

$$\lambda^n = \lambda^{n-1} + \Delta \lambda^n, \quad \mathbf{q}^n = \mathbf{q}^{n-1} + \Delta \mathbf{q}^n. \quad (30)$$



Rys. 4. Schemat iteracyjnego rozwiązania rozszerzonego układu równań

Proces iteracyjnego poprawiania wyniku kończy się w chwili osiągnięcia żądanej dokładności ε_G rozwiązania

$$\|\mathbf{G}(\mathbf{q}^n, \lambda^n)\| \leq \varepsilon_G. \quad (31)$$

Na podstawie doświadczeń numerycznych ustalono, że wystarczające jest przyjęcie dokładności rozwiązania w zakresie $\varepsilon_G \in (0, 1^{-3}; 0, 1^{-6})$.

W chwili osiągnięcia zbieżnego rozwiązania ustala się parametr obciążenia oraz wektor przemieszczeń dla następnego kroku obciążenia $t_n = n\Delta t$, $\lambda_{m+1} = \lambda^n$, $\mathbf{q}_{m+1} = \mathbf{q}^n$.

4. Zakończenie

W pracy przedstawiono sformułowanie metody analizy zachowania zginanych elementów żelbetowych poddanych działaniu krótkotrwałych obciążeń statycznych.

Metodę analizy układu konstrukcyjnego opracowano w oparciu o założenia metody różnic skończonych. Na podstawie przeprowadzonej dyskretyzacji osi środkowej elementu konstrukcyjnego, w postaci różnicowej zapisano równania równowagi elementu oraz związki geometryczne. Dla dyskretyzowanego modelu przekroju poprzecznego określono zasady współpracy czynnych betonowych i stalowych warstw przekroju poprzecznego.

Rozważano proces dynamiczny, który po wprowadzeniu tłumienia krytycznego pozwala na opis zagadnienia statycznego. Taka procedura zastosowana do rozwiązania

układu nieliniowych równań równowagi jest określana jako metoda relaksacji dynamicznej (MRD). MRD umożliwia rekurencyjne rozwiązanie układu równań ruchu w kolejnych chwilach pseudoczasu w każdym węźle podziału przestrzennego, bez konieczności rozwiązywania układu algebraicznych równań równowagi elementu. Metoda relaksacji dynamicznej została rozbudowana poprzez włączenie do układu równań równowagi dodatkowego równania więzów, zgodnie z założeniami metody długości łuku (MRD + DŁ). Taka wersja metody umożliwia rozwiązanie układu nieliniowych równań równowagi w zakresie pokrytycznym.

Podstawą opisu zachowania konstrukcji są równania teorii umiarkowane dużych przemieszczeń ustroju prętowego, przy założeniu małych odkształceń. Założenie to można uznać za prawidłowe do opisu stanów odkształcenia i naprężenia w warstwach betonowych i stalowych w zwykłych elementach żelbetowych o typowych smukłościach.

Metoda analizy wyężenia konstrukcji będzie podstawą opracowania własnych procedur numerycznych i programów obliczeniowych, które posłużą do przeprowadzenia badań numerycznych zginanych elementów żelbetowych. W tym celu układ równań podstawowych metody musi być uzupełniony związkami fizycznymi dla betonu i stali zbrojeniowej.

Praca powstała w wyniku zadań badawczych zrealizowanych w ramach pracy badawczej statutowej nr 855, realizowanej w Wydziale Inżynierii Łądowej i Geodezji Wojskowej Akademii Technicznej im. Jarosława Dąbrowskiego.

Artykuł wpłynął do redakcji 2.06.2015 r. Zweryfikowaną wersję po recenzjach otrzymano 15.10.2015 r.

LITERATURA

- [1] BĄK G., *Bezpośrednia metoda różnicowa w dynamice konstrukcji sprężystych*, Mechanika i Komputer, t. 5, 1983, 159-175.
- [2] BĄK G., STOLARSKI A., *Nieliniowa analiza belek żelbetowych poddanych działaniu obciążeń impulsowych*, Cz. I i II, PAN, IPPT, Rozprawy Inżynierskie, vol. 36, nr 3, Warszawa, 1988, 501-517, 519-539.
- [3] CRISFIELD M.A., *A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through*, Computers and Structures, 13, 1981, 55-62.
- [4] PASQUALINO I.P., ESTEFEN S.F., *A nonlinear analysis of the buckle propagation problem in deepwater pipelines*, International Journal of Solids and Structures, vol. 38, 2001, 8481-8502.
- [5] RAMESH G., KRISHNAMOORTHY C.S., *Post-buckling analysis of structures by dynamic relaxation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 36, 1993, 1339-1364.
- [6] RAMM E., *Strategies for tracing the nonlinear response near limit points*, [in:] Wunderlich W., Stein E. and Bathe K.J., (editors), *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1981.
- [7] RIKS E., *The application of Newtons method to the problem of elastic stability*, Journal of Applied Mechanics, 39, 1972, 1060-1066.

- [8] SCHWEIZERHOF K., WRIGGERS P., *Consistent linearization for path following methods in nonlinear FE-analysis*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 59, 1986, 261-279.
- [9] STOLARSKI A., *Model dynamiczny prętowych ustrojów żelbetowych*, WAT 153, Warszawa, 1989.
- [10] STOLARSKI A., *Model dynamicznego odkształcenia betonu*, AIL, 37, 3-4, 1991, 405-447.
- [11] SZCZEŚNIAK A., STOLARSKI A., *Analiza wyężenia słupów żelbetowych metodą relaksacji dynamicznej*, Biul. WAT, 63, 2, 2014, 155-170.
- [12] SZCZEŚNIAK A., STOLARSKI A., *Analiza wyężenia belek żelbetowych metodą relaksacji dynamicznej*, Inżynieria i Budownictwo, 5, Warszawa, 2012, 267-269.
- [13] WASZCZYSZYN Z., CICHON CZ., RADWAŃSKA M., *Metoda elementów skończonych w stateczności konstrukcji*, Arkady, Warszawa, 1990.
- [14] WRIGGERS P., *Nonlinear Finite Element Methods*, Springer, 2008.

A. SZCZEŚNIAK, A. STOLARSKI

Dynamic relaxation method in analysis of reinforced concrete bent elements

Abstract. The paper presents a method for the analysis of nonlinear behaviour of reinforced concrete bent elements subjected to short-term static load. The considerations in the range of modelling of deformation processes of reinforced concrete element were carried out. The method of structure effort analysis was developed using the finite difference method. The Dynamic Relaxation Method, which — after introduction of critical damping — allows for description of the static behaviour of a structural element, was used to solve the system of nonlinear equilibrium equations. In order to increase the method effectiveness in the range of the post-critical analysis, the Arc Length Parameter on the equilibrium path was introduced into the computational procedure.

Keywords: reinforced concrete elements, physical nonlinearity, geometrical nonlinearity, dynamic relaxation method, arc-length method

DOI: 10.5604/12345865.1186402

