Marian PALEJ
Ośrodek Geometrii i Grafiki Inżynierskiej
Politechniki Śląskiej w Gliwicach

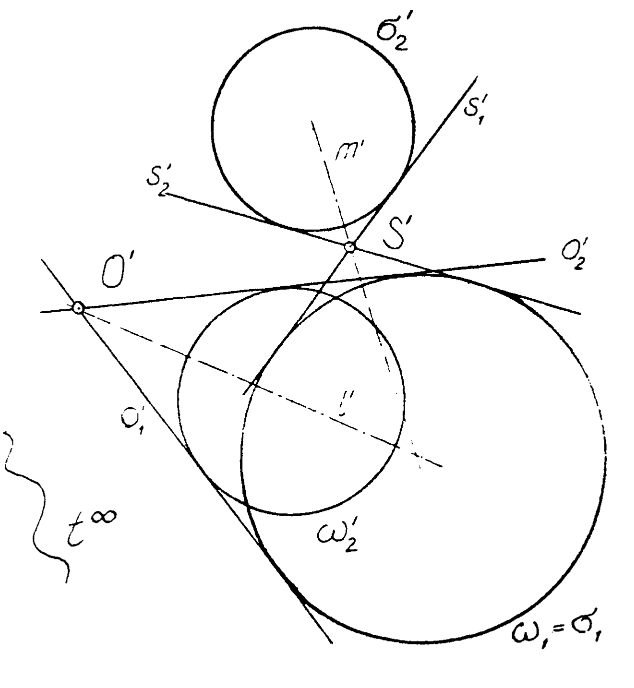
ELEMENTARNA INTERPRETACJA PUNKTÓW KOŁOWYCH

Problem istnienia punktów kołowych pojawia się w najkrócej choćby zarysowanym kursie geometrii wykreślnej realizowanym w wyższej szkole technicznej. Wiąże się bowiem z pytaniem, na które wykładowcy wypada odpowiedzieć dlaczego skoro do określenia dowolnej stożkowej potrzebne jest pięć punktów (z których żadne trzy nie są współliniowe) - do skonstruowania okręgu wystarczą trzy tylko punkty.

Odpowiedzi na to pytanie łatwo jest udzielić odwołując się do zagadnień geometrii rzutowej, w szczególności do teorii biegunowości (inwolucja bezwzględna!). Wiadomo jednak, że geometria rzutowa nie jest wykładana w szkole średniej (a nawet na ogół w szkołach wyższych) i nie sposób oczekiwać by przywoływanie jej na pomoc było elementem wyjaśniającym i satysfakcjonującym słuchaczy - studentów I roku.

Można co prawda rozumować i tak, że skoro każdy okrąg leżący na określonej płaszczyźnie da się skonstruować znając trzy jego punkty to z tego wynika, że "gdzieś tam" muszą istnieć dwa jeszcze punkty wspólne wszystkim okręgom danej płaszczyzny - nie jest jednak widoczne, że muszą to być różne, nie zjednoczone punkty, a przede wszystkim - że są to punkty prostej niewłaściwej.

W przytoczonym niżej rozumowaniu Student, do którego adresowane są wyjaśnienia winien jedynie znać algorytm konstrukcji punktów przebicia prostą dowolnego utworu geometrycznego oraz elementarne właściwości powierzchni stożkowych, w szczególności fakt, że przekroje takich powierzchni płaszczyznami równoległymi są stożkowymi podobnymi i podobnie położonymi.[1]

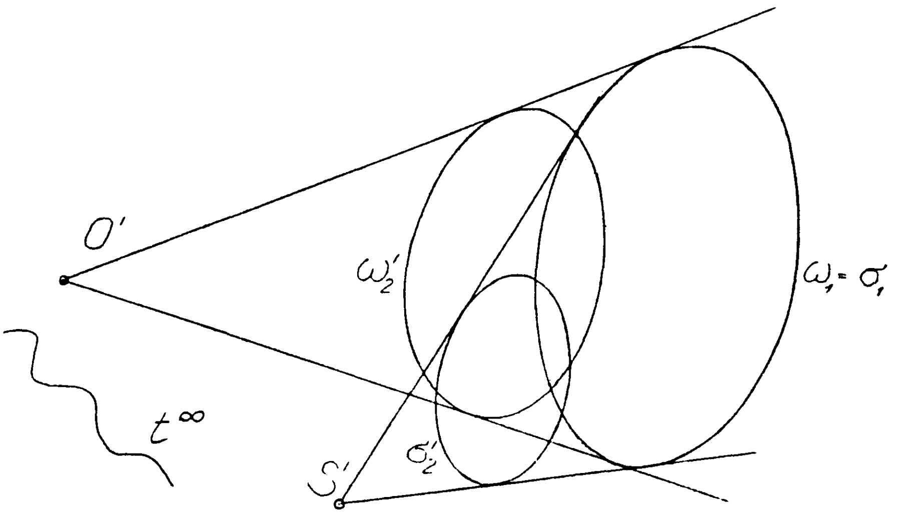


rys.1

Niech np. dane będą (rys. 1) trzy okręgi ω_1 , ω_2' , ρ_2' leżące w płaszczyźnie rysunku. Zinterpretujemy dwa z nich np. ω_1', ω_2' jako rzut prostokątny (a równie dobrze może to być rzut tylko równoległy bądź środkowy) na płaszczyznę rysunku π okręgów należących do powierzchni stożkowej $\Omega^2 = (O, \omega_1)$. Niech przy tym ω_1 będzie kierującą powierzchni Ω^2,zaś okrąg ω_2'- rzutem jej przekroju płaszczyzną $\alpha \,//\, \pi$. Częścią wspólną płaszczyzn α i π

[1] To ostatnie daje się zresztą łatwo wyprowadzić z właściwości rzutu środkowego, w którym rolę środka pełni wierzchołek powierzchni.

jest oczywiście prosta niewłaściwa płaszczyzny rysunku t^{∞}. Postawmy problem punktów przebicia powierzchni Ω^2 przez prostą t^{∞}. Realizując algorytm konstrukcji takich punktów rozważmy płaszczyznę α przechodzącą przez prostą t^{∞}. Zgodnie z założeniem płaszczyzna α przecina powierzchnię Ω^2 w okręgu ω_1, a zatem punkty wspólne: $\omega_2' \cap t^{\infty}$ są punktami przebicia prostą t^{∞} powierzchni stożkowej Ω^2. Jest przy tym oczywiste, że te same punkty uzyskamy wprowadzając inne płaszczyzny zawierające prostą t^{∞} tj równoległe do π przecinające powierzchnię Ω^2 w kolejnych okręgach, których środki leżą na prostej l, a rzuty są styczne do tworzących zarysu $o'_{1,2}$. Tak więc zbiór okręgów $\{\omega_i'\}$ wraz z ω_1 przecina prostą t^{∞} w tych samych dwóch punktach 1^{∞}, 2^{∞}. Weźmy z kolei nie należący do zbioru $\{\omega_i\}$ okrąg σ_2' i rozważmy powierzchnię stożkową o kierującej $\omega_1 = \sigma_1$ i przekroju kołowym, którego rzutem jest σ_2'. Powtórzenie konstrukcji punktów przebicia, tym razem powierzchni stożkowej $\Sigma^2 = (S, \sigma_1)$ przez prostą t^{∞} ujawnia, że zbiór okręgów $\{\sigma_i'\}$ odpowiednio stycznych do tworzących $s'_{1,2}$ przecina prostą niewłaściwą również w dwóch punktach $\sigma_1 \cap t^{\infty}$. Ponieważ jednak prosta t^{∞} nie może przecinać okręgu $\omega_1 = \sigma_1$ w czterech a jedynie w dwóch punktach wynika stąd natychmiast, że punkty $t^{\infty} \cap \sigma_1$ są identyczne z 1^{∞}, 2^{∞}. Przedstawione działania obejmować mogą każdy dowolnie przyjęty na płaszczyźnie rysunku π okrąg. Można zatem stwierdzić, że istotnie wszystkie okręgi tej płaszczyzny przechodzą przez stałe dwa punkty niewłaściwe zwane w literaturze punktami kołowymi [1]. lub cyklicznymi [2].



rys. 2

Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że analogiczne rozumowanie odnieść można do zbioru współpłaszczyznowych stożkowych podobnych i podobnie położonych (rys. 2) Otrzymujemy stąd natychmiast, że wszystkie takie stożkowe przechodzą przez dwa stałe punkty urojone prostej niewłaściwej, oczywiście różne od punktów kołowych. Wynika stąd również, że do określenia stożkowej podobnej do zadanej i podobnie położonej wystarczy znajomość jedynie trzech jej punktów.

Literatura:

[1] A. Plamitzer: "Elementy geometrii rzutowej", Lwów, 1927

[2] M. Stark : "Geometria analityczna", Monografie matematyczne tom XXVI, Polskie Towarzystwo Matematyczne, Warszawa-Wrocław, 1951

AN ELEMENTARY INTERPRETATION OF CIRCULAR POINTS

A way of explaining the so-called circular points is presented. In the paper the circular points are interpreted as traces of the line at infinity intersecting the defined conic surfaces.