
Inżynieria Bezpieczeństwa Obiektów Antropogenicznych

STABILNOŚĆ ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIA BRZEGOWEGO NIESTACJONARNEGO PROFILU TEMPERATURY W PRZEGRODZIE BUDOWLANEJ

Mariusz OWCZAREK,
Weronika RADZIKOWSKA-JUŚ
Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

Streszczenie

Jedną z uniwersalnych a zarazem prostych metod dla numerycznego rozwiązywania zadań nieustalonego przewodzenia ciepła w obudowie budynku jest metoda objętości skończonych. Jednak, przy sformułowaniu jawnym konieczne jest dobranie kroku czasowego, gwarantującego stabilność rozwiązania. W tym artykule wartość takiego kroku czasowego została określona z warunku zerowej różnicy pomiędzy teoretycznym a numerycznym rozwiązaniem dla danej geometrii ściany. Rozpatrzono wpływ współczynnika przewodzenia ciepła ściany na długość kroku. Warunki brzegowe przyjęte w artykule odpowiadały obciążeniom ogniowym ściany schronu.

Słowa kluczowe: przewodzenie ciepła, krok czasowy, metoda objętości skończonych.

Abstract

One of the most simple and versatile method for numeric solving of the problems of transient heat conduction in the building envelope is the finite volume method. In explicit scheme however there is a problem of assuming correct time step for solution stability. In this article stable step value was determined from the condition of zero difference between the theoretical and numerical solution for the particular geometry of the wall. The influence of the thermal conductivity on the step length has been evaluated. Condition for the correctness of solutions obtained from the analysis in this article is sharper than the condition of equations stability according to the literature. For the boundary conditions adopted solution can be applied to the study of resistance of buildings shelters to long fire.

Key words: heat transfer, time step, finite volume method.

1. NIESTACJONARNY ROZKŁAD TEMPERATURY W ŚCIANIE

Rozkład temperatury w przypadku jednowymiarowego nieustalonego przewodzenia ciepła jest opisany równaniem różniczkowym Fouriera.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

gdzie: $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ - dyfuzyjność termiczna

Zewnętrzna krawędź ściany o temperaturze początkowej T_s styka się z gazem o temperaturze T_p , warunek brzegowy można zapisać:

$$q_s = \alpha(T_s - T_p) \quad (1.2)$$

Zakładamy że ściana jest jednowarstwowa. Niech $T_p > T_s$, wtedy ściana będzie się ogrzewać. Jeśli ściana ma znaczą grubość to można przez pewien czas trwania procesu traktować ją jako przestrzeń półnieskończoną. Założenie to będzie prawdziwe do momentu aż front podwyższonej temperatury nie dotrze do wewnętrznej krawędzi ściany. Dla takiego przypadku znane jest rozwiązanie analityczne [1],[3]

$$\frac{T - T_s}{T_p - T_s} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) - \exp\left(\frac{\alpha}{\lambda}x + \frac{\alpha^2 a}{\lambda^2}t\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + \frac{\alpha}{\lambda}\sqrt{at}\right) \quad (1.3)$$

Problem może być też rozwiązany wieloma metodami numerycznymi. Ze względu na prostotę użycia i dokładność zadawania warunków brzegowych wybrano metodę objętości skończonych. Zasada metody polega na bilansowaniu strumieni ciepła w każdym elemencie. Zmiana entalpii elementu w przedziale czasu Δt jest równa bilansowi strumieni ciepła wymienianego przez granicę elementu i wewnętrznych źródeł ciepła. Jeśli nie ma przemian fazowych, ciśnienie jest stałe oraz układ nie wykonuje pracy to entalpia jest jednoznacznie określona od temperatury. Ścianę podzielono na elementy o jednakowej szerokości. Bilans ciepła elementu i-tego w chwili czasowej n-tej określa wzór

$$\frac{m_i c_{pi} (T_i^n - T_i^{n-1})}{\Delta t} = Q_{el} \quad (1.4)$$

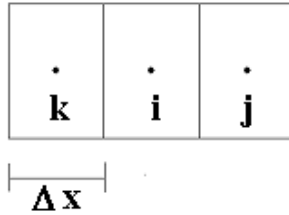
gdzie Q_{el} jest sumą strumieni ciepła przez granicę elementu
Ze wzoru (1.4) można w bezpośredni sposób wyznaczyć temperaturę w aktualnej chwili czasowej mając temperatury w chwili poprzedniej.

$$T_i^n = T_i^{n-1} + \frac{Q_{el}}{m_i c_i} \Delta t \quad (1.5)$$

Schemat jawny jest łatwy do implementacji ale wymaga odpowiedniego kroku czasowego. Długość tego kroku jest ograniczona od góry, powyżej pewnej wartości rozwiązanie jest niestabilne.

2. STABILNOŚĆ SCHEMATU JAWNEGO METODY OBJĘTOŚCI SKOŃCZONYCH (MOS)

Klasyczny warunek stabilności metody można wyprowadzić z założenia fizycznej poprawności równań różnicowych [2]. Przy jednowymiarowym podziale na elementy o szerokości Δx w analizowanej ścianie jak na rysunku 2.1



Rys 2.1 Podział na objętości skończone

Równanie (1.4) można w takim przypadku zapisać w postaci

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{K_{ki}\Delta t}{m_i c_{pi}} (T_k^n - T_i^n) + \frac{K_{ji}\Delta t}{m_i c_{pi}} (T_j^n - T_i^n) \quad (2.1)$$

gdzie: K_{ki} , K_{ji} są przewodnościami cieplnymi odpowiednio między elementami k, i oraz j, i.

Następnie przekształcamy równanie (2.1) tak aby otrzymać współczynniki przy poszczególnych temperaturach. Żaden z tych współczynników nie może być ujemny bo oznaczałoby to spadek temperatury w elemencie i przy wzroście w sąsiednich co jest nie fizyczne. Po przekształceniu równania (2.1) można wykazać że tylko jeden ze współczynników stojący przy temperaturze T_i mógłby przybrać wartość ujemną. Zapisując warunek że musi on być większy od zera mamy:

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{m_i c_{pi}} (K_{ki} + K_{ji}) \right) > 0 \quad (2.2)$$

Stąd warunek na krok czasowy Δt

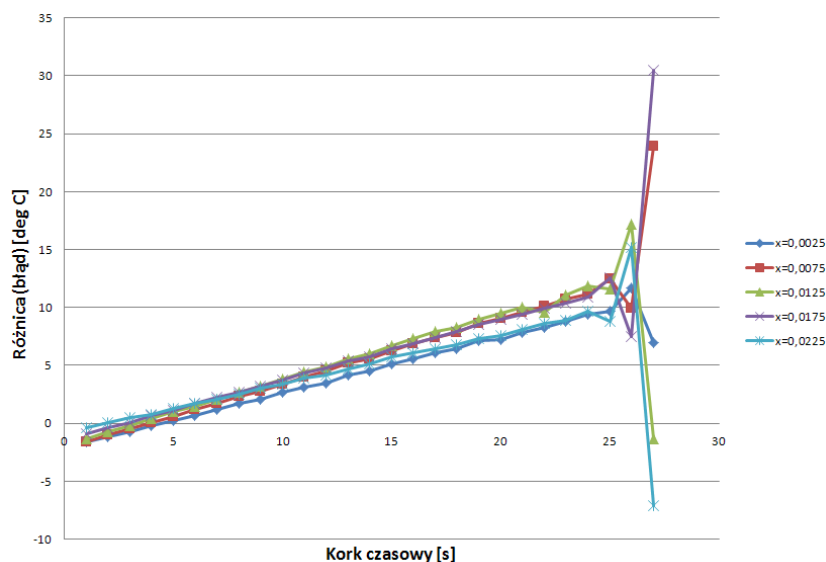
$$\Delta t < \frac{m_i c_{pi}}{K_{ki} + K_{ji}} \quad (2.3)$$

Ponieważ znane jest rozwiązanie teoretyczne określone wzorem (1.3) można zaproponować warunek stabilności polegający na równości rozwiązania numerycznego T_{ni} i teoretycznego T_{ti} w danej chwili czasu.

$$T_{ii}(t) = T_{ni}(t) \quad (2.4)$$

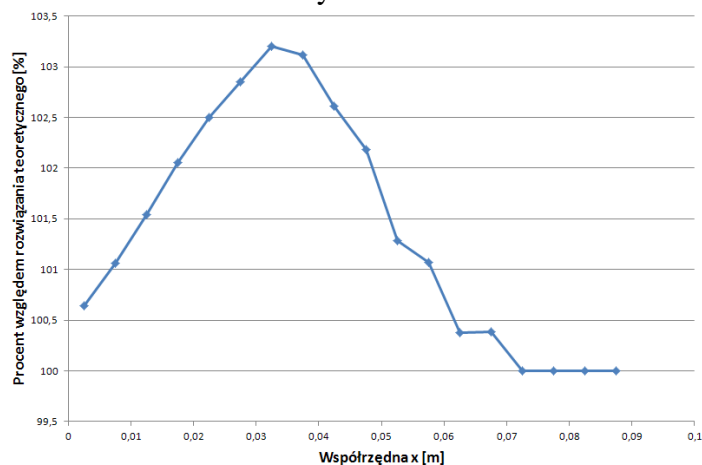
2. ANALIZA STABILNOŚCI WEDŁUG PROPONOWANEGO KRYTERIUM

W pierwszym etapie analizy wykonano obliczenia za pomocą MOS stosując kroki czasowe od 1 sekundy do 29 sekund. Założono że materiał ściany ma współczynnik $\lambda=0,35$ W/(mK), gęstość $\rho=700$ kg/m³ i ciepło właściwe 1000 J/(kgK). Współczynnik przyjmowania ciepła między powietrzem a ścianą $\alpha=25$ W/(m²K). Szerokość elementów Δx wynosiła 0,005 m. Teoretyczny, porównawczy przebieg temperatury otrzymano z równania (1.3). Obliczono błąd zdefiniowany jako (2.4) w punktach odpowiadających węzłom kolejnych elementów bilansowych. Wykresy błędów dla wybranych długości kroków przedstawia rysunek 3.1.



Rys 3.1. Różnica między rozwiązaniem teoretycznym i numerycznym dla różnych głębokości w ścianie

Z powodu czytelności rysunku wykreślono wartości dla korków czasowych od 1 do 27 sekund. Widoczne są dwa przedziały o różnym charakterze zmienności błędu. W pierwszym przedziale błąd rośnie w sposób niemal liniowy, w drugim zaś następuje gwałtowna utrata stabilności i skok błędu. Dla konkretnego kroku czasowego z pierwszego przedziału trudno jest oszacować błąd nie mając porównania z rozwiązaniem teoretycznym. Dopiero przekraczając graniczny krok, tutaj około 25 sekund, błędy w rozwiązaniu stają się widoczne. Jednak dla takiego kroku pozornie poprawne wyniki mogą być już obarczone błędem rzędu 10 °C. Porównajmy wyniki z maksymalnym krokiem czasowym ze wzoru (2.3) z rozwiązaniem teoretycznym. Dla przyjętych parametrów fizycznych i wymiarów elementów otrzymujemy $\Delta t=12,3$ sekundy. Rysunek 3.2 przedstawia różnicę w procentach pomiędzy rozwiązaniem teoretycznym a numerycznym dla czasu 492 sekundy dla kolejnych współrzędnych x w głąb ściany. Zastosowano krok czasowy $\Delta t=12$ sekund.



Rys 3.2. Stosunek wartości numerycznej do teoretycznej w procentach – wyjaśnienie w tekście

Z rysunku 3.1 widać że zerowa różnica pomiędzy wynikiem teoretycznym i numerycznym występuje przy kroku czasowym mniejszym niż 5 sekund. Wartość tego kroku jest też zależna od głębokości w ścianie. W dalszym ciągu analizowano wartości

kroku czasowego dla którego różnica temperatury teoretycznej i numerycznej wynosi zero dla różnych wartości współczynnika przewodzenia ciepła.

3. ZALEŻNOŚĆ WARTOŚCI STABILNEGO KROKU CZASOWEGO OD WSPÓLCZYNNIKA PRZEWODZENIA CIEPŁA MATERIAŁU

Obliczono długość kroku czasowego Δt_0 dla którego błąd przybiera wartość zero dla czterech wartości współczynnika przewodzenia ciepła i trzech wartości współrzędnej x . Przyjęte wartości x wynikają z szerokości elementów objętości skończonych, która jak poprzednio wynosiła $\Delta x=0,005$. Ponieważ rozmiary elementów mają wpływ na stabilny krok czasowy otrzymane wyniki są ważne dla przyjętego Δx . Dla porównania obliczono maksymalny krok czasowy według wzoru (2.3). Wyniki zestawiono w tabeli 4.1.

TABELA 4.1

Krok czasowy Δt z zerowym błędem dla wybranych wartości współczynnika przewodzenia ciepła i współrzędnej x

Współczynnik λ	0,35	0,45	0,55	0,65
Maksymalny Δt [s]	12,5	9,7	8	6,7
Δt_0 ($x=0,0025$ m) [s]	4,5	3,2	2,5	2,25
Δt_0 ($x=0,0075$ m) [s]	3,83	3	2,2	1,83
Δt_0 ($x=0,0125$ m) [s]	3,33	2,6	2	1,67

4. WNIOSKI

Warunek równości rozwiązań daje zawsze ostrzejsze wymagania co do maksymalnej długości kroku czasowego. Z warunku stabilności krok zależy tylko od właściwości elementu to znaczy jest stały w obszarze jednorodnego materiału ze stałym podziałem siatki. Dla warunku przedstawionego w pracy krok zmienia się dla kolejnych elementów w jednowarstwowej ścianie. Zależy więc nie tylko od właściwości elementów ale też od lokalnych warunków wymiany ciepła. Zaletą schematu jawnego jest przede wszystkim elastyczność i łatwość formułowania zadania co przekłada się na czas potrzebny do uzyskania rozwiązania. Jednak warunkiem użyteczności otrzymanych wyników jest przyjęcie odpowiedniego kroku czasowego. Maksymalna długość kroku dla której nie następuje jeszcze widoczna niestabilność nie gwarantuje dużej dokładności wyników.

Warunek stabilności równań jest lepszym kryterium aczkolwiek również wyniki mogą być obarczone błędem rzędu kilku punktów procentowych. Dobierając krok według kryterium z artykułu otrzymamy wyniki zgodne z rozwiązaniem teoretycznym w wybranym punkcie, w pozostałych mogą one posiadać pewien błąd. Zagadnienie doboru kroku jest więc skomplikowane i wymaga dalszych badań.

Literatura

1. Wiśniewski S., Wiśniewski S.W., *Wymiana ciepła*, WNT, Warszawa, 2009.
2. Szargut J.(red.), *Modelowanie numeryczne pól temperatury*, WNT 1992
3. Taler J., Duda P., *Rozwiązywanie prostych i odwrotnych zagadnień przewodzenia ciepła*, WNT 2003.