

Leszek KIELSKI

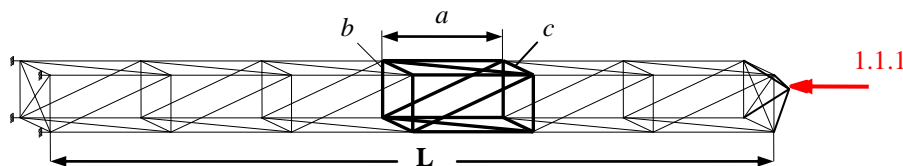
ANALIZA STATECZNOŚCI SMUKLEJ REGULARNEJ KONSTRUKCJI PRĘTOWEJ

Streszczenie

Przedmiotem analizy jest regularna konstrukcja prętowa, zbudowana z powtarzalnych elementów (segmentów), wykonanych ze sprężystych prętów połączonych w sztywnych węzłach. Konstrukcja obciążona jest siłami ściskającymi, przyłożonymi do węzłów brzegu swobodnego. Węzły brzegu przeciwnego utwierdzone są na sztywno. Liniową i nieliniową analizę stateczności przeprowadzono metodą elementów skończonych. Model obliczeniowy zbudowano z elementów belkowych. Wyznaczono obciążenia krytyczne oraz odpowiadające im postacie wyboczenia według analizy liniowej i nieliniowej dla konstrukcji składających się z 6-100 segmentów. Wyniki przedstawiono na wykresie obciążenie krytyczne w funkcji liczby segmentów.

WSTĘP

Przedmiotem analizy jest regularna konstrukcja prętowa zbudowana z powtarzalnych elementów (segmentów), wykonanych ze sprężystych prętów połączonych w sztywnych węzłach. Segment tworzą elementy (pręty) konstrukcji ograniczone dwoma wręgami. W przekroju poprzecznym segment jest kwadratem o boku $a = b = 0,043m$. Wysokość segmentu $c = 0,08m$. Średnica prętów $d = 3mm$. Materiał prętów stal St3: $E = 2,1 \cdot 10^5 MPa$, $G = 0,87 \cdot 10^5 MPa$, $\nu = 0,28$.



Rys. 1.1 Regularna prostopadłościenna konstrukcja prętowa.

Konstrukcja obciążona jest siłami ściskającymi, przyłożonymi do węzłów brzegu swobodnego. Węzły brzegu przeciwnego utwierdzone są na sztywno. Analizę stateczności w zakresie liniowym przeprowadzono metodą elementów skończonych wykorzystując energetyczną formę kryterium statycznego. Model obliczeniowy zbudowano z elementów belkowych.

1. METODA ROZWIĄZANIA

Analiza liniowa

Obliczenia w zakresie liniowym przeprowadzono obciążając konstrukcję założoną siłą ściskającą P , dla której otrzymywano współczynniki obciążenia krytycznego λ_1 , λ_2 i λ_3 , dla kolejnych wartości własnych „eigenvalue 1,2,3” oraz odpowiadające im postacie wyboczenia. Obciążenie krytyczne z zakresu statycznego, liniowego wyznaczano dla najmniejszej wartości własnej λ_1 :

$$P_{KR} = P \cdot \lambda_1 \quad (1)$$

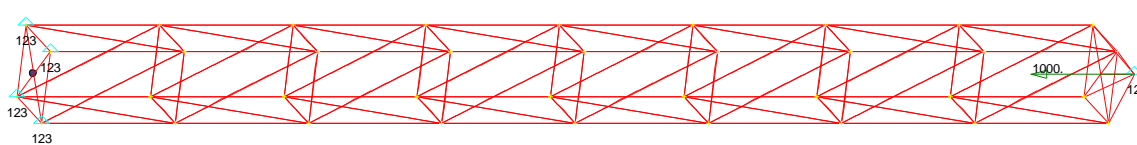
Analiza nieliniowa

Wielkość obciążenia przy analizie nieliniowej zadawano w postaci $\{P\} \cdot t$ zależnej od pewnego parametru t nazywanego „time” i zmieniającego się przy statycznym, nieliniowym rozwiązaniu w przedziale $\langle 0,1 \rangle$, gdzie $\{P\}$, jest przyjętą do obliczeń, siłą ściskającą badaną konstrukcję. Siła ta jest z obszaru zakrytycznego czyli musi być większa od siły krytycznej otrzymanej w analizie liniowej $\{P\} > P_{KR}$. W wyniku obliczeń otrzymujemy wykres przedstawiający przemieszczenie dowolnego węzła f , w funkcji parametru t , czyli $f=f(t)$. Wykres ten pozwala nam na prześledzenie poszczególnych faz obciążenia konstrukcji od $t=0$ do $t=1$. Ponadto z wykresu możemy wyznaczyć graniczną wartość t_k , tzn. określić fazę, dla której przemieszczenie wybranego węzła rośnie do nieskończoności. Ta graniczna wartość t_k pozwala wyznaczyć obciążenie krytyczne dla analizy nieliniowej:

$$f \rightarrow \infty; \quad t = t_k; \quad \{P\} \cdot t_k = P_{KRn} \quad (2)$$

Przykład 1.

Analiza liniowa



Rys. 1 Konstrukcja zbudowana z 8 segmentów, ściskana założoną siłą $P=1000N$.

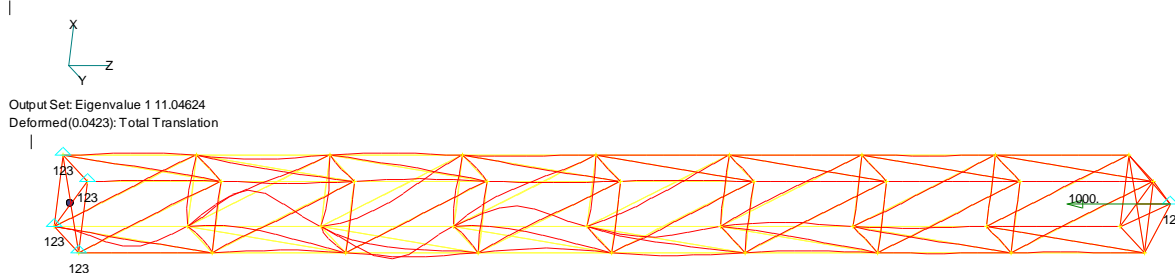
```
2..Eigenvalue 1 11.04624
3..Eigenvalue 2 11.06855
4..Eigenvalue 3 11.94623
```

Otrzymano następujące współczynniki obciążenia krytycznego:

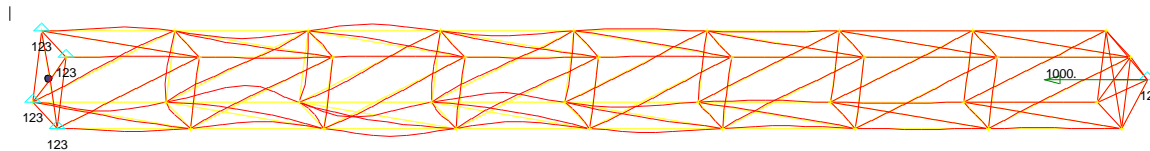
$$\lambda_1 = 11,04624, \quad \lambda_2 = 11,06855, \quad \lambda_3 = 11,94623$$

Obciążenie krytyczne dla analizy liniowej: $P_{KR} = P \cdot \lambda_1 = 1000 \text{ N} \cdot 11,04624 = 11046 \text{ N}$

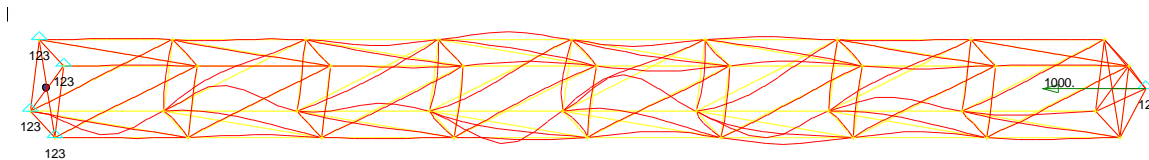
Oraz odpowiadające im postacie wyboczenia:



Rys. 2 Postać wyboczenia odpowiadająca obciążeniu krytycznemu $P_{KR} = 11046 \text{ N}$.



Rys. 3 Postać wyboczenia odpowiadająca $\lambda_2=11,06855$.

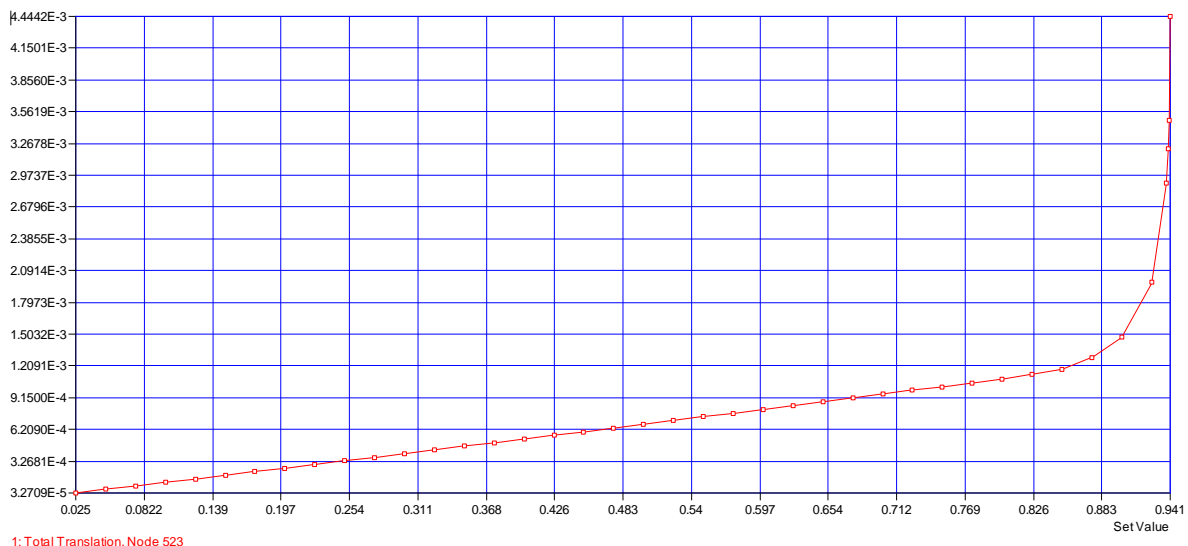


Rys. 4 Postać wyboczenia odpowiadająca $\lambda_3=11,94623$.

Analiza nieliniowa

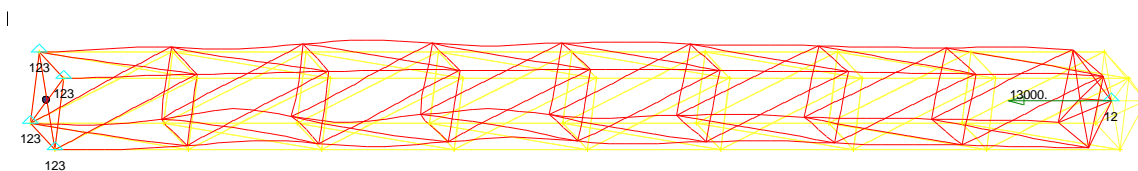
Przyjmujemy obciążenie z obszaru zakrytycznego $\{P\}=13000N$. Otrzymujemy wykres przemieszczenia dowolnego węzła konstrukcji w funkcji P_{KR} / P - np. węzła Nr 523 (węzła o największym przemieszczeniu) Rys.5. Obciążenie krytyczne z analizy nieliniowej, (duże odkształcenia) dla $t_k = 0,941$

$$P_{KRN}=\{P\} \cdot t_k=13000 \text{ N} \cdot 0,941=12233 \text{ N}$$

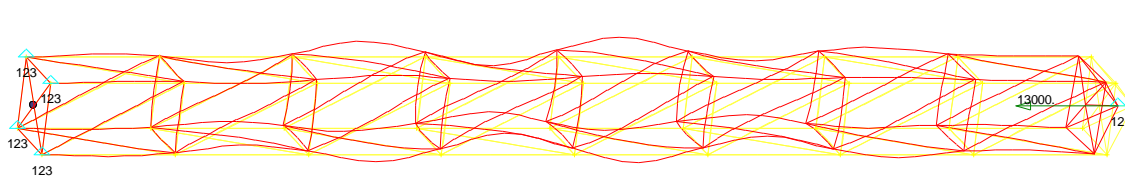


Rys. 5. Wykres przemieszczenia węzła Nr 523 w funkcji t .

Postacie wyboczenia dla analizy nieliniowej:



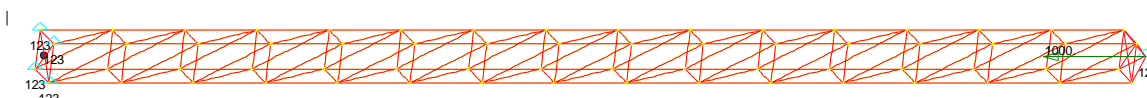
Rys. 6 Postać wyboczenia odpowiadająca obciążeniu krytycznemu wyznaczonemu na podstawie analizy nieliniowej dla $t=0,875$.



Rys. 7 Postać wybożenia odpowiadająca obciążeniu krytycznemu wyznaczonemu na podstawie analizy nieliniowej dla $t=0,9406$.

Przykład 2.

Analiza liniowa



Rys. 8 Konstrukcja zbudowana z 15 segmentów, ściskana założoną siłą $P=1000\text{N}$.

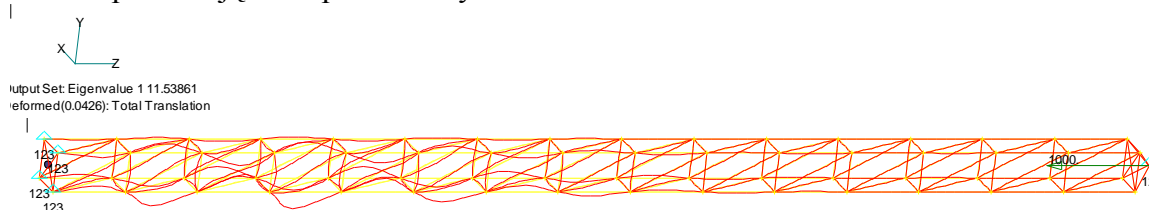
2..Eigenvalue 1 11.53861
 3..Eigenvalue 2 11.55469
 4..Eigenvalue 3 11.91244

Otrzymano następujące współczynniki obciążenia krytycznego:

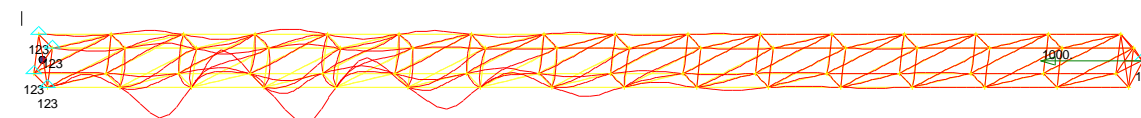
$$\lambda_1=11,53861, \lambda_2=11,55469, \lambda_3=11,91244$$

Obciążenie krytyczne dla analizy liniowej: $P_{KR}=P \cdot \lambda_1=1000 \text{ N} \cdot 11,53861=11539 \text{ N}$

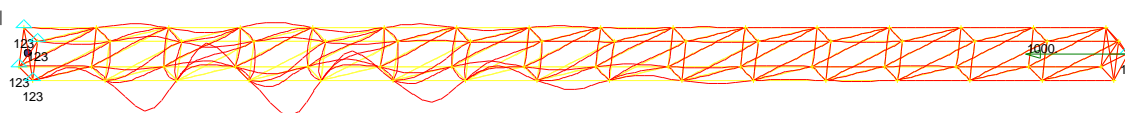
Oraz odpowiadające im postacie wybożenia:



Rys. 9 Postać wybożenia odpowiadająca obciążeniu krytycznemu $P_{KR}=11539 \text{ N}$.



Rys. 10 Postać wybożenia odpowiadająca $\lambda_2=11,55469$.



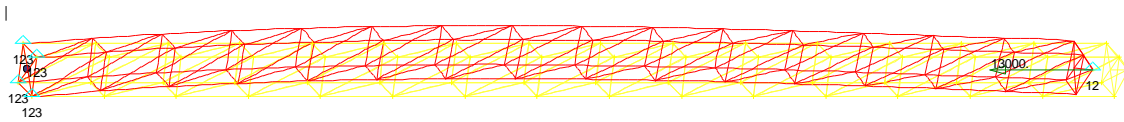
Rys. 11 Postać wybożenia odpowiadająca $\lambda_3=11,91244$.

Analiza nieliniowa

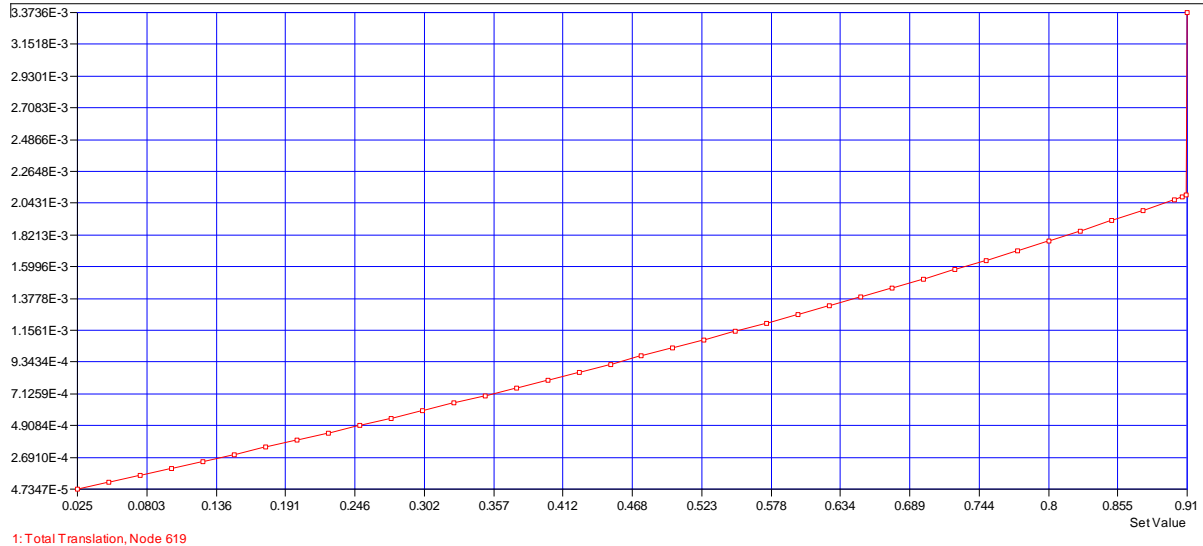
Przyjmujemy obciążenie z obszaru zakrytycznego $\{P\}=13000\text{N}$. Otrzymujemy wykres przemieszczenia dowolnego węzła konstrukcji w funkcji P_{KR} / P - np. węzła Nr 523 (węzła o największym przemieszczeniu) *Rys.12*. Obciążenie krytyczne z analizy nieliniowej, (duże odkształcenia) dla $t_k=0,91$

$$P_{KRN}=\{P\} \cdot t_k=13000 \text{ N} \cdot 0,91=11830 \text{ N}$$

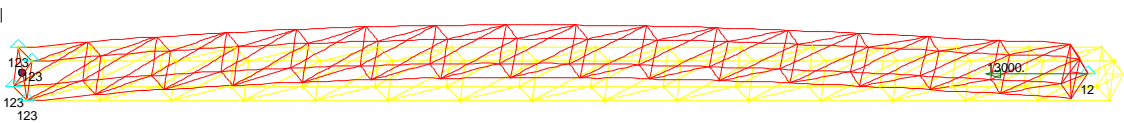
Postacie wybożenia dla analizy nieliniowej:



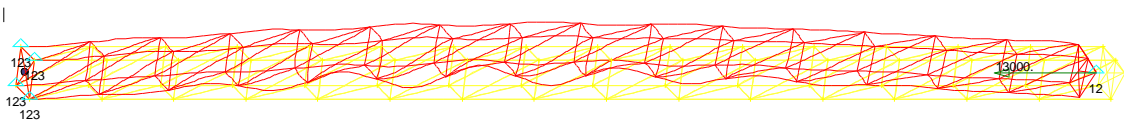
Rys. 13 Postać wybożenia odpowiadająca obciążeniu krytycznemu wyznaczonemu na podstawie analizy nieliniowej dla $t=0,025$.



Rys. 12 Wykres przemieszczenia węzła Nr 619 w funkcji t.



Rys. 14 Postać wybożenia odpowiadająca obciążeniu krytycznemu wyznaczonemu na podstawie analizy nieliniowej dla $t=0,775$.



Rys. 15 Postać wybożenia odpowiadająca obciążeniu krytycznemu wyznaczonemu na podstawie analizy nieliniowej dla $t=0,91$.

Przykład 3.

Analiza liniowa



Rys. 16 Konstrukcja zbudowana z 50 segmentów, ściskana założoną siłą $P=1000N$.

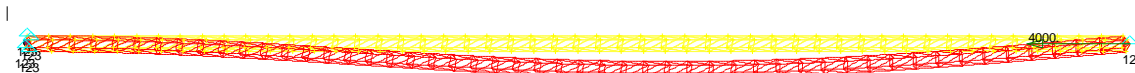
- 2. Eigenvalue 1 3.424023
- 3. Eigenvalue 2 3.425047
- 4. Eigenvalue 3 9.939864

Otrzymano następujące współczynniki obciążenia krytycznego:

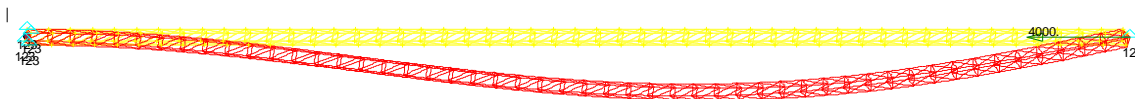
$$\lambda_1=3,424, \lambda_2=3,425, \lambda_3=9,93986$$

Obciążenie krytyczne dla analizy liniowej: $P_{KR}=P \cdot \lambda_1=1000 \text{ N} \cdot 3,424=3424 \text{ N}$

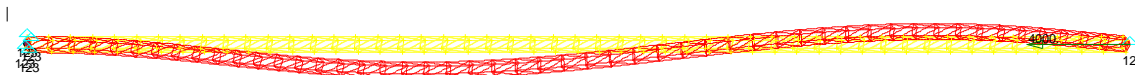
Oraz odpowiadające im postacie wybożenia:



Rys. 17 Postać wyboczenia odpowiadająca obciążeniu krytycznemu $P_{KR} = 3424$ N.



Rys. 18 Postać wyboczenia odpowiadająca $\lambda_2 = 3,425$.

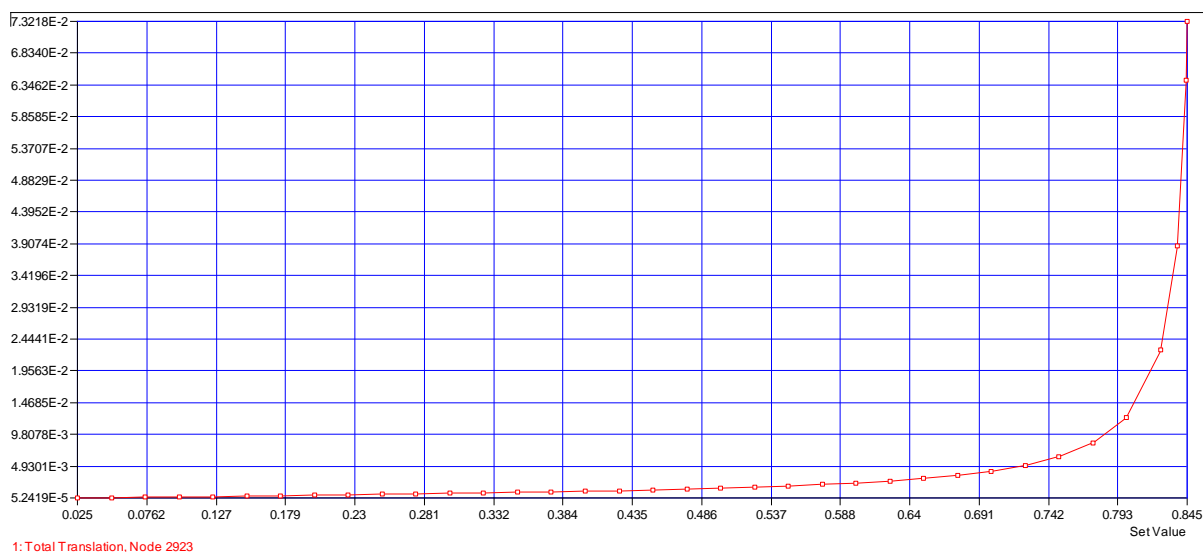


Rys. 19 Postać wyboczenia odpowiadająca $\lambda_3 = \lambda_3 = 9,93986$.

Analiza nieliniowa

Przyjmujemy obciążenie z obszaru zakrytycznego $\{P\} = 4000$ N. Otrzymujemy wykres przemieszczenia dowolnego węzła konstrukcji w funkcji P_{KR} / P - np. węzła Nr 2923 (węzła o największym przemieszczeniu) Rys.20. Obciążenie krytyczne z analizy nieliniowej, (duże odkształcenia) dla $t_k = 0,845$:

$$P_{KRN} = \{P\} \cdot t_k = 4000 \text{ N} \cdot 0,845 = 3380 \text{ N}$$

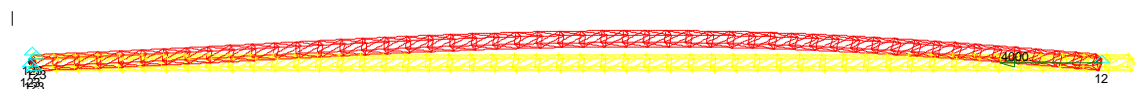


Rys. 20 Wykres przemieszczenia węzła Nr 2923 w funkcji t .

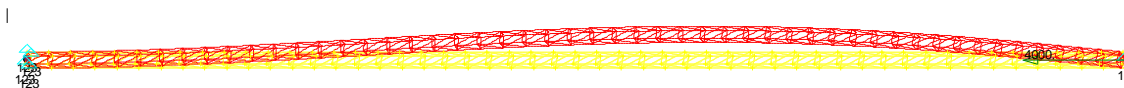
Postacie wyboczenia dla analizy nieliniowej:



Rys. 21 Postać wyboczenia odpowiadająca obciążeniu krytycznemu wyznaczonemu na podstawie analizy nieliniowej dla $t = 0,375$.

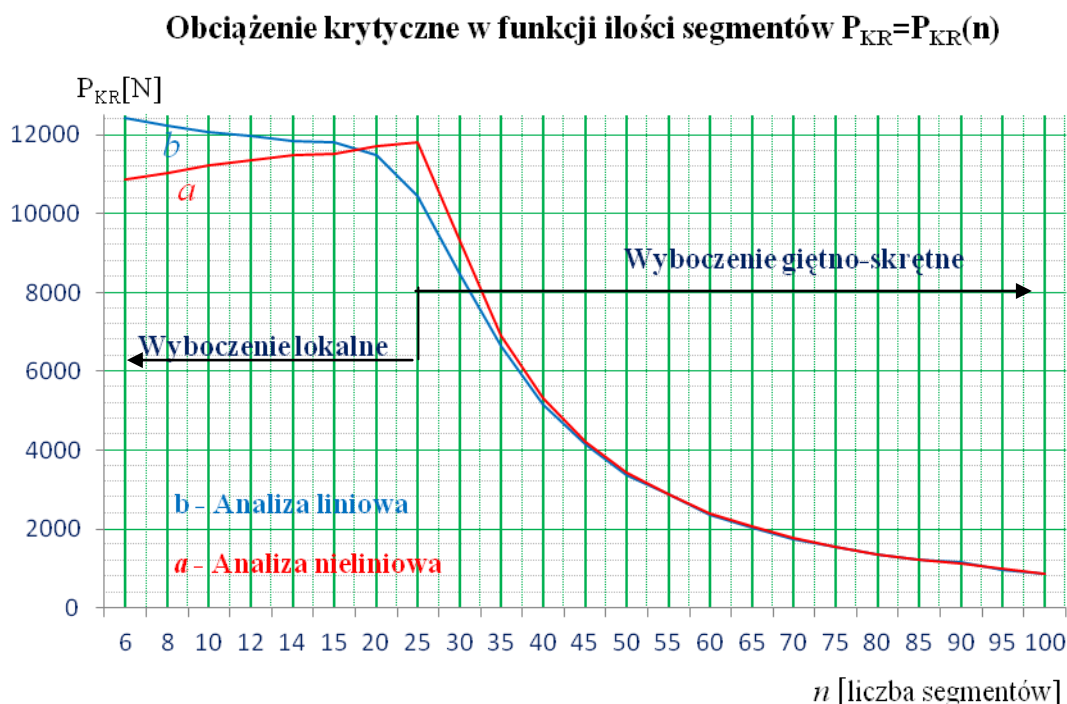


Rys. 22 Postać wyboczenia odpowiadająca obciążeniu krytycznemu wyznaczonemu na podstawie analizy nieliniowej dla $t = 0,65$.



Rys. 23 Postać wybożenia odpowiadająca obciążeniu krytycznemu wyznaczonemu na podstawie analizy nieliniowej dla $t=0,844$.

W pracy przedstawiono wyniki obliczeń dla trzech konstrukcji o ilości segmentów 8,15 i 50. Obliczenia wykonano również dla konstrukcji o ilościach segmentów: 6,10,12,14,20,25 30 35,40,45,60,70,80,90 i 100. Wyniki obliczeń przedstawiono na wykresie Rys.24



Rys. 24. Wykres przedstawiający zależność obciążenia krytycznego w funkcji liczby segmentów badanych konstrukcji.

PODSUMOWANIE

W pracy przeprowadzono obliczenia obciążenia krytycznego regularnej, prostopadłościenną konstrukcji prętowej (masztu prętowego), wykorzystując liniową i nieliniową (duże odkształcenia) teorię stateczności. Wyznaczenie obciążenia krytycznego przeprowadzono metodą elementów skończonych. Model obliczeniowy zbudowano z elementów belkowych. Wielkość obciążenia przy analizie nieliniowej przyjmowano z obszaru zakrytycznego (wymagało to wstępnych obliczeń badanej konstrukcji w celu wyznaczenia obciążenia bifurkacyjnego, wyznaczano je metodą elementów skończonych wykorzystując liniową teorię stateczności sprężystej). Wielkość tego obciążenia zadawano w postaci $\{P\} \cdot t$, gdzie $t < 0, 1 >$. Wyznaczonemu obciążeniu krytycznemu odpowiada postać wybożenia konstrukcji. Wykonano obliczenia dla konstrukcji składającej się z 6-100 segmentów co pozwoliło przedstawić w formie wykresu zależność $P_{KR}= P_{KR}(n)$ w całym zakresie smukłości. Wykres ten jest charakterystyczny dla smukłych ściskanych konstrukcji. Możemy wyróżnić na nim obszar, w którym utrata stateczności konstrukcji następuje poprzez wybożenie lokalne oraz obszar wybożenia giętno-skrętnego (Rys.18).

ANALYSIS OF STABILITY OF REGULAR ROD STRUCTURES

Abstract

Regular rectangular construction, made of reproducible segments loaded compressive forces, acting along the strips is analyzed in this paper. The lattice must be made of elastic rods, rigidly connected in the nodes which form reproducible rectangular segments. The method of finite elements was used to linear and nonlinear analysis of stability. Computational model built from beam elements. Critical load calculation and the corresponding figures of buckling by the analysis for linear and non-linear structure consisting of 6-100 units. The results are shown in the graph as a function of the critical load the number of segments.

BIBLIOGRAFIA

1. Belytschko T., Wing Kam Liu.: Moran B. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, John Wiley and Sons Ltd., England, 2001.
2. Fung Y.C.: „*Podstawy mechaniki ciała stałego*”, PWN, Warszawa, 1969.
3. Karaśkiewicz E.: „*Zarys teorii wektorów i tensorów*”, PWN, Warszawa, 1976.
4. Misiak J., *Stateczność konstrukcji prętowych*, PWN, Warszawa 1990r
5. Rakowski G., Kacprzyk Z., *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji* OWPW, 1993.
6. Waszczyszyn Z., Cichoń Cz., Radwańska M.: *Metoda elementów skończonych w stateczności konstrukcji*. Arkady, Warszawa, 1990.
7. Praca po redakcją M. Życzkowskiego., *Mechanika techniczna t. IX.*, PWN, Warszawa 1988.
8. Zienkiewicz O.C., *Metoda elementów skończonych*”, Arkady, Warszawa, 1972

Autorzy:

dr inż. Leszek KIELSKI – Wyższa Szkoła Ekologii i Zarządzania w Warszawie