

# Układ akwizycji i archiwizacji parametrów ruchu układów mobilnych – metody matematyczne, filtry cyfrowe

JEL: L97 DOI: 10.24136/atest.2019.041

Data zgłoszenia: 15.12.2018 Data akceptacji: 08.02.2019

W ramach pracy przedstawiono metody numeryczne oraz filtry cyfrowe umożliwiające korekcję sygnału pomiarowego uzyskanego podczas badań doświadczalnych parametrów ruchu pojazdu. Wykorzystany moduł pomiarowy nawigacji inercyjnej składa się z trójosiowych akcelerometrów, żyroskopów wykonanych w technologii MEMS oraz magnetometru. Zebrane dane pomiarowe umożliwiły odniesienie ich do punktu w przestrzeni trójwymiarowej, w celu wyznaczenia trajektorii ruchu pojazdu.

W artykule przedstawiono metody numeryczne obrotu lokalnego układu współrzędnych do układu globalnego oraz wybrane filtry cyfrowe umożliwiające wygładzanie sygnału pomiarowego w czasie rzeczywistym.

**Słowa kluczowe:** Kąty Eulera, kwaterniony, filtr Kalmana, Filtr Madgwicka, filtr komplementarny.

## Wstęp

Układy pomiarowe pozwalające na rejestrację oraz przetwarzanie parametrów ruchu, są szeroko stosowane w wielu dziedzinach życia codziennego [9, 14, 20, 23]. Wymaga to jednak korelacji układów współrzędnych lokalnych, regionalnych i globalnych. W przypadku analizy ruchu samochodu integracji podlega układ lokalny związany z pojazdem oraz układ globalny związany z drogą. Wyznaczenie trajektorii ruchu pojazdu determinuje konieczność zastosowania metod matematycznych obrotu układu współrzędnych, np. metody kątów Eulera lub metody Kwaternionów. Dla zwiększenia czytelności uzyskiwanych sygnałów pomiarowych wykorzystuje się filtry cyfrowe Kalmana, Madgwicka i filtr komplementarny. Umożliwiają one wygładzenie widocznych szumów sygnału pomiarowego w czasie rzeczywistym.

## 1 Metody obliczeniowe

### 1.1 Kąty Eulera

Kąty Eulera pozwalają na przedstawienie rotacji obiektu, jako sekwencji kolejno po sobie następujących obrotów wokół każdej z osi lokalnego układu współrzędnych, związanego z tym obiektem. Na podstawie kątów Eulera, można utworzyć macierze obrotów wokół poszczególnych osi układu współrzędnych, a ich iloczyn pozwala na określenie zmiany orientacji lokalnego układu współrzędnych, względem globalnego układu współrzędnych [1, 5, 9, 14, 18, 19, 23]. Związek pomiędzy danym wektorem w lokalnym układzie współrzędnych, a tym samym wektorem w globalnym układzie współrzędnych, można opisać zależnością:

$$a_1 = R_{0,1} a_0.$$

W powyższym równaniu indeksem „0” oznaczono wektor w układzie globalny, natomiast indeksem „1” wektor obrócony. Macierz rotacji  $R_{0,1}$  reprezentuje przekształcenie współrzędnych w układzie  $Ox_0y_0z_0$  na współrzędne w układzie  $Ox_1y_1z_1$ .

W przypadku nawigacji inercyjnej, otrzymywany jest wektor przyspieszenia w układzie lokalnym i należy go odnieść do układu

globalnego, a więc jest to operacja odwrotna do tej opisanej powyższym równaniem. W celu wyznaczenia wektora, w układzie globalnym, należy wyznaczyć odwrotność macierzy rotacji  $R_{0,1}$ , jednak przez wzgląd na to, iż macierz rotacji jest macierzą symetryczną, macierz odwrotna jest równa macierzy transponowanej [18].

$$R_{1,0} = R_{0,1}^{-1} = R_{0,1}^T$$

Należy również uściślić kwestię dotyczącą konwencji nazewnictwa, ponieważ kąty Eulera stanowią ogólnie przyjętą nazwę dla zestawu trzech kątów, opisujących orientację ciała sztywnego w przestrzeni trójwymiarowej. W rzeczywistości istnieje również notacja Taita-Bryana, która niejako przynależy do grupy kątów Eulera. Różnica pomiędzy właściwą notacją kątów Eulera, a notacją kątów Taita-Bryana, polega na sposobie opisu zmiany orientacji. W przypadku notacji właściwej, Euler do opisu zmiany orientacji w przestrzeni, wykorzystał dwukrotnie obrót wokół tej samej osi np. z-x-z lub x-y-x, natomiast notacja Taita-Bryana wykorzystuje jednorazowy obrót wokół wszystkich osi układu współrzędnych np. x-y-z lub x-z-y. W związku z bardziej intuicyjnym sposobem opisu oraz łatwością implementacji, wykorzystano notację Taita-Bryana, która w dalszej części pracy będzie opisywana w sposób ogólny jako kąty Eulera.

Jak wspomniano, do przedstawienia zmiany orientacji układu lokalnego względem układu globalnego w postaci macierzy obrotu, należy wyznaczyć trzy podstawowe macierze obrotu wokół każdej z osi układu współrzędnych.

$$R_{x\varphi} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{y\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R_{z\psi} = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix}$$

Podczas mnożenia macierzy należy zwrócić szczególną uwagę na kolejność wykonywania działań. Na podstawie wyników z badań doświadczalnych ustalono, że wynik najbliższy rzeczywistości osiąga się stosując kolejność  $R_z R_y R_x$ .

### Kąty Eulera

Kwaternion, odkryty przez W. R. Hamiltona w 1843 roku, stanowi modyfikację opisu rotacji wokół pewnej osi przy zastosowaniu liczb zespolonych. Kwaternion stanowi rozszerzenie tego opisu do przestrzeni trójwymiarowej, przy zastosowaniu trzech jednostek urojonych spełniających właściwości opisane zależnościami [2, 4, 5, 8-10, 23]:

$$ii = -1 \quad ij = k \quad ik = -j$$

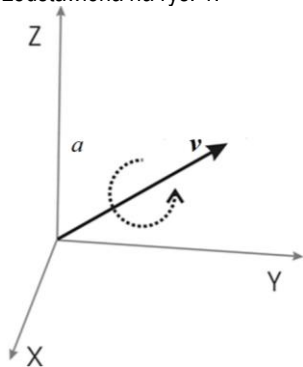
$$ji = -k \quad jj = -1 \quad jk = i$$

$$ki = j \quad kj = -i \quad kk = -1$$

Kwaternion, dzięki swoim własnościom znajduje szerokie zastosowanie w mechanice, jak i technice komputerowej. Można go przedstawić w ogólnej postaci, jako równanie, w którym a, b, c, d są liczbami rzeczywistymi, natomiast i, j, k kwaternionami jednostkowymi.

$$q = a + bi + cj + dk$$

Kwaterniony opisują rotację poprzez zastosowanie notacji osi kąt, w której człony kwaternionu zawierające jednostkę urojoną, wyznaczają oś (wektor) obrotu w układzie kartezjańskim, natomiast część rzeczywista kwaternionu zawiera informację o kącie obrotu wokół tej osi [23]. Graficzna interpretacja rotacji na podstawie kwaternionu została przedstawiona na rys. 1.



Rys. 1. Graficzna interpretacji obrotu z zastosowaniem kwaternionu. [źródło: <https://pl.wikipedia.org/>]

Podobnie jak w przypadku kątów Eulera, celem przekształcenia wektora z układu lokalnego na układ globalny, jest wyznaczenie macierzy obrotu. W przypadku wyznaczania macierzy obrotu, na podstawie kwaternionu, nie zachodzi konieczność ustalania kolejności mnożenia macierzy, w związku z czym ta metoda daje zawsze ten sam, jednoznaczny wynik co znaczy, że teoretycznie lepiej przedstawia rzeczywisty przypadek obrotu karoserii pojazdu, względem globalnego układu współrzędnych.

W celu wyznaczenia macierzy obrotu, należy w pierwszej kolejności wyznaczyć poszczególne elementy kwaternionu jednostkowego, czyli takiego którego moduł jest równy jedności.

$$|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = 1$$

Na podstawie kątów wyliczonych żyroskopu oraz magnetometru możliwe jest wyznaczenie elementów kwaternionu.

$$a = \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)$$

$$b = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)$$

$$c = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\psi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi}{2}\right)$$

$$d = -\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)$$

Wyliczone w ten sposób elementy kwaternionu, pozwalają na wyznaczenie macierzy obrotu kwaternionu jednostkowego [4].

$$R = \begin{bmatrix} 1 - 2(c^2 + d^2) & 2(bc - ad) & 2(ac + bd) \\ 2(bc + ad) & 1 - 2(b^2 + d^2) & 2(cd - ab) \\ 2(bd - ac) & 2(ab + cd) & 1 - 2(b^2 + c^2) \end{bmatrix}$$

Dalszy etap obliczeń tj. przekształcenie lokalnego układu współrzędnych względem globalnego układu współrzędnych, odbywa się w sposób analogiczny do tego przedstawionego dla kątów Eulera. Zasadnicza różnica pomiędzy kwaternionami, a metodą kątów Eulera, polega na sposobie wyznaczenia macierzy obrotu koniecznej do przekształcenia wektora przyspieszenia.

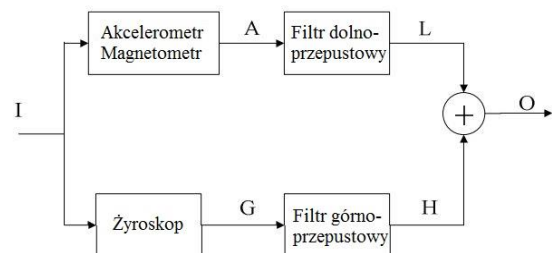
## 2 Filtracja sygnału pomiarowego

### 2.1 Filtr Komplementarny

Idea filtru komplementarnego, polega na fuzji odczytów z dwóch lub więcej czujników, z których żaden nie oddaje wyniku rzeczywistego – wszystkie czujniki obciążone są błędem [1, 7, 19, 21, 23]. Filtracja ma celu wykorzystanie najistotniejszych informacji, przy jednoczesnym pominięciu zakłóceń, a konstrukcja filtru powinna spełniać ogólną zależność [6]:

$$\sum_{i=1}^N F_i(s) = 1.$$

W przypadku nawigacji inercyjnej, o dziewięciu stopniach swobody, fuzja ta polega na wyznaczeniu orientacji obiektu, na podstawie odczytu z żyroskopu oraz połączonego odczytu z układu akcelerometr-magnetometr. Zastosowanie tego algorytmu, ma na celu odfiltrowanie odczytów żyroskopu, które obciążone są błędem wolnozmiennym – dryftem oraz odczytów układu akcelerometr-magnetometr, które obciążone są błędem szybkozmiennym – zakłóceniami pola magnetycznego i wibracjami układu. Sygnał pochodzący z żyroskopu, należy kondycjonować filtrem górnoprzepustowym, natomiast sygnał układu akcelerometr-magnetometr, filtrem dolnoprzepustowym [21]. Ogólny schemat takiego filtra komplementarnego dla nawigacji inercyjnej, przedstawiony został na rys. 2, gdzie sygnał wyjściowy z filtra stanowi sumę wyników otrzymanych na podstawie filtrów składowych.



Rys. 2. Schematyczny przebieg sygnału w filtrze komplementarnym dla nawigacji inercyjnej [19]

Filtr komplementarny został zaimplementowany, w postaci algorytmu w programie mikrokontrolera, jednak w klasycznym ujęciu filtrowania, zastosowany filtr dolnoprzepustowy, przyjmuje postać członu inercyjnego I rzędu, gdzie T jest stałą czasową i określa dynamikę filtru.

$$LPF = \frac{1}{1 + Ts}$$

Biorąc pod uwagę zasadę komplementarności, która opisana powyższym wzorem, filtr górnoprzepustowy przyjmuje postać:

$$HPF = 1 - LPF = \frac{Ts}{1 + Ts}.$$

Zaimplementowanie filtra wymaga przejścia z dziedziny operatorowej, na dziedzinę czasu. Wykorzystując odpowiednie metody transformacji i uwzględniając równanie filtra komplementarnego, otrzymuje się ogólne równanie filtra postaci:

$$\hat{\alpha}_k = \beta(\alpha_{k-1}^G + (\omega_k - \omega_{k-1})\Delta t) + (1 - \beta)\alpha_k^{AM}.$$

W równaniu  $\hat{\alpha}_k$  jest wartością estymowaną kąta na podstawie wartości kąta w poprzednim kroku  $\alpha_{k-1}^G$ , zmiany prędkości kątovej żyroskopu  $\Delta\omega$  oraz wartości kąta, wyznaczonej na podstawie układu akcelerometr-magnetometr  $\alpha_k^{AM}$ . Współczynnik

$\beta = \frac{T}{\Delta t + T}$  określa poziom z jakim wynik estymowanego kąta obrotu, ma zależeć od części szybkozmiennej (akcelerometr-magnetometr) oraz części wolnoziennej (żyroskop) [6].

Wyznaczenie kąta obrotu, dla części związanej z żyroskopem, obejmuje całkowanie wartości prędkości kątovej, celem otrzymania kąta obrotu. W przypadku układu akcelerometr-magnetometr, kąt obrotu układu można aproksymować przy założeniu niewystępowania nagłych zmian przyspieszenia układu. Jeżeli warunek jest spełniony, a wypadkowa przyspieszenia jest zbliżona do wartości przyspieszenia ziemskiego, możliwe jest wyznaczenie kątów rotacji obiektu  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  na podstawie wzorów [1, 4, 6, 9, 11, 15, 18, 19, 21]:

$$\varphi^{AM} = \tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_z}\right)$$

$$\theta^{AM} = \sin^{-1}\left(\frac{-a_x}{g}\right)$$

$$\psi^{AM} = \tan^{-1}\left(\frac{m_z \sin \varphi - m_y \cos \varphi}{m_x \cos \theta + m_y \sin \varphi \sin \theta + m_z \sin \theta \cos \varphi}\right)$$

W przypadku nawigacji inercyjnej, zastosowanie filtra komplementarnego ma na celu eliminację błędu zera, podczas wyznaczania kąta obrotu lokalnego układu współrzędnych, względem globalnego układu współrzędnych.

## 2.2 Filtr Kalmana

Filtr Kalmana to algorytm opracowany przez R. Kalmana na przełomie lat 50 i 60 XX wieku. Algorytm filtrowania zyskał ogromną popularność, ze względu na swoje właściwości i został zastosowany do estymacji trajektorii, podczas lotów kosmicznych począwszy od misji Apollo.

Filtr Kalmana jest algorytmem, który wykorzystuje do obliczeń, serię pomiarów z różnych źródeł, wykonanych w czasie. W przypadku nawigacji inercyjnej, są to pomiary kątów obrotu na podstawie żyroskopu oraz układu akcelerometr-magnetometr. Każdy z pomiarów obarczony jest szumem, który ma istotny wpływ na poziom błędu pomiaru. Filtr Kalmana, pozwala na estymację stanu systemu, bazując na bieżącym oraz poprzednim stanie, dążąc do osiągnięcia większej precyzji sygnału wyjściowego, niż jest to możliwe bazując na sygnałach wejściowych z osobna. Filtr Kalmana pozwala na redukcję błędów pomiarów z czujników podobnie jak filtr komplementarny, jednak z założenia jest on o wiele bardziej precyzyjny ze względu na wykorzystanie teorii prawdopodobieństwa w celu estymacji współczynników korekcyjnych w czasie rzeczywistym [1, 5, 7, 16, 17, 21, 23-26].

Filtr Kalmana operuje na statystycznie optymalnej estymacji systemu, opartej na dotychczasowo wykonanych pomiarach. Do poprawnej pracy filtra niezbędna jest znajomość poziomu szumu

sygnału wejściowego – szum pomiarowy oraz znajomość szumu całego systemu – szum procesu. Aby możliwe było skorzystanie z filtra w tej postaci wymaga się, aby szum posiadał rozkład Gaussa, o wartości oczekiwanej równej zero. W przypadku akcelerometrów, żyroskopów i magnetometrów warunki te są spełnione.

Należy zwrócić uwagę, że dalsza analiza będzie prowadzona dla przypadku jednowymiarowego, przy założeniu o niezależności poszczególnych składowych wektora prędkości kątovej, podobnie jak w systemach klasyfikacji bayerowskiej [1]. Teoria ta mówi o tym, że prawdopodobieństwo wystąpienia wektora zdarzeń (przestrzeń wielowymiarowa) w procesie, jest równe iloczynowi prawdopodobieństw wystąpienia zdarzeń elementarnych. Zatem na podstawie tego założenia, możliwe jest modelowanie zdarzenia w przestrzeni trójwymiarowej, jako złożenia trzech zdarzeń elementarnych w przestrzeni jednowymiarowej.

Na filtr Kalmana składają się dwie podstawowe fazy – faza predykcji oraz faza korekcji. W pierwszej fazie dochodzi do wyliczenia stanu układu, na podstawie praw fizyki opisujących dany proces, natomiast w drugiej fazie wyznaczane jest wzmocnienie Kalmana, które decyduje o wiarygodności uzyskanych pomiarów.

Na fazę predykcji składają się dwa równania – równanie stanu a priori oraz macierz kowariancji a priori [1, 24-26]:

$$\hat{x}_{(k|k-1)} = F\hat{x}_{(k-1|k-1)} + B\hat{\theta}_k$$

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}_{(k|k-1)} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}_{(k-1|k-1)} + \begin{bmatrix} \Delta t \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta}_k = \begin{bmatrix} \theta + \Delta t(\dot{\theta} - \dot{\theta}_b) \\ \dot{\theta}_b \end{bmatrix}$$

$$P_{(k|k-1)} = FP_{(k-1|k-1)}F^T + Q_k$$

$$\begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix}_{(k-1|k-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\Delta t & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_\theta & 0 \\ 0 & Q_{\dot{\theta}_b} \end{bmatrix} \Delta t$$

W powyższych równaniach  $\hat{x}_{(k|k-1)}$  jest estymatą a priori stanu układu w danej chwili czasu, F macierzą stanu, B macierzą wejścia, P macierzą kowariancji estymaty, a Q stanowi macierz wariancji szumu procesowego. Poniżej każdego z równań, zapisano ich sposób rozwiązania, dla rzeczywistego przypadku predykcji kąta obrotu na podstawie odczytów z żyroskopu oraz akcelerometru i magnetometru.

Na fazę korekcji składa się pięć równań, które pozwalają na uaktualnienie wartości otrzymanej w fazie predykcji na podstawie najnowszego pomiaru wartości z innego czujnika np. układu akcelerometr-magnetometr [1, 24-26].

$$\tilde{y}_k = z_k - H\hat{x}_{(k|k-1)}$$

$$\tilde{y}_k = z_k - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta}_b \end{bmatrix}_{(k|k-1)}$$

$$S_k = HP_{(k|k-1)}H^T + R$$

$$S_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix}_{(k|k-1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + R$$

$$K_k = P_{(k|k-1)}H^T S_k^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} K_0 \\ K_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix}_{(k|k-1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} S_k^{-1}$$

$$\hat{x}_{(k|k)} = \hat{x}_{(k|k-1)} + K_k \tilde{y}_k$$

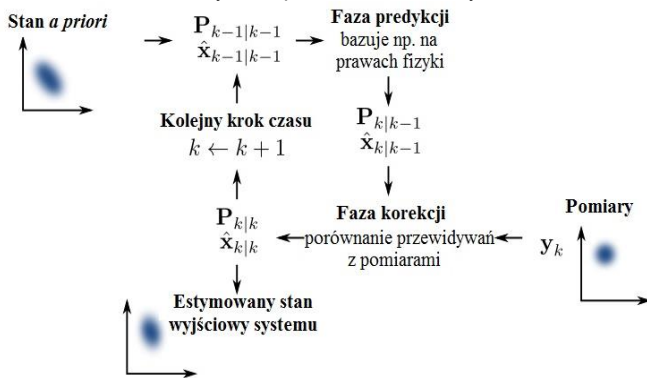
$$\begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta}_b \end{bmatrix}_{(k|k)} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta}_b \end{bmatrix}_{(k|k-1)} + \begin{bmatrix} K_0 \\ K_1 \end{bmatrix}_k \tilde{y}_k$$

$$P_{(k|k)} = (I - K_k H) P_{(k|k-1)}$$

$$\begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix}_{(k|k)} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_0 \\ K_1 \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) P_{(k|k-1)}$$

Wartość oznaczona przez  $\tilde{y}_k$  oznacza innowację, która jest wyznaczona przez różnicę pomiaru  $z_k$  (ką z układu akcelerometr-magnetometr) i wartości przewidywanej  $\hat{x}_{(k|k-1)}$  przemnożonej przez macierz wyjścia H. W kolejnym kroku wyznaczona zostaje innowacja kowariancji  $K_k$  na podstawie macierzy wyjścia H, kowariancji przewidywanej oraz kowariancji szumu białego R. Następnie wyznaczone zostaje wzmocnienie Kalmana  $K_k$ , które określa w jakim stopniu powinna zostać uwzględniona różnica pomiędzy wartością przewidzianą, a tą zmierzoną. Ostatecznie zostaje uaktualniona macierz kowariancji estymaty  $P_{(k|k)}$ , która w kolejnym przejściu algorytmu będzie nową macierzą w fazie predykcji.

Na podstawie zaprezentowanych równań można zauważyć, że w przypadku gdy szумы pomiarowe będą duże, wtedy wzmocnienie Kalmana będzie małe, a więc informacja z pomiaru nie będzie wpływała w znaczący sposób na ostateczną wartość  $x$ , natomiast gdy szum będzie dostatecznie mały, będzie to oznaczać większą wartość wzmocnienia Kalmana, która będzie mówiła o tym, że dane z pomiarów są wiarygodne i należy uaktualnić wartość  $x$ . Działanie filtru Kalmana schematycznie przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. Schemat działania filtru Kalmana. [źródło: <https://pl.wikipedia.org/>]

Strojenie filtru Kalmana, odbywa się przy użyciu trzech parametrów, tj. wariancji wartości przewidywanej  $Q_\theta$ , wariancji błędu wartości przewidywanej  $Q_{\dot{\theta}_b}$  oraz wariancji pomiaru R.

### 2.3 Filtr Madgwicka

Filtr został opracowany przez S. Madgwicka w 2010 roku, jako alternatywne podejście do wyznaczenia orientacji obiektu w przestrzeni, w stosunku do filtru Kalmana. Ideą przyświecającą autorowi było opracowanie algorytmu, łatwego w implementacji, który nie wymagałby dużej ilości przekształceń i operowałby w przestrzeni trójwymiarowej. Autor opisał w swojej pracy działanie algorytmu, a wraz z pracą udostępnił kod źródłowy opracowanej przez siebie funkcji [12, 21].

Algorytm Madgwicka został w całości zbudowany na kwaternionach, aby zapewnić jednoznaczność otrzymywanych wyników. Opracowana funkcja jako argumenty, przyjmuje dziewięć wartości będących trzysiosowymi pomiarami z czujników przyspieszenia, prędkości kątowej oraz natężenia pola magnetycznego. Pierwszym krokiem algorytmu jest określenie prędkości zmiany orientacji  ${}^S_E \dot{q}$ , na podstawie wektora prędkości kątowej  ${}^S \omega$ . W tym celu wyznaczany jest iloczyn tensorowy kwaternionu orientacji  ${}^S \hat{q}$  oraz wektora prędkości kątowej  ${}^S \omega$ .

$${}^S_E \dot{q} = \frac{1}{2} {}^S \hat{q} \otimes {}^S \omega$$

Następnie na podstawie danych z magnetometru, wyznaczany jest kierunek referencyjny  ${}^E \hat{h}_t$  pola magnetycznego Ziemi  ${}^S \hat{m}_t$  oraz współczynnik korekcyjny dla zaburzeń pola magnetycznego  ${}^E \hat{b}_t$ .

$${}^E \hat{h}_t = \begin{bmatrix} 0 & h_x & h_y & h_z \end{bmatrix} = {}^S \hat{q} \otimes {}^S \hat{m}_t \otimes {}^S \hat{q}^*$$

$${}^E \hat{b}_t = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{h_x^2 + h_y^2} & 0 & h_z \end{bmatrix}$$

W kolejnym kroku metodą gradientu prostego wyszukiwane jest minimum lokalne funkcji celu, która przyjmuje postać:

$$f({}^S \hat{q}, {}^E \hat{d}, {}^S \hat{s}) = {}^S \hat{q}^* \otimes {}^E \hat{d} \otimes {}^S \hat{q} - {}^S \hat{s}$$

W powyższym równaniu  ${}^E \hat{d}$  oznacza zdefiniowany wektor opisujący pole grawitacyjne Ziemi, natomiast  ${}^S \hat{s}$  wektor pola grawitacyjnego zmierzonego w układzie współrzędnych związanym z czujnikiem. Wynikiem działania algorytmu gradientu prostego jest wyznaczenie błędu zmiany orientacji w danym okresie czasu  ${}^S \hat{q}_{s,t}$ . Wyznaczona w ten sposób wartość błędu pozwala na estymację wartości szybkości zmiany orientacji  ${}^S \hat{q}_{est,t}$  uwzględniając wzmocnienie  $\beta$ . Wzmocnienie  $\beta$  jest współczynnikiem ustalonym empirycznie przez programistę.

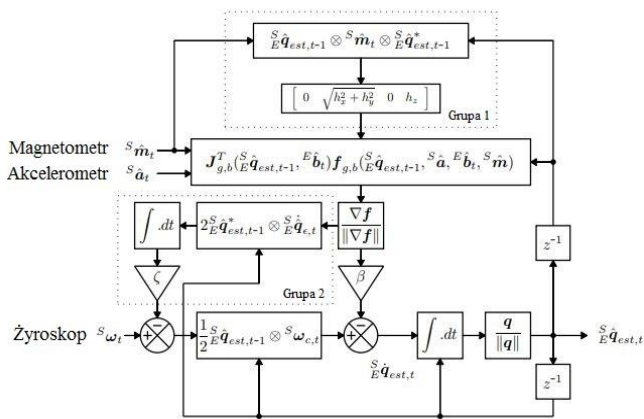
$${}^S \hat{q}_{est,t} = {}^S \hat{q}_{\omega,t} - \beta {}^S \hat{q}_{s,t}$$

Następnym etapem jest całkowanie szybkości zmiany orientacji obiektu  ${}^S \hat{q}_{est,t}$  po czasie, celem wyznaczenia uaktualnionego kwaternionu  ${}^S q_{est,t}$ .

$${}^S q_{est,t} = {}^S q_{est,t-1} + {}^S \hat{q}_{est,t} \Delta t$$

Wyznaczony w ten sposób uaktualniony kwaternion stanowi wynik działania funkcji, a na podstawie otrzymanego kwaternionu można wyznaczyć wartości kątów obrotu lokalnego układu współrzędnych lub bezpośrednio przejść do wyznaczenia macierzy obrotu na podstawie kwaternionu. Uaktualniony kwaternion stanowi nową podstawę do wyznaczenia szybkości zmian orientacji w kolejnym wywołaniu funkcji filtra. Na rys. 4 przedstawiono schemat blokowy działania algorytmu filtracji Madgwicka.





**Rys. 4.** Schemat blokowy prezentujący działanie filtra Madgwicka: Grupa 1: filtracji zakłóceń pola magnetycznego; Grupa 2: kompensacja dryftu żyroskopu [12]

**Wnioski i spostrzerzenia**

Głównym celem pracy było wykonanie układu pomiarowego opartego na module Discovery oraz zestawie trzyosiowych czujników – akcelerometru, żyroskopu oraz magnetometru, służących do wyznaczania parametrów ruchu pojazdu w czasie rzeczywistym. W skład układu pomiarowego wchodził również komputer z zainstalowanym oprogramowaniem, do odczytu danych z portu szeregowego USB. Poza samą budową układu, istotną część pracy stanowiło opracowanie algorytmu przetwarzania danych, pozwalającego na odtworzenie parametrów ruchu, z naciskiem na trajektorię przejazdu. Algorytm został opracowany w taki sposób, aby dać możliwość porównania kilku metod, służących wyznaczeniu kątów obrotu lokalnego układu, względem globalnego układu współrzędnych. Do wykonania niezbędnych obliczeń wykorzystano dwie metody reprezentacji rotacji – kąty Eulera oraz rachunek kwaternionów, a także cztery metody wyznaczania kątów obrotu, na podstawie danych z czujników – całkowanie prędkości kątowej, filtr komplementarny, filtr Kalmana oraz filtr Madgwicka. Algorytm został zaimplementowany, w postaci programu napisanego w języku C, który następnie został wgrany do pamięci mikrokontrolera.

Pomimo tego, że poszczególne metody pozwalają wyznaczyć orientację lokalnego układu, w globalnym układzie współrzędnych, to największą ilość informacji o poprawności obliczeń, niesie ze sobą trajektoria przejazdu. Stanowi ona bowiem ostatni, najdalszy krok przeliczenia, który obarczony jest największą ilością błędów. Błąd wyznaczenia trajektorii stanowi kumulację błędów: charakterystyk czujnika, dokładności zaokrągleń, całkowania oraz innych źródeł zewnętrznych. W celu zmniejszenia wpływu błędów na ostateczny wynik, wykonano wieloetapową kalibrację czujników, a do obliczeń wykorzystano zmienionoprzecinkową jednostkę arytmetyczno-logiczną mikrokontrolera.

Przyczyny błędów wyznaczenia parametrów dla każdej z metod są nieco inne. W przypadku użycia samego żyroskopu, wystąpił błąd nazywany dryftem żyroskopu. Jest to błąd położenia zerowego, który jeżeli nie jest dodatkowo korygowany, z upływem czasu wzrasta, powodując zniekształcenie przyspieszenia otrzymanego po rotacji układu.

Pozostałe trzy metody wyznaczania orientacji są znacznie bardziej rozbudowane. Posiadają one dodatkowe człony, mające na celu eliminację błędu położenia zerowego, poprzez zastosowanie fuzji sensorycznej – wszystkie trzy czujniki biorą udział w estymacji kątów obrotu, wokół poszczególnych osi układu współrzędnych.

W przypadku filtra Madgwicka, problem stanowiła zbyt wolna reakcja na występujący dryft w wyniku czego doszło do poważnego zniekształcenia przyspieszenia, a w konsekwencji trajektorii ruchu.

Dla filtra komplementarnego oraz Kalmana przyczyna problemów była wspólna i związana była z działaniem algorytmu, a właściwie ze sposobem wykrywania ruchu. Oba algorytmy działają prawidłowo w przypadku, gdy na układ nie działają żadne niezrównoważone siły. W przypadku gdy przyspieszenie wystąpi, wyznaczenie kąta opiera się na całkowaniu wartości prędkości kątowej, a gdy pojazd zatrzyma się lub porusza się ruchem jednostajnym, ponownie kąty obrotu wyznaczane są na podstawie danego filtra. Niestety ze względu na dosyć duży szum oraz częstotliwość danych o wartości przyspieszenia, algorytm nie zawsze w sposób prawidłowy, pozwalał na określenie stanu, w jakim znajduje się pojazd. Zbyt długi okres obliczeń opartych na żyroskopie, prowadził do wystąpienia dryftu. Z drugiej strony, wyznaczenie wartości kątów przy użyciu filtra, podczas gdy na układ działała niezrównoważona siła, powodowało wyliczenie kąta o zbyt dużej wartości. Ustalenie punktu granicznego, w przypadku tych dwóch filtrów było najtrudniejszym zadaniem.

Można znaleźć wiele opracowań, które wykorzystują metodę pewnego przyspieszenia granicznego [3, 13, 22]. Polega ona na tym, że jeżeli na układ działa pewna niezrównoważona siła to uważa się, że układ zaczął się poruszać w momencie przekroczenia pewnej założonej wartości, przez moduł wektora przyspieszenia w danej chwili. Niestety, metoda ta nie sprawdziła się w pełni, w zastosowaniu opisanym w pracy, ze względu na to, że ruch odbywał się w sposób ciągły, a w przypadku wspomnianych opracowań, ruch odbywał się w ściśle określonym, wyizolowanym od otoczenia cyklu. Również na niekorzyść działa wysoka częstotliwość akwizycji danych, jednak jest ona niezbędna podczas różnego typu badań np. wpływu nawierzchni na zachowanie karoserii pojazdu.

Niestety, pomimo wielu prób nie udało się uzyskać wyniku, który w pełni odpowiadałby rzeczywistym warunkom badania eksperymentalnego. Najlepsze odwzorowanie trajektorii, podczas jazdy po prostej, udało się uzyskać stosując filtr komplementarny. W przypadku ruchu złożonego, najlepszy okazał się filtr Kalmana.

**Bibliografia:**

1. Bieda R., Grygiel R., Wyznaczanie orientacji obiektu w przestrzeni z wykorzystaniem naiwnego filtra Kalmana, Przegląd Elektrotechniczny, R.90 Nr 1/2014, str. 34-41
2. Czyżewski T., Quaternions – Alternative For Euler Angles in Kinematic Analysis of Machine Mechanisms, Technical Transactions, 2-M/2015
3. Du J., Gerdtnan C., Linden M., *Signal Processing Algorithms for Position Measurement with MEMS-Based Accelerometer*, 16<sup>th</sup> Nordic Baltic Conference on Biomedical Engineering, Gothenburg, 2014
4. Euston M., Coote P., Mahony R., Jonghyuk K., Hamel T., *A Complementary Filter for Attitude Estimation of a Fixed-Wing UAV*, ICORaS, Nicea, 2008, str. 340-345
5. Gucma M. *Podstawy Morskiej Nawigacji Inercyjnej*, Wyd. AM, Szczecin, 2006
6. Grygiel R., Bieda R., Wojciechowski K., *Metody wyznaczania kątów z żyroskopów dla filtra komplementarnego na potrzeby określania orientacji IMU*, Przegląd Elektrotechniczny, R.90 Nr 9/2014, str. 217-224
7. Higgins T. W., *A Comparison of Complementary and Kalman Filtering*, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems Vol. AES-11 NO.3, 1975
8. Horn K. P., *Some Notes on Unit Quaternions and Rotation*, 2011
9. Janota A., Šimák V., *Improving the Precision and Speed of Euler Angles Computation from Low-Cost Rotation Sensor Data*, Sensors, 2015, 15, 7016-7039

10. Kędziora K., Krzemień P., Wach W., Application of Accelerometer Sensors for the Measurements of Curvilinear Motion of Vehicle a Comparison of the Results of Simulation and Experiment, Machine Dynamics Research Vol. 36 No.3, 2012, s. 45-52
11. Łuczak S., *Pomiary odchylenia od pionu z użyciem akcelerometrów MEMS*, Pomiary Automatyka Robotyka, 7-8/2008 str. 14-16
12. Madgwick S., *An Efficient Orientation Filter for Inertial and Inertial/Magnetic sensor arrays*, University of Bristol, 2010
13. Manuel O. S., *IMU-based Trajectory Generation and Modeling of 6-DOF Robot Manipulators*, ICoM EaAE, 2015, str. 181 - 186
14. Matzner F., *Tracking of 3D Movement*, praca magisterska, Uniwersytet Praski, Praga, 2014
15. Nota aplikacyjna, Using LSM303DLH for a tilt compensated electronic compass, AN3192
16. Roetenberg D., *Inertial and Magnetic Sensing of Human Motion*, Rozprawa Doktorska, Uniwersytet Twente, 2006
17. Roetenberg D., Luinge H., Baten M., Veltink P., *Compensation of Magnetic Disturbances Improves Inertial and Magnetic Sensing of Human Body Segment Orientation*, Transaction on Neural Systems and Rehabilitation Engineering, Vol. 13/3, VIII 2005, str. 395 – 405
18. Spong M., Hutchinson S., Vidyasagar M., *Robot Dynamics and Control*, 2004
19. Tseng S., Li W., Sheng C., Hsu J., Chen C., *Motion and Attitude Estimation Using Inertial Measurements with Complementary Filter*, ASCC, Kaohsiung, 2011, str. 863-868
20. Wagli A., Skaloud J., *Turning Point. Trajectory Analysis for Skiers*, InsideGNSS, Spring 2007, str. 24-34
21. Wnuk M., *Filtracja Komplementarna w inercyjnych czujnikach orientacji*, Politechnika Wroclawska, Wrocław, 2014
22. Zakrzewski J., Kampik, M. *Sensory i Przetworniki Pomiarowe*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice, 2013
23. Zhi R., *A Drift Eliminated Attitude & Position Estimation Algorithm In 3D*, Graduate College Dissertations and Thesis, 2016
24. <https://forbot.pl/blog/filtr-kalmana-teorii-praktyki-1-id2855>
25. <https://forbot.pl/blog/filtr-kalmana-w-praktyce-3-przyklady-z-kodami-id7342>
26. <http://blog.tkjelectronics.dk/2012/09/a-practical-approach-to-kalman-filter-and-how-to-implement-it/>

---

### The system of acquisition and archiving of motion parameters of mobile systems - mathematical methods, digital filters

The work presents numerical methods and digital filters that enable correction of the measurement signal obtained during experimental tests of vehicle motion parameters. The inertial navigation measuring module used consists of three-axis accelerometers, gyroscopes made in MEMS technology and a magnetometer. The collected measurement data made it possible to refer them to a point in three-dimensional space in order to determine the trajectory of vehicle movement.

The article presents numerical methods of rotation of the local coordinate system to the global system and selected digital filters enabling smoothening the measurement signal in real time.

**Keywords:** Euler's angles, quartered, Kalman filter, Madgwick filter, complementary filter.

**Autorzy:**

dr inż. **Konrad J. Waluś** – Politechnika Poznańska, Wydział Inżynierii transportu, Katedra Podstaw Konstrukcji Maszyn, ul. Piotrowo 3, 60-965 Poznań, [konrad.walus@put.poznan.pl](mailto:konrad.walus@put.poznan.pl)  
mgr inż. **Jakub Grabiński** – Absolwent Politechniki Poznańskiej