

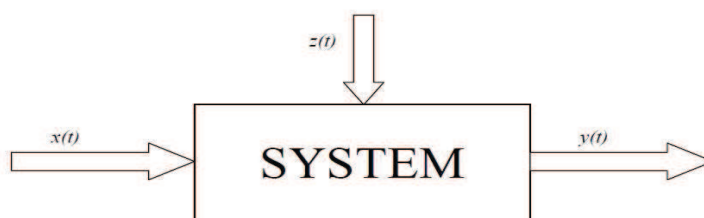
Jan PURCZYŃSKI*
Jakub PEKSIŃSKI*
Grzegorz MIKOŁAJCZAK*

WYZNACZANIE TRANSMITANCJI Z WYKORZYSTANIEM ODPOWIEDZI SKOKOWEJ W OBECNOŚCI ZAKŁÓCEŃ

W pracy rozpatrzono zagadnienie identyfikacji układu dynamicznego opisanego równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu n bazujące na zmodyfikowanej metodzie momentów. Klasyczna metoda momentów wykorzystuje odpowiedź impulsową układu, natomiast w referacie, proponuje się sposób wykorzystania metody momentów dla odpowiedzi skokowej, bez konieczności różniczkowania numerycznego.

1. WSTĘP

Identyfikacja systemów jest gałęzią modelowania systemów dynamicznych, w której model jest utworzony za pomocą danych eksperymentalnych [1]. Proces ten może być schematycznie przedstawiony tak jak na rysunku 1, w którym zachowanie się układu $y(t)$ wyznaczają sygnały wejściowe $x(t)$ oraz zakłócenia $z(t)$. Temu problemowi poświęcono wiele publikacji (np.[2,3]).



Rys. 1. Układ dynamiczny z sygnałem wejściowym $x(t)$, wyjściowym $y(t)$ i zakłóceniem $z(t)$, gdzie t oznacza czas [4]

Istniejące metody identyfikacji można ogólnie podzielić na metody identyfikacji własności statycznych i dynamicznych wśród których można wyszczególnić metody: analityczne, czasowe, częstotliwościowe, korelacyjne, regresyjne, aproksymacji stochastycznej, decyzji statystycznych [1].

* Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie.

Klasyczną metodą identyfikacji transmitancji operatorowej postaci (1), jest metoda momentów bazująca na odpowiedzi impulsowej układu $g(t)$ [4, 5]

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + 1} \quad \text{gdzie } n > m \quad (1)$$

Wychodząc ze związku:

$$G(s) = \int_0^T g(t) \cdot e^{-st} dt \quad (2)$$

gdzie: T – czas obserwacji, oraz dokonując rozwinięcia w szereg potęgowej funkcji e^{-st} , otrzymuje się:

$$G(s) = m_0 - s m_1 + \frac{s^2}{2!} m_2 - \frac{s^3}{3!} m_3 + \dots \quad (3)$$

gdzie m_k jest momentem rzędu k opisanym wzorem:

$$m_k = \int_0^T t^k \cdot g(t) dt \quad (4)$$

Z porównania wzorów (1) i (3) otrzymuje się następujący układ równań:

$$b_j = (-1)^j \cdot \frac{m_j}{j!} + (-1)^{j-1} \frac{m_{j-1}}{(j-1)!} a_1 + \dots - m_1 a_{j-1} + m_0 a_j \quad (5)$$

gdzie $b_j = 0$ dla $j > m$ oraz $a_j = 0$ dla $j > n$.

Z układu równań wyznacza się wartości współczynników a_j i b_j .

Stosowanie metody momentów wymaga (wzór (4)) znajomości odpowiedzi impulsowej układu $g(t)$.

W przypadku, gdy dana jest odpowiedź skokowa układu $h(t)$, odpowiedź impulsową wyznacza się ze wzoru

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} \quad \text{gdzie } h(0) = 0 \quad (6)$$

W celu ograniczenia wpływu zakłócenia na wynik różniczkowania numerycznego, stosuje się następującą zależność

$$h'_n = \frac{3}{M \cdot (M+1) \cdot (2M+1)} \cdot \sum_{i=-M}^M i \cdot h_{n+i} \quad (7)$$

Pomimo zastosowania wzoru (7), w przypadku dużego poziomu zakłócenia otrzymuje się wartości pochodnej obarczone dużym błędem, uniemożliwiającym stosowanie metody momentów.

W pracy proponuje się sposób umożliwiający zastosowanie metody momentów dla odpowiedzi skokowej $h(t)$, bez konieczności różniczkowania numerycznego. Stosując do wzoru (4) metodą całkowania przez części oraz zależność

$$h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau \quad (8)$$

otrzymuje się

$$m_k = T^k \cdot h(T) - k \cdot \int_0^T h(t) \cdot t^{k-1} dt \quad (9)$$

Dokonując przekształcenia

$$T^k \cdot h(T) = h(T) \cdot \int_0^T k \cdot t^{k-1} dt$$

wzór (9) przyjmuje postać

$$m_k = k \cdot \int_0^T t^{k-1} \cdot [h(T) - h(t)] dt \quad \text{gdzie } m_0 = h(T), k = 1, 2, \dots \quad (10)$$

2. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Zakłada się, że układ opisany jest transmitancją $G(s)$:

$$G(s) = \frac{7s^2 + 5s + 6}{62,5 \cdot s^4 + 112,5 \cdot s^3 + 62,5 \cdot s^2 + 13,5 \cdot s + 1} \quad (11)$$

Transmitancji (11) odpowiada odpowiedź impulsowa $g(t)$:

$$g(t) = -\frac{1}{3} \exp(-t) + \frac{11}{25} \exp(-0,2 t) \cdot \left(\frac{6}{5} t - 7 \right) + \frac{256}{75} \exp(-0,4 t) \quad (12)$$

oraz odpowiedź skokowa $h(t)$:

$$h(t) = 6 + \frac{1}{3} \exp(-t) + \frac{11}{5} \exp(-0,2 t) \cdot \left(1 - \frac{6}{5} t \right) - \frac{128}{15} \exp(-0,4 t) \quad (13)$$

Obliczenia wykonano dla dwóch czasów obserwacji $T=37$ i $T=41$. Wartości odpowiedzi skokowych $h(T=37)$ i $h(T=41)$ różnią się od wartości ustalonej ($h(\infty)=6$) odpowiednio $0,1\%$ oraz $0,5\%$. Ponieważ odpowiedź skokowa jest uzyskana na drodze pomiaru, założono jej postać:

$$h_n = h(t_n) \quad \text{gdzie } t_n = T \cdot \frac{n}{N}, n = 0, 1, \dots, N \quad (14)$$

Przy obliczaniu całki występującej we wzorze (10) zastosowano metodę trapezów i metodę Simpsona [6]. Przy liczbie punktów $N=100$ metoda Simpsona zapewnia wyniki o dużej dokładności (błąd wartości współczynników a_j i b_j nie przekracza $0,03\%$), natomiast metoda trapezów prowadzi do błędów względnego współczynników rzędu 7% . W celu utrudnienia zadania identyfikacji transmitancji (11) założono wartość (wzór (1)) $n \leq 3$. Przyjęcie $n=4$ prowadzi do wzoru (11) z błędem wynikającym ze skończonego czasu obserwacji. Dla $n=2$ uzyskano wyniki obarczone dużym błędem. Stąd szczegółowo rozpatrzono przypadek $n=3$, tzn. model postaci:

$$GM(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + 1} \quad (15)$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 G0(s) & \text{ dla } b_2 = b_1 = 0 \text{ we wzorze (15)} \\
 G1(s) & \text{ dla } b_2 = 0 \text{ we wzorze (15)} \\
 G2(s) & \text{ – wzór (15)}
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Stosując metodę Simpsona, wykonano całkowanie zgodnie ze wzorem (10). Następnie rozwiązano układ zgodnie ze wzorem (10). Następnie rozwiązano układ równań (5) dla poszczególnych modeli (16). Dla wyznaczonych modeli określono przebiegi odpowiedzi impulsowych $g0(t)$, $g1(t)$, $g2(t)$ oraz odpowiedzi skokowych $h0(t)$, $h1(t)$, $h2(t)$. W celu oceny uzyskanych wyników określono błędy:

$$\Delta gM = \sqrt{\int_0^{41} (gM(t) - g(t))^2 dt} \quad \Delta hM = \sqrt{\int_0^{41} (hM(t) - h(t))^2 dt}
 \tag{17}$$

Wartości błędów zamieszczono w tabeli 1.

Tabela 1. Wartości błędów określonych zależnościami (17) modelu (11) dla różnych czasów obserwacji

	T=37	T=41
$\Delta h0$	0.1406	0.1214
$\Delta h1$	0.1069	0.0779
$\Delta h2$	0.1150	0.1114
$\Delta g0$	0.0586	0.0593
$\Delta g1$	0.0359	0.0321
$\Delta g2$	0.0501	0.0560

Jak wynika z tab.1, najmniejszym błędem obarczony jest model $G1(s)$. Dla czasu obserwacji $T=37$, transmitancja $G1(s)$ wyraża się wzorem

$$G1(s) = \frac{7,78 \cdot s + 5,94}{120,77 \cdot s^3 + 67,63 \cdot s^2 + 13,68 \cdot s + 1}
 \tag{18}$$

3. IDENTYFIKACJA W OBECNOŚCI ZAKŁÓCEŃ

Zakłada się, że odpowiedź skokowa układu $h(t)$ została zakłócona addytywnie przez szum losowy, zgodnie ze wzorem

$$hz_n = h_n + z_n
 \tag{19}$$

gdzie h_n określa wzór (14), z_n – zakłócenie o rozkładzie normalnym $N(0, \sigma)$ i odchyleniu standardowym $\sigma = 2$.

Dla sygnału hz_n powtórzono obliczenia opisane w p.2. Okazało się, że warunkiem uzyskania poprawnych wyników jest odpowiednio duża liczba punktów obserwacji N (przyjęto $N = 300$) oraz wygładzenie wartości hz_n . W tym celu zastosowano metodę średniej ruchomej (przyjęto $M = 25$), opisaną wzorem:

$$hs_n = \frac{1}{2M+1} \sum_{i=-M}^M hz_{n+i} \quad (20)$$

Przy wyznaczaniu całki (10) zastosowano metodę trapezów i metodę Simpsona. Wyniki obliczeń zamieszczono w Tabeli 2, która zawiera wartości błędów (17).

Tabela 2. Wartości błędów określonych zależnościami (17) dla modelu (11) w obecności zakłócenia dla różnych czasów obserwacji

	T = 37		T = 41	
	m. trapezów	m. parabol	m. trapezów	m. parabol
Δh_0	0,4937	1,0421	0,3385	0,9842
Δh_1	0,3978	0,8778	0,3419	0,8770
Δh_2	0,7035	0,9796	0,6421	0,9735
Δg_0	0,0796	0,1488	0,0707	0,1314
Δg_1	0,0889	0,1333	0,0980	0,1296
Δg_2	0,2461	0,2645	0,2171	0,2368

Z danych zawartych w tabeli 2, wynika przewaga metody trapezów nad metodą parabol – wyraźnie mniejsza wartość błędów. Wynika to z faktu, że metoda trapezów ma mniejszy współczynnik redukcji szumu niż metoda Simpsona. Należy przypomnieć, że w przypadku odpowiedzi skokowej niezakłóconej (p.2) zdecydowaną przewagę posiada metoda parabol. Ze względu na duży poziom zakłócenia ($\sigma = 2$), lepszą okazała się metoda trapezów. W przypadku mniejszej wartości odchylenia standardowego σ wybór metody całkowania numerycznego jest sprawą otwartą. Ograniczając się do rezultatów metody trapezów, z tabeli 2 wynika, że dla czasu obserwacji $T = 41$ najlepszym przybliżeniem okazał się model $G_0(s)$ o postaci

$$G_0(s) = \frac{5,84}{44,84 \cdot s^3 + 50,29 \cdot s^2 + 11,85 \cdot s + 1} \quad (21)$$

W przypadku czasu obserwacji $T=37$ brak jest jednoznacznej odpowiedzi. Mianowicie, ze względu na błąd odpowiedzi skokowej optymalnej jest model $G_1(s)$, natomiast ze względu na odpowiedź impulsową optymalny jest model $G_0(s)$.

3. WNIOSKI

W pracy zaproponowano sposób umożliwiający stosowanie metody momentów identyfikacji układów dynamicznych w przypadku, gdy znana jest odpowiedź skokowa układu. Prowadzi to do wyeliminowania operacji różniczkowania, która

w przypadku występowania zakłócenia losowego, prowadzi do istotnych błędów. Proponowana metoda zapewnia poprawne modele transmitancji nawet dla dużego poziomu zakłóceń losowych, pod warunkiem dostatecznej liczby punktów obserwacji.

LITERATURA

- [1] Söderström T., Stoica P. Identyfikacja systemów. PWN, Warszawa 1997.
- [2] Bubnicki Z. Identyfikacja obiektów sterowania. WNT, Warszawa 1974.
- [3] Eykhoff P. Identyfikacja w układach dynamicznych. PWN, Warszawa 1980.
- [4] Purczyński J. Dynamika układów o parametrach rozłożonych. Wydawnictwo PS, Szczecin 1987.
- [5] Żuchowski A. Modele dynamiki i identyfikacja. Wydawnictwo PS, Szczecin 2003.
- [6] Fortuna Z., Macukow B., Wąsowski J. Metody numeryczne. WNT, Warszawa 2005.

DETERMINATION OF TRANSMITTANCE WITH THE USE STEP RESPONSE IN THE NOISE PRESENCE

The study examined the issue of identification of a dynamical system described ordinary differential equation of order n based on a modified method of moments. A classic method of moments uses impulse response of the system, and in this paper, it is proposed how to use the method of moments for the step response, without the need for numerical differentiation.