



## Modele matematyczne jednofazowych linii długich

PIOTR FIGOŃ

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Elektroniki, Instytut Systemów Elektronicznych,  
ul. gen. S. Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa, piotr.figon@wat.edu.pl

**Streszczenie.** Większość pakietów symulacyjnych udostępnia modele linii długich zawierające wyłącznie dwa zaciski wejściowe oraz dwa zaciski wyjściowe. Modele te umożliwiają badanie stanów nieustalonych inicjowanych wystąpieniem zakłócenia na krańcach linii. Z tego powodu nie ma możliwości badania zaburzeń pojawiających się w dowolnym punkcie sieci elektrycznej. W artykule szczegółowo opisano modele matematyczne linii długiej, ich implementację w środowisku Matlab oraz przedstawiono przykładowe wyniki symulacji komputerowych.

**Słowa kluczowe:** linia długa, metoda zmiennych stanu, schemat różnicowy

**DOI:** 10.5604/01.3001.0013.9735

### 1. Wprowadzenie

Obwody elektryczne o parametrach rozłożonych to klasa sieci elektrycznych, których stan charakteryzowany jest wartościami chwilowymi prądów i napięć uzależnionych od położenia względem określonego punktu odniesienia i czasu. Wśród wspomnianych struktur wymienić można: uzwojenia transformatorów wielkich mocy poddawane działaniu fal przepięciowych, linie przesyłowe wysokiego napięcia eksploatowane w warunkach występowania stanu nieustalonego, wielowarstwowe obwody drukowane przenoszące sygnały wielkich częstotliwości itp. Przedmiotem zainteresowania publikacji są linie długie, do których można przypisać część wspomnianych wyżej układów. Do ich analizy stosowane są hiperboliczne równania różniczkowe cząstkowe zwane równaniami telegrafistów. Sformułowanie tych równań otworzyło drogę do szybkiego rozwoju telekomunikacji naziemnej, jednak pomimo upływu ponad



Przyjęcie wycinka linii długiej mającego postać taką jak na rysunku 1 jest zabiegiem wskazanym z punktu widzenia uwarunkowań związanych ze specyfiką definiowania pochodnych zmiennych stanu w takim obwodzie elektrycznym. Pierwsza pochodna napięcia na kondensatorze  $C_k$  zależy m.in. od wartości chwilowych prądów płynących w gałęziach podłużnych przyłączonych do wspólnego węzła. Analogicznie pierwsza pochodna prądu płynącego w gałęzi podłużnej, do której krańców dołączone są kondensatory, jest zależna od napięcia panującego na zaciskach tych elementów. Przechodząc do bardziej szczegółowego opisu treści rysunku 1, da się zauważyć, że do węzła o numerze  $k$  dołączone są dwójniki zawierające elementy  $R_k, L_k$  oraz  $R_{k+1}, L_{k+1}$  łączące sekcje o numerach odpowiednio  $(k-1)$ - $k$  oraz  $k$ - $(k+1)$ , jak również gałąź poprzeczna reprezentowana przez równoległe połączenie kondensatora  $C_k$  oraz rezystora  $R_{p,k}$ . Na rysunku zamieszczono również węzły o numerach  $k-1, k+1$  wraz z dołączonymi do nich gałęziami. Wykorzystanie tak opracowanego fragmentu sieci ma w założeniu umożliwić uzyskanie łatwego do implementacji numerycznej układu równań różniczkowych pierwszego rzędu. Punktem wyjścia jest zastosowanie I prawa Kirchoffa dla węzła  $k$  oraz II prawa Kirchoffa dla oczka  $C_{k-1}$ - $R_k$ - $L_k$ - $C_k$ . Otrzymane równania przyjmują postać:

$$u_{C,k-1} - R_k i_{L,k} - L_k \frac{di_{L,k}}{dt} - u_{C,k} = 0, \quad (1)$$

$$i_{L,k} = C_k \frac{du_{C,k}}{dt} + \frac{1}{R_{p,k}} u_{c,k} + i_{L,k+1}, \quad (2)$$

gdzie:  $u_{c,k}$  — napięcie na kondensatorze przyłączonym do węzła  $k$ ,  
 $u_{c,k+1}$  — napięcie na kondensatorze przyłączonym do węzła  $k+1$ ,  
 $i_{L,k}$  — prąd cewki wpływający do węzła  $k$ ,  
 $i_{L,k+1}$  — prąd cewki wpływający do węzła  $k+1$  (wypływający z węzła  $k$ ),  
 $R_k$  — rezystancja gałęzi podłużnej o numerze  $k$ ,  
 $L_k$  — indukcyjność gałęzi podłużnej o numerze  $k$ ,  
 $C_k$  — pojemność gałęzi poprzecznej o numerze  $k$ ,  
 $R_{p,k}$  — rezystancja gałęzi poprzecznej o numerze  $k$  ( $R_{p,k} \gg R_k$ ).

Po przekształceniu równań 1, 2 uzyskuje się parę równań zapisanych wzorami 3 oraz 4.

$$\frac{di_{L,k}}{dt} = \frac{1}{L_k} u_{C,k-1} - \frac{R_k}{L_k} i_{L,k} - \frac{1}{L_k} u_{C,k}, \quad (3)$$

$$\frac{du_{C,k}}{dt} = \frac{1}{C_k} i_{L,k} - \frac{1}{R_{p,k} C_k} u_{c,k} - \frac{1}{C_k} i_{L,k+1}. \quad (4)$$

Po lewej stronie równań 3 i 4 znajdują się pochodne zmiennych stanu skojarzone z indeksem  $k$ . Natomiast po prawej stronie liniowa kombinacja zmiennych stanu o numerach  $k-1, k, k+1$  wymnożonych przez odpowiednie współczynniki. Układ równań 3, 4 jest nieautonomiczny i niewystarczający z punktu widzenia realizacji zadania, jakim jest uzyskanie reprezentacji numerycznej przebiegów czasowych reprezentujących wszystkie prądy i napięcia występujące w  $k$ -tym oczku. Opisuje on tylko wybrany fragment (sekcję) linii długiej.

Modyfikacja właściwości parametru  $k$  ze zmiennej skalarnej na zmienną wektorową ( $k = 1, 2, \dots, M$ ) skutkuje uzyskaniem układu równań zawierającego formuły matematyczne definiujące zależności między wartościami chwilowymi prądów cewek i napięć kondensatorów (prawa strona równań) oraz ich pierwszymi pochodnymi (lewa strona równań). Wątpliwości wzbudza odwołanie do zmiennych stanu  $\frac{di_{L,K}}{dt}$  oraz  $\frac{du_{C,K}}{dt}$  skojarzonych z indeksem  $k$  o wartości równej 1 i  $M$  w równaniach 3, 4. Pierwsza ze wspomnianych ( $k = 1$ ) okoliczności dotyczy oczka nr 1. Dołączone jest ono bezpośrednio do źródła zasilania, w związku z czym w odniesieniu do równania 3 nie wystąpi składnik usytuowany bezpośrednio na prawo od znaku równości, ostatecznie dla  $k = 1$  ma ono postać:

$$\frac{di_{i,1}}{dt} = -\frac{R_1}{L_1}i_{i,1} - \frac{1}{L_1}u_{c,1} + \frac{1}{L_1}e(t), \quad (5)$$

gdzie:  $R_1$  — rezystancja pierwszej gałęzi podłużnej,  
 $L_1$  — indukcyjność pierwszej gałęzi podłużnej,  
 $u_{c,1}$  — napięcie na kondensatorze znajdującym się na pierwszej pozycji na prawo od źródła zasilania (dołączonego do wężła o numerze 1).

Człon

$$\frac{1}{L_1}e(t), \quad (6)$$

uwzględnia wpływ dowolnego wymuszenia na stan analizowanej sieci elektrycznej.

Nieco inna sytuacja ma miejsce w odniesieniu do równania 4. Z uwagi na brak związanej z prądem  $i_{L,M+1}$  gałęzi o numerze  $M+1$  dla indeksu  $M$  przyjmie ono następującą postać:

$$\frac{du_{c,M}}{dt} = \frac{1}{C_M}i_{L,M} - \frac{1}{R_{p,M}C_M}u_{c,M}. \quad (7)$$

Jeżeli założy się, że liczba oczek w będącej obiektem zainteresowania linii długiej jest równa  $M$ , to w oparciu o:

- jednokrotną realizację równania 5,

- $(M-1)$ -krotną realizację równania 3,
- $(M-1)$ -krotną realizację równania 4,
- jednokrotną realizację równania 7

możliwe jest sformułowanie łatwego do zapisu macierzowego układu liniowych równań różniczkowych w pełni opisującego zachowanie nieobciążonej linii długiej w stanach ustalonych i nieustalonych przy dowolnym wymuszeniu napięciowym. Jego zapis ma postać taką jak w równaniu 8:

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}. \quad (8)$$

Macierz

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}]_{2M, 2M} \quad (9)$$

jest trójdzielna i zawiera współczynniki o wartościach zależnych od rezystancji, indukcyjności i pojemności elementów RLC.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{R_{p,1}C_1} & -\frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_k} & -\frac{R_2}{L_2} & -\frac{1}{L_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{C_2} & -\frac{1}{R_{p,2}C_2} & -\frac{1}{C_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_M} & -\frac{R_M}{L_M} & -\frac{1}{L_M} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_{p,M}C_M} & -\frac{1}{C_M} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Wektor

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}]_{2M, 1} \quad (11)$$

reprezentuje zbiór zmiennych stanu i zawiera ulokowane naprzemiennie pary prądów cewek i napięcia kondensatorów.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \dot{i}_{l,1} \\ u_{c,1} \\ \dot{i}_{l,2} \\ u_{c,2} \\ \dots \\ \dot{i}_{l,M} \\ u_{c,M} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Wektor kolumnowy

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}]_{2M,1} \quad (13)$$

uwzględnia wpływ źródła zasilającego na stan sieci.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Wektor

$$\frac{dx}{dt} = \left[ \frac{dx}{dt} \right]_{2M,1} \quad (15)$$

zawiera pochodne kolejnych elementów wektora  $\mathbf{x}$  po czasie  $t$ .

Wektor  $\mathbf{u}$  reprezentuje wymuszenie.

### 3. Sformułowanie opisu matematycznego linii długiej obciążonej na końcu dwójnikiem RC oraz dwójnikiem RLC

Na tym etapie możliwe jest uwzględnienie przypadku dotyczącego linii długiej obciążonej. W praktyce spotyka się linie długie obciążone na końcu. Dla konfiguracji związanej z występowaniem obciążenia rezystancyjno-pojemnościowego, modyfikacja macierzy stanu (10) sprowadza się do zmiany pojemności poprzecznej  $C_M$  na pojemność obciążenia  $C_0$  (szeregowe połączenie  $C_M$  i pewnej pojemności  $C_0'$ , tak że  $C_0 = C_0' + C_M$ ) oraz rezystancji poprzecznej  $R_{p,M}$  na rezystancję obciążenia  $R_0$ .

W odniesieniu do obciążenia indukcyjnego (cewki rzeczywistej) liczba zmiennych stanu wzrasta o jeden, a zastosowanie I prawa Kirchoffa do węzła o numerze  $M$  wygląda następująco:

$$i_{L,M} = C_M \frac{du_{c,M}}{dt} + \frac{1}{R_{p,M}} u_{c,M} + i_{L,obc}. \quad (16)$$

Po przekształceniach uzyskiwana jest formuła (17) powiązana z równaniem (7)

$$\frac{du_{c,M}}{dt} = \frac{1}{C_M} i_{L,M} - \frac{1}{R_{p,M} C_M} u_{c,M} - \frac{1}{C_M} i_{L,obc}. \quad (17)$$

Korzystając z II prawa Kirchoffa dla oczka o numerze  $M$ , można zapisać, że:

$$u_{c,M} = R_{L,obc} i_{L,obc} + L_0 \frac{di_{L,obc}}{dt}. \quad (18)$$

Po prostych przekształceniach otrzymuje się wzór (19)

$$\frac{di_{L,obc}}{dt} = \frac{1}{L_0} u_{c,\max(k)} + \frac{R_{L0}}{L_0} i_{L,obc}, \quad (19)$$

gdzie:  $L_0$  — indukcyjność cewki obciążenia,  
 $R_{L,obc}$  — szeregową rezystancją strat cewki obciążenia,  
 $i_{L,obc}$  — prąd cewki rzeczywistej o indukcyjności  $L_0$  dołączonej do zacisków kondensatora o pojemności  $C_M$ .

Ostatecznie uwzględniona zostaje kolejna zmienna stanu. W odniesieniu do składników równania (10) można napisać, że:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}]_{2M+1, 2M+1} \quad (20)$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}]_{2M+1, 1} \quad (21)$$

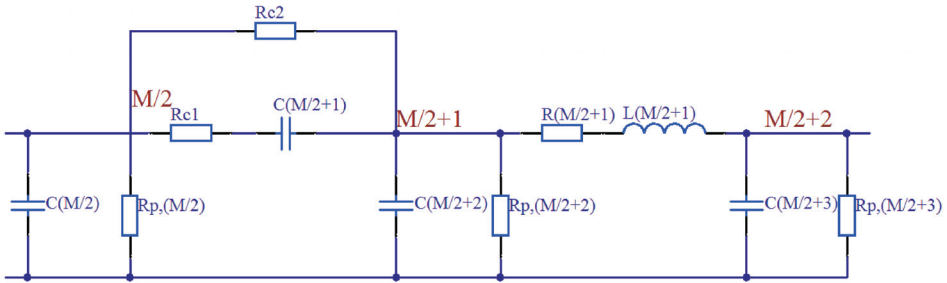
$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}]_{2M+1, 1} \quad (22)$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left[ \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right]_{2M+1, 1} \quad (23)$$

Zmianie uległy odpowiednie rozmiary wiersza i kolumny.

#### 4. Sformułowanie opisu matematycznego linii długiej skompensowanej szeregowo

W nawiązaniu do treści zamieszczonych wyżej przedstawione zostanie równanie macierzowe umożliwiające uwzględnienie zastosowania szeregowej kompensacji linii jednofazowej. Punktem wyjścia pozwalającym na realizację tego zadania będzie m.in. wprowadzenie określonych modyfikacji w strukturze macierzy stanu (10). Zakłada się, że do zacisków wejściowych oraz wyjściowych czwórnika tworzącego oczko  $R_{p,M/2}-R_{c1}-R_{c2}-C_{M/2+1}-C_{M/2+2}$  z rysunku 2 została dołączona sieć elektryczna będąca reprezentacją linii długiej złożonej z sekcji elementarnych o łącznej liczbie  $M$  ( $M/2$  sekcji na lewo od kondensatora  $C_{M/2}$ ,  $M/2$  sekcji na prawo od kondensatora  $C_{M/2+2}$ ).



Rys. 2. Czwórnik służący do szeregowej kompensacji mocy biernej ulokowany na środku linii długiej z rysunku 1

Wspomniany czwórnik zawiera rzeczywisty kondensator  $C_{M/2+1}$  zbocznikowany rezystorem  $R_{c2}$ . Na wejściu czwórnika znajduje się kondensator  $C_{M/2}$  związany z sekcją typu  $\Gamma$  o tym samym numerze co indeks opisujący pojemność tego elementu, natomiast na wyjściu dodatkowy kondensator  $C_{M/2+2}$ . Wprowadzenie do analizowanej struktury dwóch kondensatorów skutkuje zmianą numeracji określonego podzbioru (o indeksach wyższych od  $M/2$ ) zmiennych stanu względem tej obowiązującej we wzorze 10 oraz lokalnym zaburzeniem sposobu ich ułożenia parami prąd cewki-napięcie kondensatora.

Prezentując równanie stanu sieci elektrycznej, uznano, że zamieszczenie wszystkich przekształceń matematycznych prowadzących do określenia relacji pomiędzy pochodnymi napięć  $u_{c,M/2}$ ,  $u_{c,M/2+1}$ ,  $u_{c,M/2+2}$  a zmiennymi stanu, których podzbiór one stanowią, nie jest celowe. Tłumaczy się to w ten sposób, że dla uzyskania efektu końcowego konieczne jest wykonanie dużej liczby działań na symbolach, a ich zamieszczenie mogłoby skutkować przeniesieniem akcentów na te elementy publikacji, które — w opinii autora — nie są zbyt interesujące. Przedstawiony zostanie zatem wynik końcowy realizacji tych operacji matematycznych mający postać zapisaną wzorem (24).



$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_M} & \frac{R_M}{L_M} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{L_M} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{C_M} & \frac{R_{p-2} R_{C2+} R_{M-} R_{C1} + R_{C1} R_{C2}}{R_{p-2} R_{C1} R_{C2} C_M} & \frac{R_{C1} R_{C2} C_M}{2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{R_{C1} C_s} & \frac{R_{C1} C_s}{R_{C1} C_s} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{R_{C1} + R_{C2}}{R_{C1} R_{C2} C_{M+1}} & \frac{R_{C1} R_{C2} C_{M+1}}{2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ i_{L, \frac{M}{2}} & u_{C, \frac{M}{2}} & u_{C, \frac{M}{2}+1} & u_{C, \frac{M}{2}+2} & i_{L, \frac{M}{2}+1} & u_{C, \frac{M}{2}+3} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} + Bu \tag{24}$$

- gdzie:
- $i_{L, \frac{M}{2}}$ ,  $i_{L, \frac{M}{2}+1}$  — prądy indukcyjne płynące w gałęziach podłużnych o numerach  $M/2$  oraz  $M/2 + 1$ ,
  - $u_{C, \frac{M}{2}}$  — napięcie na kondensatorze dołączonym do węzła o numerze  $M/2$ ,
  - $u_{C, \frac{M}{2}+2}$  — napięcie na kondensatorze dołączonym do węzła o numerze  $M/2 + 1$ ,
  - $u_{C, \frac{M}{2}+3}$  — napięcie na kondensatorze dołączonym do węzła o numerze  $M/2 + 2$ ,
  - $u_{C, \frac{M}{2}+1}$  — napięcie na kondensatorze szeregowym  $C_{M/2+1}$  dołączonym do węzłów o numerach  $M/2$  i  $M/2+1$ ,

$R_{c1}$  — rezystancja gałęzi szeregowej  $C_{M/2+1}$ - $R_s$  dołączonej do węzłów o numerach  $M/2$  i  $M/2+1$ ,

$R_{c2}$  — rezystancja bocznikująca gałąź szeregową  $C_{M/2+1}$ - $R_s$ ,

$C_{M/2+1}$  — pojemność rzeczywistego kondensatora kompensującego (szeregowego),

$\mathbf{u}$  — wektor wymuszeń.

Pozostałe oznaczenia z indeksami mają taki sam sens jak w równaniach 1 i 2. Formuła 24 opisuje relacje, jakie wiążą prądy i napięcia definiujące stan sieci elektrycznej w tym fragmencie, w którym następuje naruszenie ciągłości jej kaskadowej struktury na skutek dołączenia czwórnika charakteryzującego się inną strukturą niż sąsiadujące z nim sekcje typu  $\Gamma$ . Równanie 24 można zapisać w bardziej zwartej formie, mianowicie:

$$\frac{d\mathbf{x}_s}{dt} = \mathbf{A}_s \mathbf{x}_s + \mathbf{B}_s \mathbf{u}, \quad (25)$$

gdzie:

$$\mathbf{x}_s = \left[ i_{L,1}, u_{c,1}, \dots, i_{L, \frac{M}{2}}, u_{C, \frac{M}{2}}, u_{C, \frac{M}{2}+1}, u_{c, \frac{M}{2}+2}, i_{L, \frac{M}{2}+1}, u_{c, \frac{M}{2}+3}, \dots, i_{L, M-1}, u_{C, M-1}, i_{L, M}, u_{C, M} \right]^T. \quad (26)$$

Macierz  $\mathbf{B}_s$  ma taką strukturę jak macierz we wzorze 8:

$$\mathbf{B}_s = [\mathbf{B}_s]_{2M+2}, \quad \mathbf{B}_{s, (2M+1, 2M+2)} = \mathbf{0}. \quad (27)$$

Macierz  $\mathbf{A}_s$  to macierz współczynników ze wzoru (24).

Porównując strukturę wektorów stanu ze wzorów 12 oraz 26, widać, że w wektorze  $\mathbf{x}_s$  na pozycji  $(M+1)$  występuje napięcie  $u_{C, \frac{M}{2}+1}$  związane z kondensatorem  $C_{M/2+1}$

oraz na pozycji  $(M+2)$  napięcie związane z kondensatorem przyłączonym do tego samego węzła co  $C_{M/2+1}$ . Jest to jedyna zmiana, która implikuje powstanie rozbieżności w rozkładzie elementów tworzących macierz  $\mathbf{A}_s$  względem macierzy (10). Macierz stanu ze wzoru 24 nie jest trójdiagonalna, ponieważ występują dwa dodatkowe elementy znajdujące się na przekątnych, na których wszystkie wartości liczbowe poza jedną są równe zero. Jak dotąd zakładano, że będąca obiektem zainteresowania sieć elektryczna nie jest obciążona na końcu. W celu realizacji opisu matematycznego struktury obciążonej należy wykonać czynności opisane przy omawianiu uwarunkowań związanych ze specyfiką równań 16, 17, 18, 19. Przy obciążeniu indukcyjnym rozmiar macierzy  $\mathbf{A}_s$  z równania 24 będzie równy  $2M+3$  (taki sam jak rozmiar wierszowy macierzy  $\mathbf{B}_s$ ) i przy obciążeniu rezystancyjno-pojemnościowym pozostanie bez zmian.

## 5. Implementacja sformułowanych równań w programie MATLAB

Głównym celem próby sporządzenia opisu matematycznego analizowanych układów w sposób zaprezentowany powyżej było uzyskanie możliwości modelowania stanów zakłóceń, inicjowanych przez zmiany konfiguracyjne realizowane nie tylko na zaciskach wejściowych i wyjściowych, lecz także w dowolnym węźle obwodu elektrycznego (np. w węźle o numerze  $k$  na rysunku 1). Z uwagi na dość dużą złożoność sieci, w szczególności wtedy, gdy wartość parametru  $M$  jest równa kilkadziesiąt lub kilkaset, problem uzyskania przebiegów czasowych związanych z określonym zakłóceniem sprowadza się do numerycznego rozwiązania dużego układu równań różniczkowych pierwszego rzędu. W warunkach dostępu do wyspecjalizowanego oprogramowania nie jest to istotna przeszkoda. Występujące jednak w równaniach 10, 24 macierze stanu zawierają liczne i indeksowane w dość specyficzny sposób współczynniki podlegające multiplikacji w sytuacji zwiększania wartości parametru  $M$  (liczby sekcji czwórnika elementarnego typu  $\Gamma$ ). Dodatkowo podczas implementacji drugiego ze wspomnianych równań realizowane jest połączenie trzech macierzy prostokątnych. Jedna z nich o najmniejszym rozmiarze (współczynniki tej macierzy zostały wyekspozowane we wzorze 24) musi zostać ulokowana pomiędzy dwiema pozostałymi (zawartymi w macierzy — wzór 10). Wykonuje się to w oparciu o bezbłędną realizację procedury obliczania i sytuowania współczynników, których położenie w macierzy wynikowej (macierz  $A_s$  — wzór 24) oraz wartość zostały określone na podstawie przeprowadzonego wcześniej przekształcenia wzorów. Jak widać, scharakteryzowane problemy i uwarunkowania nie sprzyjają pełnemu zaufaniu do uzyskanej do dyspozycji implementacji, wskutek czego pojawia się problem zweryfikowania uzyskanych wyników obliczeń numerycznych poprzez porównanie ich do zbioru danych dotyczących tego samego modelu, ale uzyskanych dzięki zastosowaniu innej metody. W grę nie wchodzi tutaj metoda analityczna, co uzasadnia się wysokim rzędem badanych sieci oraz uwzględnieniem w ich strukturze nie tylko elementów biernych, lecz także czynnych. W odniesieniu do równania 24 decydujący jest ponadto fakt wstawienia pomiędzy łańcuchy czwórników tego samego typu czwórnika o innej strukturze niż te, które z nim sąsiadują (rys. 2). Kończąc ten wątek, zwraca się uwagę na to, że komfort dysponowania rozwiązaniem analitycznym zwalniałby autora z konieczności stosowania metod numerycznych. Pojawia się więc pytanie: w jaki sposób można zweryfikować wyniki uzyskane dzięki implementacji równań 10, 24, 25? Pierwszym krokiem może być badanie położenia wartości własnych macierzy stanu  $A$  (wzory 10, 24 bezpośrednio na prawo od znaku równości) uzyskanych dla dużego zestawu odpowiednio dobranych danych wejściowych (RLC). W tym przypadku danymi wejściowymi są parametry poszczególnych komponentów układu — czwórników  $\Gamma$ , sekcji kompensującej, obciążenia. W praktyce jednak nie

można wykluczyć tego, że dla zastosowanych zbiorów parametrów RLC macierz stanu będzie miała wartości własne, których części rzeczywiste przyjmą wartości ujemne (co sugerowałoby stabilność układu), a dla innych dodatnie. Możliwe jest jednak wykorzystanie uwarunkowań wynikających ze specyfiki pracy sieci w stanie ustalonym przy wymuszeniu stałoprądowym. W takim wypadku można zapisać, że:

$$\frac{du_{c,k}}{dt} = 0, \quad (28)$$

$$\frac{di_{L,k}}{dt} = 0. \quad (29)$$

Równanie (4) można zapisać więc w zmodyfikowanej postaci (30):

$$\frac{1}{C_k} i_{L,k} - \frac{1}{R_{p,k} C_k} u_{c,k} - \frac{1}{C_k} i_{L,k+1} = 0, \quad (30)$$

$$i_{L,k} - \frac{1}{R_{p,k}} u_{c,k} - i_{L,k+1} = 0. \quad (31)$$

Równanie (31) powstało poprzez obustronne pomnożenie równania 30 przez  $C_k$ . Jeżeli przyjmie się, że  $R_{p,k}$  jest rzędu kilku  $M\Omega$  ( $R_{p,k} \gg R_k$  — 7, 8 rzędów wielkości), co jest uzasadnione, ponieważ reprezentuje ono rezystancję upływu linii, to można zapisać, że:

$$i_{L,k} = i_{L,k+1}. \quad (32)$$

Po włączeniu badanego układu do źródła napięcia stałego, po zaniku stanu nieustalonego prądy pojemnościowe gałęzi poprzecznych będą równe zero, poprzeczne prądy rezystancyjne tych gałęzi będą pomijalnie małe ( $1/R_{p,k} = 0$ ), w związku z tym prąd wpływający do każdego z węzłów będzie taki sam jak wypływający (prądy  $i_{L,k}$  oraz  $i_{L,k+1}$  reprezentują gałąź podłużną).

Równanie (32) dla węzła o numerze  $M$  i po zaniku stanu nieustalonego (wzór 28) ma postać:

$$i_{L,M} = 0. \quad (33)$$

Wynika to z I prawa Kirchoffa, ponieważ:

$$i_{L,M} = C_M \frac{du_{C,M}}{dt} + \frac{1}{R_{p,M}} u_{C,M}. \quad (34)$$

Drugi składnik sumy reprezentuje prąd upływu i ze względu na bardzo dużą wartość parametru  $R_{p,M}$  jest możliwy do pominięcia, natomiast pierwszy składnik w warunkach takich jak rozpatrywane będzie równy zero.

Równocześnie dla węzła o numerze  $M-1$  można zapisać, że:

$$i_{L,M-1} = i_{L,M} + C_k \frac{du_{c,k}}{dt} + \frac{1}{R_{p,k}} u_{C,M-1} = 0. \quad (35)$$

Tę samą procedurę można powtórzyć dla wszystkich węzłów sieci elektrycznej, co finalnie można zapisać jako:

$$i_{L,k} = 0 \text{ dla } k = 1, 2, \dots, M. \quad (36)$$

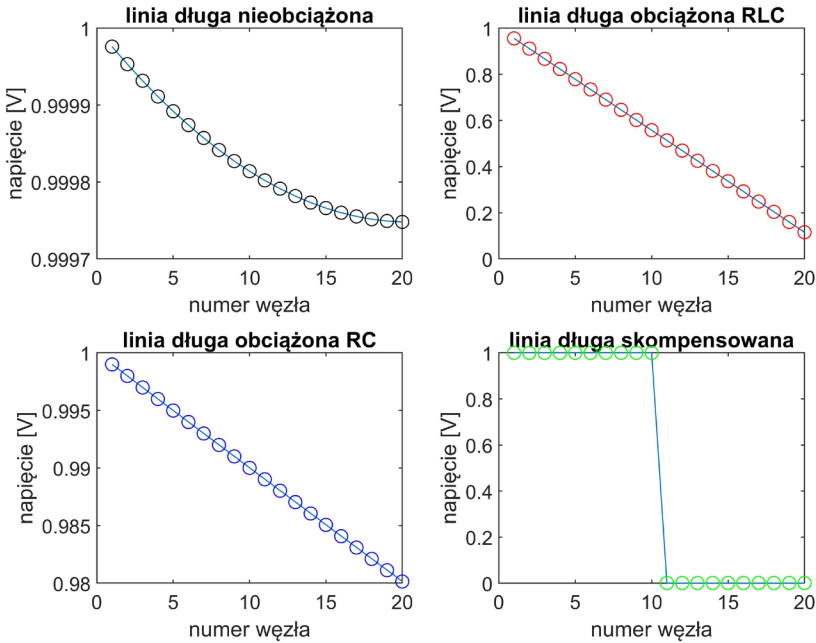
Ostatecznie więc w rozpatrywanych warunkach (stan ustalony, wymuszenie stałoprądowe) wszystkie prądy w obwodzie będą równe zeru.

Dodatkowo równanie 36 implikuje

$$u_{c,k-1} = u_{c,k}, \quad (37)$$

co można uzyskać, podstawiając do równania 3 równanie 36 i pamiętając o tym, że dla podanych warunków lewa strona jest równa zeru.

W przypadku bardziej złożonych sieci elektrycznych procedura analogiczna do tej bazującej na równaniach 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37 może być trudna do wdrożenia. Pobieżna analiza tej metody pozwala dojść do wniosku, że w stanie ustalonym napięcia na cewkach oraz prądy kondensatorów są równe zeru (napięcie na kondensatorze jest wprost proporcjonalne do 28, prąd płynący przez cewkę do 29). Jest to równoznaczne zastąpieniu elementów pojemnościowych przerwą oraz elementów indukcyjnych zwarciami. Prowadzi to do modyfikacji pierwotnego schematu i uzyskania sieci rezystancyjnej łatwej do analizy z wykorzystaniem np. metody potencjałów węzłowych. Porównanie napięć węzłowych z odpowiadającymi im napięciowymi zmiennymi stanu uzyskanymi w oparciu o symulację w dziedzinie czasu (dla zakresów reprezentujących stan ustalony) może być punktem wyjścia do uzyskania odpowiedzi na pytanie o poprawność opisu matematycznego badanego obwodu elektrycznego oraz jego implementacji. Odpowiednie zestawienie wyników przedstawiono na rysunku 3. Każda z sekcji zawiera dwa zbiory danych związane z siecią elektryczną, której nazwa znajduje się w opisie. Dane wygenerowane z wykorzystaniem metody węzłowej wykreślono linią ciągłą. Okręgiem natomiast zobrazowano zbiór uzyskany dzięki zastosowaniu niejawniej zagnieżdżonej metody Rungego-Kutty rzędu czwartego (20 elementów reprezentujących stan ustalony w każdym z węzłów, zakres czasowy na tyle długi, aby spełnione było założenie o zaniku składowej niestalanej). Jak widać, wyniki pokrywają się w pełnym zakresie zmienności argumentu. Za gwałtowną zmianę wartości napięcia z 1 V do bliskiej 0 V, obserwowaną w sekcji ulokowanej w prawym dolnym rogu, odpowiada kondensator szeregowy (rys. 2) stanowiący przerwę dla składowej stałej.



Rys. 3. Weryfikacja modeli matematycznych w stanie ustalonym

## 6. Przykładowe wyniki symulacji komputerowych

Aby określić właściwości uzyskanych rozwiązań, opracowano zaimplementowane w środowisku Matlab programy komputerowe służące do generowania macierzowej reprezentacji układów równań różniczkowych opisujących właściwości będące obiektem zainteresowania publikacji dotyczących sieci elektrycznych. Dokonano również wyboru schematu różnicowego, którego zadaniem było wyznaczenie kolejnych wartości przybliżonego rozwiązania w wybranych punktach zmiennej niezależnej (czasu). Zastosowano niejawną, zagnieżdżoną metodę Rungego-Kutty [10], co uzasadnia się właściwościami rozwiązania cechującego się występowaniem składowych sinusoidalnych tłumionych wykładniczo (modów) charakteryzowanych mocno różniącymi się czasami zanikania (kilka rzędów wielkości). Występowanie tych okoliczności potwierdziła analiza wartości własnych macierzy stanu (8), (15), a także ich modyfikacji związanych z realizacją równań 16, 17, 18, 19, opisujących dynamikę poddanych analizie modeli układów elektrycznych. Będący miarą sztywności [1] układu równań różniczkowych iloraz (38)

$$\frac{\operatorname{Re}\{\lambda_{\max}\}}{\operatorname{Re}\{\lambda_{\min}\}}, \quad (38)$$

gdzie:  $\lambda_{\max}$  — wartość własna macierzy stanu (10) lub (24) leżąca najdalej od osi urojonych w lewej półpłaszczyźnie,  
 $\lambda_{\min}$  — wartość własna macierzy stanu (10) lub (24) leżąca najbliżej od osi urojonych w lewej półpłaszczyźnie,  
 przyjmował wartości rzędu  $10^7$ .

W odniesieniu do zastosowanego schematu różnicowego zadano wartość parametru tolerancji błędu względnego równą 0,00001 oraz błędu absolutnego 0,001.

Do obliczeń testujących wybrano linię długą jednorodną o następujących parametrach:

$$R_1 = R_2 = \dots = R_{249} = R_{250} = 0,2 \Omega/\text{km},$$

$$L_1 = L_2 = \dots = L_{249} = L_{250} = 2 \text{ mH}/\text{km},$$

$$C_1 = C_2 = \dots = C_{249} = C_{250} = 9 \text{ nF}/\text{km},$$

$$R_{p,1} = R_{p,2} = \dots = R_{p,249} = R_{p,250} = 20 \text{ M}\Omega$$

długości  $l = 250 \text{ km}$  i rezystancji obciążenia  $R_0 = 250 \Omega$ , przy wymuszeniu sinusoidalnym.

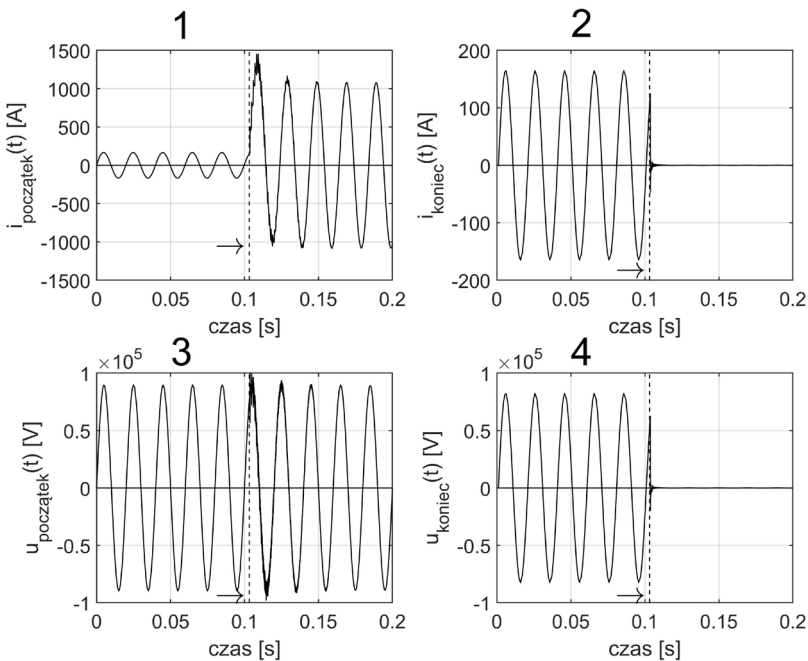
W związku z tym model matematyczny sieci elektrycznej poddanej analizie opisany był układem zawierającym 500 równań różniczkowych pierwszego rzędu (dwa elementy bierne w sekcji). Zamodelowano zwarcie jednofazowe (konduktancja zwarcia 10 S), które wystąpiło po 103,2 ms od rozpoczęcia symulacji na końcu sekcji o numerze 125. W oparciu o realizację symulacji komputerowej dla stanu ustalonego ( $0 < t < t_z$ ,  $t_z = 103,2 \text{ ms}$ ) uzyskano warunek początkowy (39):

$$\mathbf{x}_z(0) = \begin{bmatrix} i_{l,1}(0) \\ u_{c,1}(0) \\ i_{l,2}(0) \\ u_{c,2}(0) \\ \dots \\ i_{l,250}(0) \\ u_{c,250}(0) \end{bmatrix}, \quad (39)$$

gdzie:  $i_{L,1}(0), u_{c,1}(0), \dots, i_{L,250}(0), u_{c,250}(0)$  — uporządkowane parami prądy cewek oraz napięcia kondensatorów sekcji o numerach od 1 do 250 w chwili  $t_z = 103,2 \text{ s}$ .

Uzyskano rozwiązanie reprezentujące przybliżone wartości chwilowe prądów i napięć ulokowane w macierzy o rozmiarze wierszowym równym 225952 (1848 dla stanu przed zwarciem) oraz kolumnowym równym 500 i zmiennej niezależnej zawierającej uszeregowane rosnąco 225952 wartości liczbowe. Zwarcie symulowano dla przedziału czasowego o długości 96,8 ms ( $t_{\max} = t_z + 96,8 \text{ ms} = 200 \text{ ms}$ ,  $t_{\max}$  — łączny czas symulacji stanu przed zwarciem oraz po zwarciu). Obliczenia zrealizowano w czasie 12 minut (na komputerze z procesorem jednordzeniowym taktowanym zegarem o częstotliwości 2 GHz, Windows 10 Home, 8 GB pamięci RAM).

Na rysunku 4 przedstawiono wykresy prądów i napięć dla opisanego przypadku.



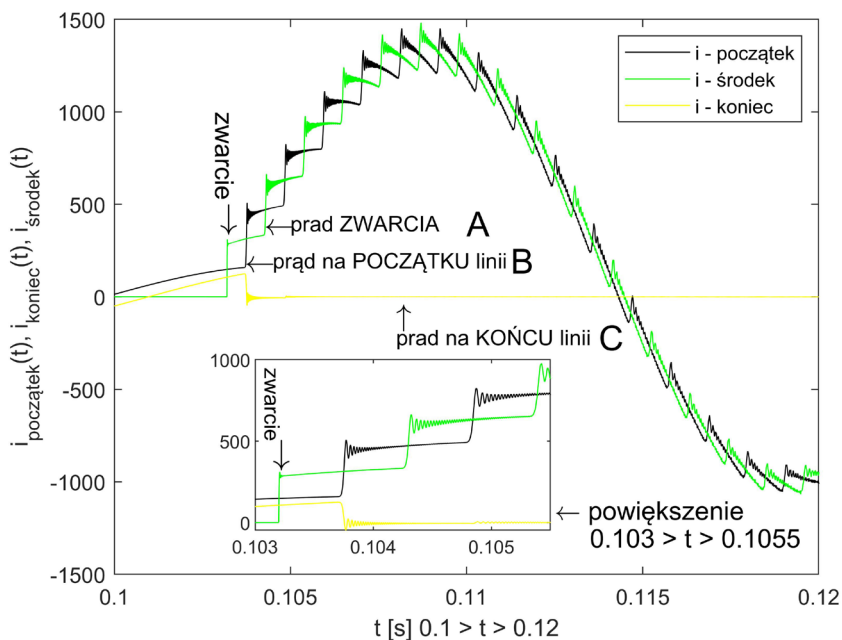
Rys. 4. Przebiegi prądów na początku i końcu linii długiej (odpowiednio sekcja nr 1, 2), przebiegi napięć na początku i końcu linii długiej (odpowiednio sekcja nr 3, 4). Zwarcie jednofazowe na środku linii

## 7. Wnioski

W artykule zawarto szczegółowy opis procedury prowadzącej do uzyskania opisu matematycznego kilku rodzajów linii długich, m.in. linii obciążonej na końcu, jak również z kompensacją wzdłużną realizowaną z wykorzystaniem elementu pojemnościowego. Punktem wyjścia do badań symulacyjnych było przekształcenie



równań wynikających z praw Kirchoffa. Następnym krokiem jest zdefiniowanie poszczególnych członów macierzy definiujących formuły 8, 25 i implementacja programów komputerowych umożliwiających uzyskanie ich reprezentacji właściwej do wykorzystania przez procedury całkowania numerycznego równań różniczkowych dostępne w środowisku Matlab.



Rys. 5. Przebiegi prądów podczas zwarcia

Uzyskane przebiegi potwierdzają występowanie procesów falowych podczas zwarcia. Nastąpiło ono w chwili  $t = 103,2$  ms (pionowa strzałka pod napisem „zwarcie”). Obserwowana jest szybka zmiana wartości prądu z poziomu bliskiego zeru do poziomu 250-300 A (przebieg — prąd zwarcia A). Następnie po czasie bliskim 500  $\mu$ s podobny efekt zauważalny jest w odniesieniu do dwóch pozostałych przebiegów (prąd na początku linii B, prąd na końcu linii C) opisujących zmiany wartości chwilowej prądu na końcu i początku linii. Odzworowany numerycznie proces świadczy o dotarciu fali prądowej do końców linii w tym samym momencie, co jest uzasadnione z uwagi na inicjację stanu zwarciovego w środkowym węźle sieci (w sekcji o numerze 125 ten sam czas dojścia fali do początku oraz końca linii). Dla innych wartości parametru  $l$  wartość maksymalna składowej ustalonej prądu zwarcia zmieniała się proporcjonalnie do długości linii. Z przedstawionego wyżej opisu rysunków 4 i 5 wynika, że model prawidłowo odwzorowuje zjawiska

występujące w linii długiej i może być wykorzystywany m.in. do weryfikacji innych modeli symulacyjnych dostępnych m.in. w pakiecie Simulink.

Artykuł finansowany z PBS nr 887/2019.

Artykuł wpłynął do redakcji 25.09.2019 r. Zweryfikowaną wersję po recenzjach otrzymano 3.02.2020 r.

Piotr Figoń <https://orcid.org/0000-0001-8604-3375>

#### LITERATURA

- [1] *Komputerowa analiza układów elektronicznych*, WNT, Warszawa 1981.
- [2] VAN THIELEN B., VANDENBOSCH G., *Fast transmission line coupling calculation using a convolution technique*, IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility, vol. 43, no 1, 2001, s. 11-17.
- [3] HIZAWA Y., KUROBE H., SEKINE T., ASAI H., *Nonlinear block latency insertion method for fast simulation of strongly coupled network with CMOS inverters*, 2011 IEEE Electrical Design of Advanced Packaging and Systems Symposium (EDAPS), Conference Paper, 2011.
- [4] WEI-SHIN CHANG AND CHI-YANG CHANG, *A high slow-wave factor microstrip structure with simple design formulas and its application to microwave circuit design*, IEEE Trans. Microw. Theory Tech., vol. 60, no.11, 2012, pp. 3376-3383.
- [5] TAKASAKI T., SEKINE T., ASAI H., *Fast Transient Analysis of Nonuniform Multiconductor Transmission Lines Using HIE-Block-LIM*, IEEE Microwave and Wireless Components Letters, vol. 23, no.10, 2013.
- [6] GUSTAVSEN B., *Modal domain-based modeling of parallel transmission lines with emphasis on accurate representation of mutual coupling effects*, IEEE Trans. Power Delivery, vol. 27, 4, 2012, 2159-2167.
- [7] NOVITSKIY A., WESTERMANN D., *Some aspects of steady state simulations of AC/DC hybrid transmission lines*, 2017 IEEE International Conference on Environment and Electrical Engineering and 2017 IEEE Industrial and Commercial Power Systems Europe (EEEIC/ I & CPS Europe), Conference Paper, 2017.
- [8] RAI J.N., JAHANGIR A., HOQUE I., *Digital simulation of distance relay for long transmission line*, 2017 4th IEEE Uttar Pradesh Section International Conference on Electrical, Computer and Electronics (UPCON), Conference Paper, 2017.
- [9] *Zone Protection System of Transmission Line by Distance Relay using Matlab/Simulink*, 2018 International Conference on Advancement in Electrical and Electronic Engineering (ICAEEEE), Conference Paper, 2018.
- [10] KABZIŃSKI J., KACERKA J., KRAWIECKI M., MARZJAN K., MOSIOŁEK P., ZAWIŚLAK R., *Zwięzy kursu analizy numerycznej*, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Warszawa 2018.
- [11] KRZYŻANOWSKI P., *Obliczenia naukowe i inżynierskie*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2019.
- [12] PRATAP R., *Matlab dla naukowców i inżynierów*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2019.

P. FIGOŃ

### **Mathematical models of single-phase long lines**

**Abstract.** Most simulation packages provide long line models containing only two input terminals and two output terminals. These models allow testing transient states initiated by the occurrence of interference at the ends of the line. For this reason, it is not possible to study disorders occurring at any point of the electrical network. The article describes in detail the mathematical models of the long line, their implementation in the Matlab environment and exemplary results of computer simulations.

**Keywords:** power line, state variables, differential scheme.

**DOI:** 10.5604/01.3001.0013.9735

