ISSN: 2080-5519
wm.ptm.org.pl

WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE

Tom 55 Nr 2 2019

Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria II

rok zał. 1919
ptm
POLSKIE
TOWARZYSTWO
MATEMATYCZNE

Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego zostały utworzone w 1955 roku w celu reaktywowania czasopism założonych w XIX wieku przez Samuela Dicksteina: Prac Matematyczno-Fizycznych, których 48 tomów opublikowano w latach 1888–1951, oraz Wiadomości Matematycznych wydanych w 47 tomach w okresie 1897–1939.

Początkowo Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego ukazywały się w dwóch seriach. Aktualnie wydawane są w następujących sześciu seriach:

Seria I: Commentationes Mathematicae – od 1955 roku,
Seria II: Wiadomości Matematyczne – od 1955 roku,
Seria III: Matematyka Stosowana – od 1973 roku,
Seria IV: Fundamenta Informaticae – od 1977 roku,
Seria V: Didactica Mathematicae – od 1981 roku,
Seria VI: Antiquitates Mathematicae – od 2007 roku.

Seria I, wydawana najpierw jako Prace Matematyczne, swoją obecną nazwę otrzymała w 1969 roku, a Seria V – poprzednio Dydaktyka Matematyki – w 2007 roku.

Sprzedaż i prenumerata

Polskie Towarzystwo Matematyczne
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa

Sales and subscription

Polish Mathematical Society
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa, Poland

Tel. +48 22 629 9592
E-mail: zgptm@ptm.org.pl

Spis treści

Contents

Wiad. Mat. 55 (2) 2019, 271–280

Dorota Gabor, Grzegorz Gabor (Toruń)

Jubileuszowy Zjazd Matematyków Polskich w stulecie PTM, Kraków, 3-7 września 2019

W dniach 3–7 września 2019 roku odbył się Jubileuszowy Zjazd Matematyków Polskich. Okazją do świętowania było stulecie powstania Towarzystwa Matematycznego w Krakowie, które po kilku miesiącach, po przyłączeniu się matematyków z Warszawy i Lwowa, przekształciło się w Polskie Towarzystwo Matematyczne. Zgodnie z tradycją, podobnie jak to było w latach 1969, 1989, 1999 i 2009, na miejsce jubileuszowego spotkania wybrano Kraków.

Bardzo bogaty program Zjazdu obejmował zarówno część ściśle naukową, czyli wykłady zaproszonych gości i referaty w wielu sesjach, panele dyskusyjne poświęcone aktualnym wyzwaniom stojącym przed środowiskiem matematycznym jak i liczne propozycje popularyzatorskie, specjalne „strumienie” dla młodych adeptów matematyki, czyli uczniów i studentów oraz wiele wydarzeń kulturalnych, często w różny sposób nawiązujących do historii polskiej matematyki. Przez pięć dni wygłoszono dwadzieścia osiem wykładów oraz około pięćset referatów naukowych. Oficjalnych uczestników było 852, ale bardzo wiele innych osób, w tym uczniowie, nauczyciele, studenci czy po prostu miłośnicy matematyki, wzięło udział w wybranych sesjach, spotkaniach i wydarzeniach towarzyszących Zjazdowi.

Zjazd został objęty patronatem narodowym prezydenta Rzeczpospolitej Polskiej Andrzeja Dudy. W skład Komitetu Honorowego weszli przedstawiciele władz: Jarosław Gowin (wiceprezes Rady Ministrów, Minister Nauki i Szkolnictwa Wyższego), Piotr Ćwik (wojewoda małopolski), Witold Kozłowski (marszałek województwa małopolskiego), Jacek Majchrowski (prezydent Krakowa), przedstawiciele instytucji naukowych: Zbigniew Błocki (dyrektor Narodowego Centrum Nauki), Jan Ostrowski (prezes Polskiej Akademii Umiejętności), Wacław Marzantowicz (prezes Polskiego Towarzystwa Matematycznego) oraz rektorzy krakowskich uczelni: Andrzej Chochół (Uniwersytet Ekonomiczny), Kazimierz Karolczak (Uniwersytet Pedagogiczny), Jan Kazior (Politechnika Krakowska), Wojciech Nowak (Uniwersytet Jagielloński), Włodzimierz Sady (Uniwersytet Rolniczy) i Tadeusz Słomka (Akademia Górniczo-Hutnicza).

Głównymi organizatorami Zjazdu były Polskie Towarzystwo Matematyczne oraz Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, natomiast współorganizatorami Wydział Matematyki Stosowanej AGH, Centrum Badań Nieliniowych im. J. P. Schaudera, Centrum Badań Układów Złożonych im. M. Kaca, Centrum Badań Stochastycznych im. H. Steinhausa, Instytut Matematyki Politechniki Krakowskiej, Katedra Matematyki Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, Instytut Matematyki Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie, Katedra Zastosowań Matematyki Uniwersytetu Rolniczego w Krakowie i Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego. Przewodniczącym Komitetu Organizacyjnego był prorektor UJ ds. dydaktyki Armen Edigarian.

Pierwszy dzień Zjazdu, wtorek 3 września, miał charakter uroczysty i oficjalny. Uczestnicy zgromadzili się w Auditorium Maximum UJ. W czasie uroczystości rozpoczęcia zostali w ciepłych słowach powitani przez prorektora UJ ds. badań naukowych i funduszy strukturalnych, fizyka Stanisława Kistryna oraz przez prezesa PTM Wacława Marzantowicza. W sposób szczególny witano senatora RP Kazimierza Wiatra, który bardzo mocno przyczynił się do ogłoszenia przez Senat Rzeczpospolitej Polskiej roku 2019 Rokiem Matematyki. Następnie dziekan Wydziału Matematyki i Informatyki UJ Włodzimierz Zwonek odczytał list, który do uczestników skierował wicepremier i Minister Nauki i Szkolnictwa Wyższego Jarosław Gowin.

Po oficjalnych przemówieniach nadszedł ważny moment wręczenia nagród Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Statuetki i dyplomy wręczał prezes PTM. Jako pierwszy został poproszony na scenę laureat Nagrody dla Młodych Matematyków Piotr Miska (UJ), Nagrodę im. Kazimierza Kuratowskiego (przyznawaną wspólnie przez PTM i IM PAN) otrzymał Joachim Jelisiejew (IM PAN), następnie wręczono Nagrody Główne PTM. Michał Krych (UW) otrzymał Nagrodę im. Samuela Dicksteina (za osiągnięcia w dziedzinie edukacji matematycznej, popularyzacji i historii matematyki). Dwie równorzędne Nagrody im. Stefana Banacha (za osiągnięcia w dziedzinie badań matematycznych) trafiły do Wojciecha Kucharza (UJ) oraz Maksyma Radziwiłła (California Institute of Technology). Laureat Nagrody im. Hugona Steinhausa (za osiągnięcia w dziedzinie zastosowań matematyki) Marek Rutkowski (PW, University of Sydney) niestety nie mógł przyjechać. W jego imieniu nagrodę odebrał dziekan Wydziału MiNI PW Wojciech Domitrz. O osiągnięciach Piotra Miski opowiedział jego opiekun naukowy Maciej Ulas (UJ), laudacja poświęcona Joachimowi Jelisiejewowi została przygotowana przez Karola Palkę (IM PAN) a odczytana przez Sławomira Cynka (UJ), zasługi laureatów Nagród Głównych Michała Krycha, Marka Rutkowskiego, Wojciecha Kucharza i Maksyma Radziwiłła przedstawili odpowiednio Krzysztof Ciesielski (UJ), Grzegorz Świątek (PW), Jacek Bochnak (Vrije Universiteit w Amsterdamie) i Mariusz Lemańczyk (UMK).

Kolejny punkt programu był wyjątkowy. Do zacnego grona honorowych członków Polskiego Towarzystwa Matematycznego został włączony Jean-Pierre Bourguignon, w latach 2014–2019 przewodniczący Europejskiej Rady ds. Badań Naukowych (European Research Council), a w latach 1995–1998 Prezes European Mathematical Society. Laudację wygłosił Zbigniew Błocki (UJ, NCN).

Wykład inauguracyjny *Od Gaussa do rozwiązania rzeczywistej hipotezy Fatou, czyli o miejscu, jakie możemy mieć w świecie* wygłosił Paweł Strzelecki (UW). Po nim, w głównym panelu dyskusyjnym im. Zygmunta Janiszewskiego na temat *Stan matematyki polskiej*: *szanse i zagrożenia* udział wzięli Piotr Achinger (IM PAN), Małgorzata Bogdan (UWr), Joanna Kania-Bartoszyńska (National Science Foundation), Jarosław Kędra (Uniwersytet w Aberdeen), Wacław Marzantowicz (UAM, PTM). Paneliści starali się zdiagnozować stan matematyki w Polsce na tle innych dziedzin nauki oraz na tle matematyki na świecie oraz odpowiedzieć na pytanie, czy środowisko polskich matematyków może jakoś wpływać na poprawę tego stanu. Rozmawiano też o finansowaniu, możliwościach rozwoju, problemach związanych z mobilnością i kształceniu zdolnej młodzieży.

Rozmowy były kontynuowane w kolejnych panelach, odbywających się już równolegle i poświęconych bardziej szczegółowym tematom: *Matematyka stosowana – jak to robią za granicą*, *Matematyka piękna i potrzebna, czyli jak ją popularyzować*, *Dydaktyka matematyki na styku różnych poziomów edukacji* oraz *O kształceniu nauczycieli oraz kluczowych problemach nauczania matematyki*, który odbył się w czwartek 5 września w sesji tematycznej *Dydaktyka matematyki*.

W środę 4 września w Auditorium Maximum UJ oraz w czwartek 5 września przed południem w budynku Wydziału Matematyki i Informatyki UJ odbyło się dwadzieścia osiem wykładów zaproszonych gości. Zaproszenia zostały skierowane do osób, które wcześniej wygłaszały wykłady na Międzynarodowych Kongresach Matematyków, Europejskich Kongresach Matematycznych lub zdobyły grant Europejskiej Rady ds. Badań Naukowych i prawie wszyscy je przyjęli. Poniżej, w kolejności alfabetycznej, wymienieni są wykładowcy i tytuły ich wystąpień.

- Piotr Achinger (IM PAN, Warszawa), *Typy homotopii w geometrii algebraicznej*,
- Hélène Frankowska (Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, Francja), *Sterowanie optymalne oraz inkluzje różniczkowe*,
- Krzysztof Gawędzki (École Normale Supérieure de Lyon, Francja), *Druga zasada termodynamiki dla procesów stochastycznych a transport optymalny, czyli ile kosztuje puszczenie w niepamięć*,
- Łukasz Grabowski (Lancaster University, Wielka Brytania), *Granice grafów rzadkich i ich zastosowania*,
- Tadeusz Iwaniec (Syracuse University, USA), *Granice homeomorfizmów Soboleva i przekształcenia o najmniejszej energii*,
- Tadeusz Januszkiewicz (IM PAN, Wrocław), *Topologia toryczna i geometryczna teoria grup*,
- Jerzy Kaczorowski (UAM), *Analiza zespolona na usługach arytmetyki, czyli o analitycznej teorii liczb*,
- Sławomir Kołodziej (UJ), *Równanie Monge'a–Ampère'a w geometrii zespolonej*,
- Wojciech Kucharz (UJ), *Aproksymacja algebraiczna odwzorowań*,
- Krystyna Kuperberg (Auburn University, USA), *Hipotezy Seiferta*,
- Krzysztof Kurdyka (Université de Savoie, Francja), *O nierównościach dla trajektorii gradientu*,
- Rafał Latała (UW), *Logarytmicznie wklęsłe wektory losowe*,
- Tomasz Łuczak (UAM), *Losowość i pseudolosowość*,
- Anna Marciniak-Czochra (Heidelberg University), *Rola mechanistycznych modeli matematycznych w medycynie na przykładzie modelowania białaczek*,
- Ludomir Newelski (UWr), *Teoria modeli i dynamika topologiczna*,
- Wiesława Nizioł (École Normale Supérieure de Lyon, Francja), *p-adyczna teoria Hodge'a*,
- Piotr Nowak (IM PAN, Warszawa), *Analiza na grupach*: *operatory Laplace'a, reprezentacje i sztywność*,
- Tomasz Nowicki (IBM, USA), *Hamiltonian Markov Chains*: *sampling, dynamics and stability*,
- Feliks Przytycki (IM PAN, Warszawa), *Iteracje przekształceń, fraktale, metody formalizmu termodynamicznego*,

- Maksym Radziwiłł (Caltech, USA), *Pewne kierunki nowoczesnej analitycznej teorii liczb*,
- Agata Smoktunowicz (University of Edinburgh, Wielka Brytania), *Pierścienie macierzowe i równanie Yanga–Baxtera*,
- Sławomir Solecki (Cornell University, USA), *Dynamika grup polskich, koncentracja miary i podmiary*,
- Stanisław Szarek (Case Western Reserve University, USA), *Kiedy Alicja i Bob spotkali Banacha*,
- Piotr Śniady (IM PAN, Warszawa), *Teoria reprezentacji grup permutacji. Nowa nadzieja*,
- Grzegorz Świątek (PW), *Rozbieżne pojęcia typowości w układach dynamicznych*,
- Nicole Tomczak-Jaegermann (University of Alberta, Kanada), *Struktura liniowa i geometria podprzestrzeni i przestrzeni ilorazowych dla przestrzeni unormowanych dużego wymiaru*,
- Jarosław Włodarczyk (Purdue University, USA), *Rozwiązywanie osobliwości rozmaitości algebraicznych i ich przekształceń*,
- Jerzy Zabczyk (IM PAN, Warszawa), *Sterowalność ze znikającą energią*.

Równolegle w budynkach Uniwersytetu Pedagogicznego trwał „strumień popularyzatorski": wykłady, prelekcje, warsztaty oraz finał Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki im. Pawła Domańskiego. Przy okazji zaplanowano też wręczenie nagrody w Konkursie im. Anny Zofii Krygowskiej na najlepszą pracę studencką z dydaktyki matematyki w edycji 2018.

Od czwartkowego popołudnia ruszyły intensywne spotkania w dwudziestu czterech naukowych sesjach tematycznych, które trwały aż do końca Zjazdu. Sesjom patronowali wybitni polscy matematycy zasłużeni w poszczególnych dziedzinach, a organizowali je specjaliści aktualnie w nich pracujący. Warto przywołać tu przynajmniej nazwy (w porządku alfabetycznym) i patronów tych sesji, by zilustrować bogactwo wkładu Polaków w rozwój matematyki na świecie. W nawiasach podane są nazwiska koordynatorów sesji.

- Analiza funkcjonalna – S. Banach, S. Mazur, A. Pełczyński (Michał Wojciechowski, Przemysław Wojtaszczyk),
- Analiza harmoniczna – J. Marcinkiewicz, A. Rajchman, A. Zygmund (Marcin Bownik, Leszek Skrzypczak, Ziemowit Rzeszotnik),
- Analiza nieliniowa i równania różniczkowe cząstkowe – J. P. Schauder, S. Zaremba (Piotr Gwiazda, Marek Izydorek, Wojciech Kryszewski),
- Analiza zespolona – F. Leja (Sławomir Dinew, Marek Jarnicki, Łukasz Kosiński),
- Dydaktyka matematyki – Z. Krygowska (Jacek Dymel, Ewa Swoboda),

- Filozofia matematyki – S. Leśniewski, J. Łukasiewicz (Stanisław Krajewski, Roman Murawski),
- Fizyka matematyczna – M. Kac, S. Ulam (Marek Bożejko, Maciej Nowak, Piotr Sułkowski),
- Geometria algebraiczna – A. Rosenblatt (Piotr Achinger, Sławomir Cynk, Jarosław Wiśniewski),
- Geometria różniczkowa i grupy Liego – S. Gołąb, A. Hoborski, W. Ślebodziński (Janusz Grabowski, Barbara Opozda, Paweł Walczak),
- Historia matematyki – S. Dickstein (Danuta Ciesielska, Lech Maligranda),
- Kombinatoryka i kryptologia – M. Rejewski, J. Różycki, H. Zygalski (Stefan Dziembowski, Jarosław Grytczuk, Jerzy Jaworski),
- Logika i informatyka teoretyczna – A. Tarski (Krzysztof Apt, Mikołaj Bojańczyk, Paweł Idziak),
- Matematyka obliczeniowa – A. Kiełbasiński (Bolesław Kacewicz, Leszek Plaskota, Henryk Woźniakowski),
- Metody probabilistyczne i stochastyczne – H. Steinhaus (Krzysztof Bogdan, Ben Gołdys, Szymon Peszat, Rafał Weron),
- Metody topologiczne równań różniczkowych – T. Ważewski (Tomasz Kaczyński, Marian Mrozek, Roman Srzednicki, Piotr Zgliczyński),
- Podstawy matematyki, teoria mnogości i topologia ogólna – K. Kuratowski, E. Marczewski (Szpilrajn), A. Mostowski (Zofia Adamowicz, Krzysztof Krupiński, Witold Marciszewski, Grzegorz Plebanek),
- Statystyka – J. Spława-Neyman (Małgorzata Bogdan, Teresa Ledwina, Jan Mielniczuk),
- Teoria ergodyczna – C. Ryll-Nardzewski, E. Sąsiada (Tomasz Downarowicz, Krzysztof Frączek, Mariusz Lemańczyk),
- Teoria liczb – W. Sierpiński (Grzegorz Banaszak, Łukasz Pańkowski, Tomasz Schoen),
- Teoria operatorów – A. Alexiewicz, W. Mlak, W. Orlicz (Henryk Hudzik, Jerzy Kąkol, Grzegorz Lewicki, Mieczysław Mastyło, Jan Stochel),
- Teoria osobliwości – S. Łojasiewicz (Stanisław Janeczko, Tadeusz Mostowski, Adam Parusiński, Wiesław Pawłucki, Zbigniew Szafraniec),
- Topologia, geometria i algebra homologiczna – K. Borsuk, S. Eilenberg (Jerzy Dydak, Stefan Jackowski, Józef Przytycki, Henryk Toruńczyk),
- Układy dynamiczne – W. Szlenk (Krzysztof Barański, Jacek Graczyk, Anna Zdunik),
- Zastosowania – A. Lasota (Jacek Miękisz, Ryszard Rudnicki, Tomasz Szarek).

Przez cały czwartek trwała też sesja posterowa oraz „strumień studencki", który miał co prawda status wydarzenia towarzyszącego Zjazdowi, ale z powodzeniem może być traktowany jako kolejna sesja naukowa. Przy tej okazji wręczono też nagrody w Konkursie im. Witolda Wilkosza na najlepszą pracę studencką popularyzującą matematykę oraz w konkursie *Matematyka mi w duszy gra* na piosenkę związaną z matematyką.

Uczestnicy „strumienia edukacyjnego", przeznaczonego przede wszystkim dla nauczycieli, mogli – po jego zakończeniu – wziąć udział we wspomnianej wcześniej dyskusji panelowej odbywającej się w sesji *Dydaktyka matematyki*, a potem posłuchać referatów w jednej z dwóch bardzo interesujących sesji specjalnych, które odbywały się w czwartkowe popołudnie.

Pierwsza z nich – *Zadania olimpijskie niezwykłej urody* – koordynowana przez Krzysztofa Ciesielskiego, cieszyła się sporym zainteresowaniem i zgromadziła bardzo wielu młodych i nieco starszych sympatyków Olimpiady Matematycznej.

Druga sesja specjalna – *Pogromcy Enigmy* – rozpoczęła się ze sporym opóźnieniem, ponieważ pierwszy mówca – Dermot Turing, autor książki *X, Y, Z. Prawdziwa historia złamania szyfru Enigmy* – nie był w stanie dotrzeć na czas. Duże zainteresowanie, z jakim spotkały się wcześniejsze wydarzenia z jego udziałem (wystąpienie dla młodzieży w czasie wcześniejszej mikrokonferencji dla uczniów oraz konferencja prasowa), spowodowało ich przedłużenie. Dodatkową atrakcją, już po zakończeniu sesji, była możliwość nabycia wspomnianej książki i zdobycia autografu autora – kolejka była długa...

Na kolejne dwa dni spotkania Zjazdu zostały zaplanowane w budynkach Akademii Górniczo-Hutniczej. Poza sesjami imiennymi pojawiły się tam kolejne sesje specjalne: *Matematyka w ekonomii i finansach* (koordynowana przez Jacka Osiewalskiego i Agnieszkę Wiszniewską-Matyszkiel), w ramach której wygłoszono aż pięćdziesiąt dwa referaty oraz *Forum informatyki teoretycznej 2019* (koordynowana przez Macieja Bendkowskiego, Jakuba Kozika, Bartosza Walczaka; dwadzieścia cztery referaty).

W piątek 6 września w specjalny sposób uhonorowano polskich kryptologów Mariana Rejewskiego, Jerzego Różyckiego oraz Henryka Zygalskiego, którzy złamali kod Enigmy. W Panteonie Narodowym przy kościele Świętych Apostołów Piotra i Pawła w Krakowie w jednym sarkofagu złożono urny z ziemią z miejsc związanych z ich śmiercią, czyli z okolic grobu na Powązkach, z dna Morza Śródziemnego oraz z Chichester.

Każdego dnia wieczorem uczestnicy mieli okazję spotkania z innym rodzajem muzyki.

Na zakończenie pierwszego dnia Zjazdu wystawiono *Operę matematyczną, czyli paradoksalny rozkład sfery* – multimedialne widowisko, którego autorem jest Roman Kołakowski. Przedstawienie to zostało sfinansowane przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego i było, jak powiedział przed spektaklem Jarosław Gowin, wyrazem wdzięczności tego ministerstwa dla całego środowiska matematycznego.

Miłośnicy jazzu mogli posłuchać koncertu Boba Jazz Band w środowy wieczór, a następnego dnia bankietowi w Zamku Królewskim w Niepołomicach towarzyszył recital Jacka Wójcickiego. Wyjątkowym wydarzeniem był koncert fortepianowy Pera Enflo. Jest on znakomitym matematykiem, znanym w Polsce również z tego, że w 1972 roku otrzymał z rąk Stanisława Mazura żywą gęś – nagrodę za rozwiązanie problemu z Księgi Szkockiej, postawionego w 1936 roku, ale także zawodowym pianistą.

Zjazdowi towarzyszyło dwanaście wystaw w różny sposób związanych z matematyką. W stulecie działalności PTM oczywista była obecność wystaw nawiązujących do historii.

Kilka z nich było dostępnych krótko i w miejscach spotkań zjazdowych. W Auditorium Maximum UJ:

– *Założyciele Towarzystwa Matematycznego w Krakowie i działalność PTM do 1936 r.*,
– *O matematyce i matematykach w 100-lecie Polskiego Towarzystwa Matematycznego*,
– *Obrazy z historii polskiej nauki. Matematycy, fizycy i astronomowie na Uniwersytecie w Getyndze (1895–1933)*,

a w następnych dniach w budynku WMiI UJ można było obejrzeć wystawę zatytułowaną *Polska nauka w 20-leciu międzywojennym*, natomiast w budynku AGH wystawę upamiętniającą założycieli PTM.

Inne, skierowane do szerszej publiczności, były zorganizowane niezależnie, ale miały status imprez towarzyszących Zjazdowi i trwały przez kilka tygodni.

W Bibliotece Jagiellońskiej zainaugurowano dwie wystawy, które w interesujący sposób promowały matematykę i jej historię: *Szyfry, kody, cyfry* poświęconą polskim uczonym – matematykom, informatykom i kryptologom w II Rzeczpospolitej oraz przygotowaną w bardzo ciekawy sposób i wyjątkową wystawę *Matematyka na znaczkach pocztowych*.

Różne przyrządy lub ich wierne repliki, wspomagające obliczenia zanim rozpowszechniły się komputery, można było oglądać w Collegium Maius UJ na wystawie *Machinae Calculatoriae*.

Okazją zobaczenia, jak matematyka inspiruje artystów, była wystawa *Formy i liczby* prezentowana w kilku miejscach: Galerii ASP, Galerii Promocyjnej i Galerii Pryzmat oraz na pokonkursowej wystawie fotograficznej *Matematyka w obiektywie*. Piękne nie tylko artystycznie, ale i matematycznie obiekty można było oglądać na wystawie MAPA, czyli Matematyka Artystycznie Papierem Abstrahowana w korytarzach budynku WMiI UJ.

Poza tym zorganizowano wystawę wydawnictw matematycznych.

Była też okazja do obejrzenia filmów. Wieczorem w przeddzień inauguracji Zjazdu zorganizowano dla uczestników przedpremierowy pokaz specjalny filmu Wiesława Saniewskiego *Banach. Między duchem a materią*, a w trakcie Zjazdu ogólnodostępne pokazy filmów Krzysztofa Langa *Przestrzenie Banacha* i Waldemara Stankiewicza *Polscy pogromcy Enigmy*.

Uroczyste zakończenie i podsumowanie Jubileuszowego Zjazdu Matematyków w stulecie PTM było okazją do wręczenia Dyplomu Zarządu Głównego PTM Antoniemu Leonowi Dawidowiczowi, honorowemu przewodniczącemu Komitetu Organizacyjnego Zjazdu, za całą wieloletnią pracę na rzecz Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

Można też było trochę „od kuchni" zobaczyć wielkość całego przedsięwzięcia, jakim był Zjazd. W swoim przemówieniu prezes PTM Wacław Marzantowicz przedstawił informacje statystyczne, a na końcu podziękował organizatorom, wielu z nich wymieniając imiennie, i zaprosił ich na scenę. I tu można było zobaczyć, jak wiele osób przyczyniło się do tego, by spotkanie matematyków w Krakowie było tak udanym wydarzeniem, ponieważ mimo nieobecności niektórych osób i tak organizatorzy ledwie się na scenie zmieścili.

Jubileuszowy Zjazd Matematyków w Krakowie był bez wątpienia wydarzeniem historycznym, a przy tym świetnie zorganizowaną konferencją naukową z imponującą liczbą wydarzeń towarzyszących, z których wiele w różny sposób skierowanych było do znacznie szerszej niż uczestnicy Zjazdu grupy osób. Ogrom pracy koniecznej do tego, by wszystko zaplanowane z takim rozmachem mogło przebiegać bez przeszkód mogą sobie wyobrazić tylko ci, którzy kiedykolwiek organizowali konferencję. Dlatego w imieniu uczestników przekazujemy podziękowania wszystkim formalnym i nieformalnym organizatorom, a szczególnie Klaudiuszowi Wójcikowi, Leokadii Białas-Cież, Wojciechowi Słomczyńskiemu, Beacie Palce, Dagmarze Waszkiewicz i Agnieszce Dudek.

Patronaty medialne objęły: Radio RMF Classic, Radio RMF FM, Telewizja TVP3 Kraków oraz miesięcznik Forum Akademickie.

Głównym Sponsorem Zjazdu było Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego, także w ramach Programu Dialog. Konferencję wsparł również Brown Brothers Harriman (Poland) jako Złoty Sponsor. Srebrnymi Sponsorami była Polska Akademia Nauk oraz Sokołów S.A. Zjazd był sponsorowany również

przez Miasto Kraków, BNP Paribas Bank Polska S.A. oraz firmę Jane Street. Wszystkim sponsorom uczestnicy i organizatorzy Zjazdu składają serdeczne podziękowania.

Dorota Gabor
dgabor@mat.umk.pl

Grzegorz Gabor
ggabor@mat.umk.pl

Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Wiad. Mat. 55 (2) 2019, 281–302

Grzegorz Nowik (Warszawa)

Lingwistyczny i matematyczny atak na szyfry kluczem polskich sukcesów w zakresie kryptoanalizy w XX wieku

1. Od Rewolucji do Enigmy

Profesor David Khan, wybitny badacz i znawca dziejów kryptoanalizy, uważa, że jednym z największych sukcesów w dziedzinie dekryptażu (czyli łamania szyfrów i kodów) było złamanie systemu utajniania korespondencji przez niemiecką maszynę szyfrową Enigma, wprowadzoną w niemieckich siłach zbrojnych w drugiej połowie lat dwudziestych XX wieku i stosowaną aż do końca II wojny światowej. Racjonalni oficerowie niemieccy, wiedząc, że liczba kombinacji szyfrowych tworzonych przez Enigmę jest większa od liczby atomów w kosmosie, albo też sekund, jakie upłynęły od Wielkiego Wybuchu (czyli początku wszechświata), twierdzili, że odczytanie szyfrogramów Enigmy jest całkowicie niemożliwe.

A jednak polskie Biuro Szyfrów Sztabu Głównego Wojska Polskiego dokonało tego pod koniec 1932 roku, stosując lingwistyczny i matematyczny atak na szyfr. Francuskie i brytyjskie zespoły kryptoanalityków, które stosowały jedynie pierwszy rodzaj ataku, nie były w stanie rozwiązać metody szyfrowania zastosowanej w Enigmie. Pozostaje więc zadać pytanie, jak doszło do tego sukcesu, skąd zaczerpnięto zamysł takiego podwójnego ataku, dlaczego zatrudniono do łamania szyfrów matematyków.

Dodać należy, że pracownicy Wydziału BS „Niemcy" w polskim Biurze Szyfrów (BS-4), Oddziału II Informacyjnego (Wywiadowczego) SG WP to właśnie trzej matematycy: Marian Rejewski, Jerzy Różycki i Henryk Zygalski, absolwenci Wydziału Matematyki Uniwersytetu Poznańskiego. To dzięki ich pracy i sukcesowi zwycięstwo aliantów w II wojnie światowej zarówno dokonało się szybciej, jak i też kosztowało mniej istnień ludzkich oraz nakładów finansowych. Decyzje alianckich sztabów były racjonalne, podejmowane były bowiem na podstawie szerokiego spektrum wiedzy płynącej wprost od przeciwnika, dającej wgląd w plany oraz działania sił zbrojnych niemieckiej III Rzeszy.

Jak do tego doszło? Otóż zrekonstruowane – na podstawie odtworzonego matematycznie schematu ideowego (w tym głównie połączeń elektrycznych w tzw. „bębenkach szyfrowych") – maszyny Enigma, wraz z metodami łamania szyfrów i urządzeniami pomocniczymi, zostały w lipcu 1939 roku przekazane wywiadom wojskowym Francji i Wielkiej Brytanii, które stworzyły – dzięki tej wiedzy – system szeroko zorganizowanego nasłuchu radiowego, łamania szyfrów oraz dystrybucji otrzymanych wiadomości zwany Ultra.

Ale źródło sukcesów aliantów nie byłoby możliwe, gdyby nie specyficznie polskie doświadczenia w dziedzinie kryptoanalizy, wynikające właśnie z wykorzystania podwójnego, lingwistycznego i matematycznego ataku na szyfry. Stosowali go w latach 1919–1920 oficerowie Wojska Polskiego oraz polscy profesorowie matematyki, do łamaniu szyfrów rosyjskich podczas wojny z bolszewicką Rosją. Symbolem ówczesnego sukcesu jest szyfr Rewolucja, wprowadzony w Armii Czerwonej 12 sierpnia 1920 roku, w przededniu szturmu Warszawy. Szyfr ten, dwukrotnego przekształcenia, złamany został w ciągu kilku godzin przez polskiego oficera, porucznika Jana Kowalewskiego, oraz profesora matematyki Stefana Mazurkiewicza z Uniwersytetu Warszawskiego. Złamanie tego szyfru, tak jak wielu innych – wcześniej i później – używanych w „czerwonej" Rosji, dało najwyższym polskim władzom wojskowym i cywilnym szczególny oręż umożliwiający, a przynajmniej ułatwiający pokonanie bolszewickiej Rosji w 1920 roku. Rozszyfrowanie Rewolucji oznaczało nie tylko złamanie kolejnego klucza szyfrowego, ale również – w sposób symboliczny – zatrzymanie pod Warszawą pochodu proletariackiej rewolucji bolszewickiej niesionej na zachód Europy na bagnetach Armii Czerwonej.

Rosjanie podczas wojny z Polską zmieniali klucze szyfrowe przeciętnie co dwa tygodnie, dziesięć dni, a nawet co tydzień, na tyle oceniając polskie zdolności w łamaniu szyfrów. Po tym bowiem terminie zdobyte informacje dezaktualizowały się, jak gazeta sprzed dwóch tygodni lub dziesięciu dni. Tymczasem polskie Biuro Szyfrów łamało nowo wprowadzane rosyjskie klucze szyfrowe początkowo w ciągu dwóch–trzech dni, a następnie w ciągu dwóch–trzech godzin... Łamało je systematycznie aż do 1947 roku.

Złamanie niemieckiej Enigmy było możliwe dzięki wcześniejszemu złamaniu Rewolucji i wielu innych rosyjskich szyfrów oraz wspomnianej już swoistej metodzie, zastosowanej po raz pierwszy w Polsce i przez Polaków. To, co zapoczątkowane zostało w Polsce w 1919 roku w odniesieniu do szyfrów rosyjskich, przyniosło tak bogate owoce w 1932 roku, gdy sekcja BS-4 (szyfry niemieckie) Biura Szyfrów zaczęła odczytywać szyfrogramy utajniane za pomocą Enigmy. Była to prosta konsekwencja doświadczeń z lat 1919–1920, prowadzących do tego, że przyszłych pogromców Enigmy w arkana kryptografii wprowadzali starsi koledzy łamiący rosyjskie szyfry z lat 1919–1920, w tym ci, którzy 12 sierpnia 1920 roku złamali Rewolucję. To oni w strukturach utworzonego w końcu 1918 roku Biura Szyfrów przechowali wiedzę o tej metodzie i swoje doświadczenie przekazali następcom.

Jak doszło więc do pierwszego w XX wieku polskiego ataku na szyfry rosyjskie? Aby zrozumieć, że nie był to jedynie skutek zbiegu okoliczności, geniusz wybitnych jednostek, ale też konsekwencja celowych i zamierzonych działań, należy cofnąć się do 10 listopada 1918 roku. W niedzielę, w mglisty poranek, około godziny siódmej, na Dworzec Wiedeński w Warszawie (vis à vis Hotelu Polonia, tu gdzie obecnie znajduje się dworzec podmiejski Warszawa-Śródmieście), po szesnastu miesiącach niemieckiego uwięzienia w twierdzy w Magdeburgu powrócił do stolicy komendant Józef Piłsudski. Nazajutrz, 11 listopada 1918 roku, Rada Regencyjna przekazała mu władzę nad Wojskiem Polskim, a 14 listopada złożyła w jego ręce odpowiedzialność za losy Narodu i odradzającego się Państwa Polskiego. Jedną z pierwszych decyzji, jakie podjął Wódz Naczelny, był rozkaz odnalezienia Józefa Rybaka.

2. Wywiad i radiowywiad

Oprócz polecenia odnalezienia Józefa Rybaka, Józef Piłsudski natychmiast po objęciu obowiązków Wodza Naczelnego nakazał szybkie rozbudowanie Oddziału Informacyjno-Wywiadowczego Sztabu Generalnego Wojska Polskiego (SG WP). Szefem Oddziału został 12 grudnia 1918 roku właśnie przybyły z Wiednia do Warszawy ppłk Józef Rybak, były oficer austro-węgierskiego Sztabu Generalnego. Dlaczego on? Józef Piłsudski miał dlań wiele szacunku i sympatii z czasów, gdy Rybak, jako młody kapitan CK armii austro-węgierskiej, był – przed 1914 rokiem – szefem wywiadu wojskowego (Haupt Kundschaft Stellen – HK Stelle) w sztabie krakowskiego korpusu wyznaczony do kontaktów z towarzyszem „Wiktorem" (czyli właśnie Józefem Piłsudskim), ówczesnym emigrantem politycznym z zaboru rosyjskiego, kierownikiem polskiej irredenty i antyrosyjskiego ruchu wojskowo-niepodległościowego w Galicji. Już wówczas Komendant dostrzegł w kapitanie Rybaku polskiego patriotę w mundurze zaborcy i zdania tego nie zmienił. Zobaczył w nim człowieka, który wiedział i domyślał się więcej niż meldował swym władzom, stając się bardziej lojalny wobec Józefa Piłsudskiego niż względem swych austriackich mocodawców. Z drugiej strony Komendant widział w nim fachowca, który miał zorganizować centralę polskiego wywiadu na wzór i podobieństwo Ewidenzbiuro austro-węgierskiego Sztabu Generalnego oraz pozyskać do niej swych kolegów-fachowców.

Podpułkownik Rybak za punkt honoru poczytywał sobie pozyskanie najlepszych specjalistów z wywiadu austro-węgierskiego. Do służby w Oddziale Informacyjno-Wywiadowczym SGWP wciągnął kolegę, najlepszego znawcę spraw Rosji, w tym także rewolucyjnej, który wiedział o niej więcej niż ktokolwiek inny w tym czasie, nie tylko w Polsce, ale i w Europie. Był nim major Sztabu Generalnego Karol Bołdeskuł, oficer radiowywiadu, a następnie od jesieni 1915 roku do sierpnia 1917 roku, szef radiowywiadu państw centralnych na froncie wschodnim.

Przez niemal dwa lata mjr Bołdeskuł kierował działaniami kilku grup radiostacji (Radiogruppe) austriackich i niemieckich (liczących po kilka radiostacji nasłuchowych i radiogoniometrycznych) monitorujących rosyjskie sieci radiowe między Rygą a Odessą, przejmujących całą ich jawną i tajną korespondencję operacyjną, dyplomatyczną i wewnętrzną. Następnie w komórkach kryptoanalitycznych austro-węgierskiego Biura Szyfrów korespondencja ta była poddawana dekryptażowi. Było to dla państw centralnych niezwykle cenne – bodaj najcenniejsze – źródło informacji o carskich wojskach rosyjskich podczas I wojny światowej. Było jednym ze źródeł przewagi państw centralnych oraz zwycięstw nad Rosją na froncie wschodnim. Mimo że na froncie tym wojskami koalicyjnymi (niemieckimi i austro-węgierskimi) naczelne dowództwo sprawowali Niemcy, radiowywiad pozostał w rękach austro-węgierskich, a w strukturach Abhorchdienst (nasłuchu radiowego) oraz w komórkach szyfrowych służyło wielu oficerów Polaków. Dzięki temu doświadczeniu Bołdeskuł nie tylko znał doskonale metody działania radiowywiadu, ale również był bardzo dobrze zorientowany w funkcjonowaniu rosyjskiej radiotelegrafii (tzw. zasad organizacji sieci radiowych i struktur ruchu radiowego, zakresów fal, sygnałów wywoławczych i innych procedur, a nawet zwyczajów). Znał również nazwiska kadry dowódczej i oficerów radiotelegrafii rosyjskiej (zestawiane w specjalnych broszurowych wykazach wraz z OdeB radiostacji), a także stosowane przez Rosjan systemy szyfrowe. Po rewolucji lutowej 1917 roku widział w eterze proces rozpadu starej armii carskiej, rozpadu państwa oraz anarchii ogarniającej rozległe imperium Romanowów. Obserwował wykorzystanie radiotelegrafii w szerzeniu propagandy, w tym także bolszewickiej oraz początki wojny domowej w Rosji. Słowem, Bołdeskuł był w ówczesnej Europie wybitnym znawcą nie tylko rosyjskiej radiotelegrafii, ale również Rosji i wojsk rosyjskich po obu stronach frontu wojny domowej.

Piłsudski, jako Wódz Naczelny, doskonale zdawał sobie sprawę z wagi wywiadu wojskowego, a szczególnie czerpania informacji (dzięki radiowywiadowi) u źródła, od samego przeciwnika. Wiedział też, jaką rangę ma nie tylko stosowanie w Wojsku Polskim różnorodnych systemów utajniania korespondencji operacyjnej, ale także podejmowanie prób przechwytywania korespondencji przeciwnika i prób jej odczytania. Miał wszak ogromne, wieloletnie doświadczenia konspiracyjne. Ryszard Świętek, w swym dziele *Lodowa Ściana. Sekrety Polityki Józefa Piłsudskiego*, wymienił kilka różnych szyfrów oraz systemów kodowych do utajniania korespondencji, jakie stosowane były w PPS i jej Organizacji Bojowej. Całe środowisko byłych konspiratorów, wywodzących się z PPS i OB PPS oraz Polskiej Organizacji Wojskowej, gdzie praktyką było szyfrowanie korespondencji organizacyjnej, podjęło służbę w Wojsku Polskim na różnych szczeblach, szczególnie obficie zasilając szeregi służby informacyjno-wywiadowczej. Wielu z nich, przynajmniej teoretycznie, miało okazję zapoznać się z zagadnieniem szyfrów na łamach *Przeglądu Wojskowego* wydawanego w Legionach lub w Szkole Podchorążych Polskiej Siły Zbrojnej, gdzie nauczano o radiotelegrafii i konieczności szyfrowania tekstów, a także metodach podsłuchu (telefonicznego i telegraficznego) oraz nasłuchu (radiotelegraficznego), dla uzyskania informacji o nieprzyjacielu bezpośrednio od niego samego.

3. Początki polskiej radiotelegrafii

W tym samym czasie, na początku listopada 1918 roku, pierwszy szef służby łączności odradzającego się Wojska Polskiego, mjr inż. Kazimierz Drewnowski, absolwent Politechniki we Lwowie, Zurychu i Darmstadt, dowódca formacji łączności w Legionach i Polskiej Sile Zbrojnej (przyszły rektor Politechniki Warszawskiej), polecił ppor. inż. Kazimierzowi Jackowskiemu (zwanemu „Jackiem"), absolwentowi Politechniki Lwowskiej i Monachijskiej, byłemu oficerowi rezerwy radiotelegrafii rosyjskiej – rejestrację oficerów, podoficerów i żołnierzy służących podczas wojny światowej w formacjach radiotelegraficznych państw zaborczych.

W tym czasie istniały już w Polsce – na Politechnice Warszawskiej i Politechnice Lwowskiej – Wydziały Elektryczne prowadzące badania nad radiotelegrafią, choć zaledwie osiem lat wcześniej, w 1909 roku, Włoch Guglielmo Marconi otrzymał nagrodę Nobla w dziedzinie fizyki za wynalazek polegający na przekazaniu impulsu elektrycznego na odległość bez użycia metalowego przewodu. Dlatego początkowo nazywano jego wynalazek „telegrafem bez drutu". Nie była to jeszcze radiofonia w takiej formie, jaką ma współczesne radio, gdy przekazuje się dźwięk na odległość, czy telewizja – gdzie przekazuje się obraz. Była to radiotelegrafia, w której porozumiewano się przy pomocy alfabetu Morse'a. Ówczesna nadawcza aparatura radiowa wytwarzała impulsem elektrycznym falę elektromagnetyczną powodującą powstanie w odbiorniku dźwięku, przypominającego buczenie (lub trzask), który dzięki zastosowaniu tzw. *klucza* (zamykającego obwód elektryczny) oddawał krótsze (kropki) i dłuższe (kreski alfabetu Morse'a), tak samo, jak w telegrafie przewodowym.

Specjalność ta była tak nowa i rzadka, że oficerów radiotelegrafii we wszystkich ówczesnych armiach (w tym i w polskim wojsku) było mniej niż pilotów w lotnictwie. Dlatego por. Jackowski zarejestrował wszystkich wykładowców i studentów radiotechniki Politechniki Warszawskiej, a 10 listopada w gazetach warszawskich zamieścił ogłoszenie: „[b]aczność! Dla objęcia radiotelegraficznej stacji w Cytadeli potrzebni są niezwłocznie zdolni żołnierze radiotelegrafiści. Zgłaszać się do ppor. inż. K. Jackowskiego – Śniadeckich 4 m. 3". Wkrótce po tym, w prywatnym mieszkaniu Jackowskiego, zameldowali się byli oficerowie z armii rosyjskiej – porucznik Bronisław Sroka (dowódca oddziału „radio" w I Korpusie Polskim w Rosji) oraz podporucznicy Jan Sawicki i Eugeniusz Rzymowski.

Wybudowana przez Niemców w latach 1915–1916 radiostacja warszawska (o sygnale wywoławczym „WAR") ulokowana była w zewnętrznym forcie Cytadeli (obecnie u wylotu Alei Wojska Polskiego na Żoliborzu), a jej antenę rozpięto na dwóch siedemdziesięciometrowych stalowych masztach ustawionych na dwóch sąsiednich bastionach wału fortecznego. Była ona ogniwem tranzytowym dla utrzymywania łączności między Berlinem a dowództwem wojsk niemieckich na wschodzie (Ober Ost) w Brześciu Litewskim via Warszawa i Poznań oraz innymi dowództwami i miastami. Jej zasięg – do półtora tysiąca kilometrów – umożliwiał nawiązanie łączności ze stolicami większości państw europejskich, od Moskwy po Londyn, Paryż, Rzym, Bałkany i Skandynawię. Zdobycie nieuszkodzonej radiostacji otwierało odradzającej się Polsce okno na świat, a z drugiej strony umożliwiało czerpanie z eteru aktualnej wiedzy o wszystkim, co działo się owej burzliwej „jesieni ludów" w Europie.

Po zdobyciu radiostacji, nocą z 18 na 19 listopada, nowa, polska już załoga nawiązała łączność ze szwedzką radiostacją „Saj" w Karlsborgu i za jej pośrednictwem por. Bronisław Sroka na zmianę z sierżantem Janem Pradellokiem nadali do Paryża podpisaną dwa dni wcześniej i przetłumaczoną na język francuski depeszę, notyfikującą rządom państw wojujących i neutralnych powstanie niepodległego państwa polskiego. Ślązak Jan Predellok, z niemieckiej załogi radiostacji, który wbrew rozkazowi nie zniszczył jej, został z czasem oficerem Wojska Polskiego, a po przejściu na emeryturę wyjechał do rodzinnych Katowic, gdzie zmarł przed wybuchem wojny.

Rankiem 19 listopada 1918 roku radiostacja warszawska odebrała pokwitowanie odbioru depeszy ze Szwecji, która zobowiązała się przekazać ją do innych stolic. Również z miejsca najmniej oczekiwanego – z Poznania – z serca zaboru pruskiego, przejęty telegram przynosił krzepiące słowa: „[p]olski Poznań pozdrawia Warszawę". Telegram ten wysłał Polak Stanisław Jóźwiak, radiotelegrafista w służbie niemieckiej z załogi radiostacji poznańskiej, który po sposobie „gania" (nadawania) rozpoznał w nadawcy depeszy – Jana Pradelloka, pełniącego tam służbę w 1916 roku.

Zdobycie warszawskiej radiostacji spowodowało, że od listopada 1918 roku zaczął napływać do stolicy, do władz państwowych i wojskowych, nieprzerwany strumień informacji o wszystkim, co działo się wokół Polski i w całej Europie. Były to telegramy prasowe i dyplomatyczne, informacje o zapoczątkowanych pertraktacjach pokojowych Ententy z państwami centralnymi, o tworzącym się nowym porządku w Europie, o tworzeniu się nowych państw (Litwy, Czechosłowacji, Ukrainy Halickiej i Naddnieprzańskiej), o wstrząsach rewolucyjnych w Niemczech, o toczącej się wojnie domowej w Rosji. W eterze krzyżowały się jawne i szyfrowane rozporządzenia i komunikaty oraz deklaracje bolszewickie z szyfrowanymi i podawanymi „clarem" telegramami „białych".

Stosunkowo szybko utworzony został w Wojsku Polskim system zorganizowanego radionasłuchu. Prowadzony był początkowo, w okresach wolnych od korespondencji własnej, przez załogi kolejnych, zdobywanych na okupantach niemieckich i austriackich radiostacji stałych: w Krakowie (od 4 listopada), w Poznaniu (od końca grudnia 1918 roku), w Przemyślu (od stycznia 1919 roku), a od wiosny 1919 roku we Lwowie. Poważnym problemem były w równym stopniu braki kadrowe i sprzętowe. W latach 1918–1920 służbę w elitarnych formacjach radiotelegraficznych pełniło tylko 143 oficerów (blisko połowę wykształcono już w Wojsku Polskim) i niemal trzy razy tyle podoficerów i specjalistów (dwie trzecie wyszkolono już w Wojsku Polskim). Niezbędną pomocą służyła kadra wydziałów elektrycznych Politechniki Lwowskiej i Warszawskiej. Wśród nich był student – podchorąży Wojska Polskiego, a wkrótce profesor i kapitan Wojska Polskiego Janusz Groszkowski, późniejszy prezes Polskiej Akademii Nauk[1].

[1] To właśnie dlatego, że był oficerem rezerwy WP oraz miał kontakty z polskim wywiadem wojskowym, podczas II wojny światowej współpracował z wywiadem Armii Krajowej, badał fragmenty niemieckiej rakiety V1 i V2, w tym radiową aparaturę naprowadzania oraz silnik rakietowy.

4. Biuro Szyfrów

Zasada szyfrowania własnej korespondencji stosowana była już w Legionach Polskich podczas wojny światowej oraz w Polskiej Sile Zbrojnej. Dla umożliwienia radiotelegraficznego kontaktu Rady Regencyjnej z dowództwem I Korpusu Polskiego, gen. Józefa Dowbor-Muśnickiego, klucze szyfrowe przywiózł z Warszawy do Bobrujska 19 lutego 1918 roku por. Paweł Romocki. Miały one służyć do stałej komunikacji między tą formacją a Warszawą dla utajnienia korespondencji przed bolszewikami. Były to niemieckie systemy szyfrowe, które – mimo zmiany konkretnych kluczy – dawały jednak polskiemu wywiadowi wgląd w systemy szyfrów stosowanych przez Niemcy. Jednocześnie dawały taki sam wgląd w korespondencję gen. Dowbor-Muśnickiego Niemcom.

W komisji likwidacyjnej POW kierowanej przez Walerego Sławka, w Belwederze, na przełomie 1918 i 1919 roku, zanim struktury wywiadu POW zostały włączone i podporządkowane Sztabowi Generalnemu i Ministerstwu Spraw Wojskowych, do kontaktu z komendami i siatkami POW w Kijowie, Mińsku, Moskwie i innych miejscach używano szyfrów peowiackich. Były więc szyfry swoistym chlebem powszednim wszystkich tajnych służb oraz wojska.

W Sztabie Generalnym tworzonym od października 1918 roku w Warszawie pierwszym oficerem odpowiedzialnym za stworzenie nowych systemów szyfrowych w Wojsku Polskim był Karol Anders z armii rosyjskiej (brat płk. Władysława Andersa). Najprawdopodobniej jednak nie poradził sobie z tym zadaniem, bowiem gdy 12 grudnia 1918 roku nowym szefem wywiadu został ppłk Józef Rybak – jak sam odnotował w swych pamiętnikach, otrzymał polecenie zorganizowania komórki szyfrowej, faktycznie zaś centrali wywiadu, na wzór i podobieństwo austriackiego Evidenzbiuro. Jeszcze przed wyjazdem z Wiednia, gdzie pracował w polskiej komórce likwidacyjnej austriackiego Kriegsministerium, w grudniu, zdobył najważniejsze szyfry austriackie. Dzięki pomocy płk. Hermana Pokornego (który po rozpadzie monarchii dualistycznej został oficerem na Węgrzech) przywiózł do Polski następujące szyfry: Weiser-Pomil, Weiser-Assi, szyfr „M", szyfr XV, Lambda oraz książkę na temat kryptografii Edwarda Fleissnera von Ostrowskiego *Handbuch der Kryptografie. Anleitung zum Chiffrieren udn Deschiffriren von Geheimchreiften*, wydaną w Wiedniu w 1881 roku.

W tym czasie przedstawicielem wojskowym Polskiej Komisji Likwidacyjnej w Wiedniu, a następnie polskim przedstawicielem wojskowym był gen. intendent Edward Poschek. W skład misji wchodził m.in. mjr baron Emil Prochaska (który od listopada 1919 roku pełnił funkcje attaché wojskowego w Austrii), który przyjaźnił się z płk. Nandorem Taroczym (przedstawicielem wywiadu węgierskiego w Wiedniu). Dzięki tej przyjaźni i zażyłości płk Taroczy pomógł nie tylko w zorganizowaniu siedziby polskiej placówki wojskowej w Wiedniu przy placu Schwarzenberga 3, lecz także – z polecenia ppłk. Józefa Rybaka – w zdobyciu kolejnych materiałów z dawnego austriackiego Biura Szyfrów. Na „koleżeńską prośbę" ppłk. Rybaka węgierski przyjaciel zdobył w dawnym Biurze Szyfrów niezbędną dokumentację austriackich komórek szyfrowych, wzory kodów i szyfrów używanych podczas I wojny światowej w armii rosyjskiej, instrukcje prowadzenia radiowywiadu w armii austro-węgierskiej, podręczniki i księgi z zakresu kryptoanalizy. Stały się one podstawowymi pomocami naukowymi utworzonego na początku 1919 roku polskiego Biura Szyfrów.

Materiały te wykorzystał kpt. Eugeniusz Chilarski, który w połowie grudnia 1918 roku został wyznaczony przez ppłk. Rybaka na stanowisko szefa Sekcji Szyfrów Sztabu Generalnego WP. Opracował on kilka wersji pierwszych szyfrów używanych w Wojsku Polskim, oznaczonych jako szyfr „Ch" (czyli Chilarski), z dodatkiem liczby podanej cyframi rzymskimi lub łacińskimi. Składały się nań: kod czteroliterowy – dla dowództw frontowych – utajniający podstawowe struktury organizacyjne terminy i zwroty oraz tzw. kratka szyfrowa wraz z okresowymi zmiennikami. Ponadto opracował innego rodzaju szyfr dla kontaktów z polskimi misjami wojskowymi poza granicami Polski.

Wcześniej, 3 grudnia 1918 roku przybył z Paryża (wraz ze Stanisławem Grabskim z Komitetu Narodowego Polskiego) kpt. Tadeusz Zwisłocki, który od gen. Józefa Hallera przywiózł szyfry, które miały być zastosowane do kontaktów władz polskich w Warszawie z KNP oraz dowództwem Armii Polskiej we Francji.

Kapitan Chilarski pełnił obowiązki szefa Sekcji Szyfrów do lutego 1919 roku, gdy zastąpił go na tym stanowisku kpt. Józef Stanslicki, także z dawnej armii austro-węgierskiej, który opracował kolejne elementy polskiego systemu szyfrowania korespondencji operacyjnej: kod stacyjny – St. (czyli Stanslicki) wraz z dodanymi cyframi rzymskimi (od I do IX) oraz szyfry St. (czyli Stanslicki) I–XL (czterdzieści odmian – tzw. zmienników, zmienianych co kilka dni) do komunikacji Naczelnego Dowództwa Wojska Polskiego z placówkami zagranicznymi, Dowództwami Okręgów Generalnych, dowództwami frontowymi; natomiast dowództwa frontów i dowództwa dywizji korzystały nadal z kodu Ch i szyfru Sigma opartego na wzorach austro-węgierskich. Cała ta praca ukierunkowana była na stworzenie systemu utajniania polskiej korespondencji radiotelegraficznej, natomiast tworzenie struktur polskiego radiowywiadu związane było z osobą mjr. Karola Bołdeskuła, przyjętego do służby w Oddziale Informacyjno-Wywiadowczym SG WP z inicjatywy ppłk. Józefa Rybaka.

Jak wspomniano, już od końca listopada 1918 roku polskie radiostacje prowadziły coraz bardziej usystematyzowany nasłuch sieci radiowych i ruchu radiowego wszystkich państw okalających Polskę. Przejmowały głównie jawne komunikaty agencyjne i informacje prasowe, ale monitorowały także wojskowe sieci radiowe, sprawdzając, kto z kim się porozumiewa i jakiego rodzaju szyframi. Na tej podstawie w Oddziale Informacyjnym od pierwszych miesięcy 1919 roku sporządzane były serwisy wiadomości o każdym z państw, a przede wszystkim o sytuacji na wschodzie – w Rosji i na Ukrainie. W eterze krzyżowały się radiogramy zawierające bolszewickie dekrety i sprawozdania, komunikaty bolszewickiej agencji telegraficznej ROSTA, teksty wystąpień przywódców przesyłane z centrali do redakcji lokalnej prasy oraz przemówienia agitacyjne i artykuły propagandowe. Sporą grupę radiogramów stanowiły teksty szyfrowane, tak przez „białych", jak i „czerwonych", łącznie z flotą czarnomorską, a także szyfrogramy emitowane przez radiostacje ukraińskie oraz węgierskie. Te ostatnie, a szczególnie wymiana korespondencji Budapesztu z Moskwą i Kijowem, tym bardziej były interesujące, że w marcu 1919 roku na Węgrzech rozpoczęła się rewolucja bolszewicka.

Nieliczne polskie ruchome radiostacje nasłuchowe rozmieścił mjr Karol Bołdeskuł niemal w tych samych miejscowościach, gdzie podczas Wielkiej Wojny, w latach 1915–1918, pracowały nasłuchowe radiostacje austriackie i niemieckie. System uzupełniały dwie stacje radiopelengacyjne (kierunkowe), usytuowane wiosną 1919 roku – jedna koło Lwowa i druga koło Białegostoku, przesunięta następnie do Wilna. Ich zadaniem była (na zasadzie krzyżowania się dwóch siecznych wyznaczających kierunek, skąd sygnał był najsilniejszy) lokalizacja radiostacji Armii Czerwonej oraz „białej" rosyjskiej Armii Ochotniczej. Dzięki temu uzyskiwano wiedzę, kto i skąd nadaje, jaki jest jego sygnał wywoławczy i zakres fal, jak są zorganizowane sieci radiowe (grupy związanych ze sobą radiostacji nadających w tym zakresie fal) i kto kieruje kim (tzw. radiostacje kierujące) – czyli kto dowodzi. W ten sposób można było zestawić strukturę organizacyjną wyższych i niższych rosyjskich związków operacyjnych (czyli frontów i armii).

Jednocześnie do dowództw Wojska Polskiego na froncie wydany został rozkaz nakazujący przesyłanie do Sekcji Szyfrów SG WP wszystkich zdobycznych kluczy szyfrowych oraz materiału szyfrowego. W ten sposób, w kwietniu 1919 roku, do Warszawy przesłane zostały z Wilna dwa klucze szyfrowe Armii Czerwonej „Majak" i „Mars" (ten ostatni ze „zmiennikiem" 47110), zdobyte wraz z rosyjską radiostacją podczas kwietniowej operacji na Wileńszczyźnie.

Problem był jednak z dekryptażem (łamaniem) szyfrów rosyjskich. W systemie radiowywiadu brakowało bowiem bardzo istotnego (a nawet najważniejszego) ogniwa, jakim jest komórka kryptoanalityczna, która zajmowałaby się łamaniem szyfrów obcych. W tym czasie w Europie, po rozpadzie sztabu austriackiego (i jego Biura Szyfrów, który podczas Wielkiej Wojny odnotował wielkie sukcesy w zakresie łamania szyfrów rosyjskich, rumuńskich, serbskich i włoskich), a także na skutek rozpadu dawnych struktur Biur Szyfrów niemieckiego i rosyjskiego (które nie miały na swoim koncie większych sukcesów w zakresie łamania szyfrów obcych), jedynie Anglicy i Francuzi zajmowali się na większą skalę kryptoanalizą, ale ich zainteresowania ogniskowały się dotąd głównie na armii i flocie niemieckiej, więc Polska, wchodząc do elitarnego kręgu państw tworzących tak wyspecjalizowane komórki kryptoanalityczne, nie była bynajmniej zapóźniona w tym zakresie.

W tym czasie, po przejściu ppłk. Józefa Rybaka do służby w Ministerstwie Spraw Wojskowych, mjr Karol Bołdeksuł, z dniem 1 kwietnia 1919 roku, objął funkcję szefa Oddziału Informacyjno-Wywiadowczego SG WP. Rola i główne zadanie Bołdeskuła – dotyczące zorganizowania radiowywiadu na Rosję wraz z komórką kryptoanalityczną – były tak głęboko utajnione, że nawet prominentni i najbardziej zaufani współpracownicy Józefa Piłsudskiego nie wiedzieli o tym, krytykując oficera z dawnej armii austro-węgierskiej i wyrażając zdziwienie, że Wódz Naczelny trzyma go na stanowisku szefa tak newralgicznego organu dowodzenia w Wojsku Polskim.

5. O weselu panny Sroczanki oraz lekturach z dzieciństwa Jana Kowalewskiego i grzebieniu

Tworzeniu polskiej komórki kryptoanalitycznej, owego brakującego ogniwa w strukturze radiowywiadu, dopomógł szczęśliwy przypadek. Już w marcu 1919 roku por. Jakub Plezia z Krakowa, pełniący podczas Wielkiej Wojny służbę w austriackim Biurze Szyfrów, opracował raport w tej sprawie, który jednak utknął na trzy miesiące w sejfie dowódcy DO Gen. V Kraków i dotarł do kpt. Józefa Stanslickiego dopiero w sierpniu 1919 roku. Tymczasem w lipcu 1919 roku do służby w Oddziale Informacyjno-Wywiadowczym SG WP przyjęty został por. Jan Kowalewski, były oficer rezerwy carskiej armii rosyjskiej. Porucznik Kowalewski, łodzianin, absolwent tamtejszego gimnazjum handlowego i inżynier chemii, którą studiował na Uniwersytecie w Liège, pełnił podczas wojny służbę w rosyjskich formacjach inżynieryjnych. W ich skład wchodziły pododdziały telegraficzne i radiotelegraficzne, więc znał rosyjskie procedury obowiązujące w radiotelegrafii, a co więcej pełnił też służbę w radiotelegrafie i znał zasady szyfrowania korespondencji rosyjskiej. Jednak taką samą znajomością zasad dysponowali mjr Bołdeskuł, kpt. Stanslicki i por. Plezia, co nie przekładało się na praktykę łamania rosyjskich (w tym bolszewickich) kluczy szyfrowych. Po rozpadzie armii carskiej por. Kowalewski wstąpił do II Korpusu Polskiego w Rosji, a następnie był oficerem wywiadu POW w Kijowie i szefem wywiadu polskiej 4 DS w Odessie (w składzie Armii Ochotniczej gen. Antona Denikina). Początki jego służby w Biurze Szyfrów opisane zostały w opublikowanej w Londynie w 1952 roku biografii Jana Kowalewskiego (tłumaczenie autora):

> Pewnego dnia jego kolega porucznik Sroka chciał iść na dwutygodniowy urlop z powodu ślubu swej siostry. Zapytał on Jana, czy zastąpiłby go na służbie podczas jego nieobecności. Służba ta polegała na czytaniu przejmowanej korespondencji radiowej w różnych językach. Zawsze gotowy do pomocy Jan zgodził się. Ślub uroczej panny Sroczanki zapoczątkowało serię wypadków, których następstwa wpłynęły na bieg życia Jana.
>
> Każdego ranka o godzinie ósmej stosy z pakietami radiodepesz przejmowanych przez różne polskie stacje radiotelegraficzne były składane na biurko Jana. Potrafiący czytać niemal we wszystkich europejskich językach z łatwością dawał sobie z tym radę. Trzeciego dnia w pakiecie ze stacji radiotelegraficznej Lwów znalazł dwa intrygujące telegramy, zapisane kaligraficznym pismem przez podchorążego, który nawet zakreślił ramkę wokół tekstu. Pierwszy telegram był adresowany do dowództwa sowieckiej XII Armii w Kijowie, podpisany przez dowódcę Grupy [Operacyjnej] Jonę E. Jakira oraz jego szefa sztabu. Drugi był całkowicie zaszyfrowany, z wyjątkiem pierwszego słowa, Delegat, które było ujęte w cudzysłów. Janowi, gdy patrzył na rosyjskie telegramy, zaświtała w głowie pewna myśl. Był on dobrym matematykiem, powinien sobie poradzić z ich rozwiązaniem. Wynik mógłby być interesujący.

Tak więc ów szczęśliwy zbieg okoliczności sprowadzał się do ślubu i wesela panny Sroczanki, lektur z dzieciństwa oraz prozaicznego grzebienia. O ile o ślubie i weselu już wspomnieliśmy, cała dotychczasowa styczność por. Jana Kowalewskiego z kryptoanalizą sprowadzała się do znanych mu z dzieciństwa lektur Arthura Conan Doyle'a o Sherlocku Holmesie oraz noweli Edgara Alana Poe – *Złoty żuk*. Ta ostatnia opowiadała historię odczytania pirackiego szyfrogramu zapisanego atramentem sympatycznym na skórze, odczytania tekstu i odnalezienia skarbu piratów. Znaleziony przypadkowo na plaży fragment skóry, nie większy od chustki do nosa, równie przypadkowo ogrzany nad świecą ujawnił tekst zapisany atramentem sympatycznym. Jan Kowalewski pamiętał, że niezbędne jest znalezienie punktu zaczepienia, słabego punktu szyfrogramu. W opowiadaniu *Złoty żuk* owym słabym punktem było charakterystyczne nazwisko pirata – „Kidd" – w którym dwukrotnie występowała te same litery –

„dd". Jeśli był to szyfr podstawieniowy – literki „dd" byłyby zastąpione takim samym znakiem.

Jan Kowalewski znał doskonale język rosyjski, potrafił posługiwać się nim niemal jak ojczystym, był w stanie pisać, czytać, mówić, liczyć, a nawet myśleć po rosyjsku. Znał rosyjską literaturę i poezję, język techniczny i wojskowy, w czasach służby w armii rosyjskiej poznał wojskowe procedury, schematy rosyjskich dokumentów operacyjnych oraz terminologię, zwroty, charakterystyczny „szymel" rozkazów i meldunków. W czasie wojny światowej jako rosyjski oficer pisał i czytał oraz szyfrował dziesiątki takich dokumentów. Analogicznie jak w przypadku nazwiska pirata Kidd, który okazał się owym „słabym punktem" (albo „punktem zaczepienia"), Jan Kowalewski założył, że w szyfrogramie *powinno*, a w zasadzie *musi* znaleźć się słowo „dywizja" oraz nazwisko dowódcy w podpisie, wiedział też (dzięki danym z polskich stacji kierunkowych), że depesza została nadana z Odessy, którą w języku rosyjskim pisze się przez dwa „s".

Rosjanie używali szyfrów kratkowych, o układzie podobnym do tabliczki mnożenia. Jeśli na przykład w pole mnożenia – 2 × 2 – wpiszemy rosyjską literę „р" – czyli „r" – to w szyfrogramie będzie ona oznaczona jako „22". Jeśli w pole 1 × 0 (choć to matematycznie niepoprawne) wpiszemy rosyjską literę „и" – czyli „i" – to będzie ona oznaczona w szyfrogramie jako „10". Słowo „dywizja" ma w języku rosyjskim charakterystyczny układ sylab i liter. Każda druga litera w sylabie – na którą składają się dwie litery – to litera и („i"): („ди–ви–зия").

Jan Kowalewski posłużył się więc grzebieniem, z którego wyłamał zęby w regularny sposób, tak aby w miejsce po ich wyłamaniu wchodziły dwie cyfry oznaczające literki „и" i przesuwając nim po tekście, szukał takiej sekwencji znaków (cyfr, które zastępowały w szyfrogramie literę „и"), gdzie co druga grupa (dwóch cyfr) będzie się powtarzała. Gdy ją znalazł, odczytał słowo „dywizja". Dzięki temu dysponował już pięcioma literami, co stanowiło około jedną piątą alfabetu rosyjskiego.

Kolejne litery odkrył dzięki ewidentnemu, wręcz szkolnemu błędowi szyfrujących, którzy podali nazwisko dowódcy i szefa sztabu dwukrotnie, raz tekstem otwartym (jawnym) – jak być powinno, a innym razem tekstem zaszyfrowanym. Z zasady nie wolno było szyfrować podpisów i nagłówków, bowiem były one niezmienne, a zmieniały się jedynie klucze szyfrowe. Znając te nagłówki i nazwiska, można było metodą podkładania tekstu jawnego pod tajny złamać klucz i odczytać szyfrogram.

Znając – ze słowa „ди–ви–зия" – litery: „и" oraz „я", Jan Kowalewski mógł sprawdzić, że był to Iona Jakir („иона якир"), i poznać dzięki temu kilka kolejnych nowych liter: „о", „н", „а", „к", „р". Ponadto podwójna litera „сс" – („ss") – w słowie Odessa, umieszczonym w nagłówku i powtórzonym w treści szyfrogramu, przy znajomości „д” i „a”, dopomogła w odszyfrowaniu kilku kolejnych liter: „e” i „c”. Dzięki temu poznał już dwanaście liter, a więc niemal połowę alfabetu. Podstawiając w szyfrogramie znane litery pod grupy cyfr, poszukiwał brakujących liter, i w ten sposób odczytywał kolejne słowa, a następnie całą treść szyfrogramu.

W ten sposób w sierpniu 1919 roku Jan Kowalewski złamał – metodą ataku lingwistycznego – pierwszy rosyjski szyfr o nazwie Delegat. Fragment szyfrogramu podano poniżej.

1) Podkreślono w zaszyfrowanej formie litery „и” (czyli zestawienie dwóch cyfr: 10) w słowie: „ди–ви–зия”, odnalezione i odczytane za pomocą grzebienia.
2) Wytłuszczono w szyfrogramie wszystkie litery odnalezione przy zastosowaniu wymienionych wszystkich trzech pierwszych słabych punktów – „dywizja”, „Iona Jakir” i „Odessa”. Pozostałe litery pozostały niewytłuszczone, ale można je było odczytać i uzupełnić, podobnie jak brakujące litery w krzyżówce.
3) Przedstawiono odtworzoną „kratkę” czyli „deszyfrant”, ujawniony klucz szyfrowy Delegat, użyty do zaszyfrowania radiotelegramu. Litery wytłuszczone – odczytane jak wyżej, pozostałe litery odczytane dzięki metodzie krzyżówki.

Zaszyfrowany radiotelegram (szyfrogram).
4005220523433432353431101210031034430531230501351131
0512351110150132051235221033353423102235100305311540
4041432205100335021435121135403244431415111015121135
4322351214151110102310151235...

Odczytany radiotelegram (szyfrogram).
40 05 22 05 23 43 34 32 35 34 31 10 12 10 03 10 34 43 05 31 23 05 01 35 11
с о р о к п **я** т **а** я **д и в и** з **и я** п **о д к о** м **а н**
31 05 12 35 11 10 15 01 32 05 12 35 22 10 33 35 34 23 10 22 35 10 03 05 31
д о в а н и е м т **о в а р и щ а я к и р а и** з **о д**
15 40 40 41 43 22 05 10 03 35 02 14 35 12 11 35 40 32 44 43 14 15 11 10 15
е с с ы п **р о и** з **а** ш л **а в н а с** т у п л **е н и е**
12 11 35 43 22 35 12 14 15 11 10 10 23 10 23 10 15 12 35
в н а п **р а в** л **е н и и к и к и е в а**

Jak odnotował w swych wspomnieniach por. Jan Kowalewski: „[...] złamanie i odczytanie tekstu przyniosło sensacyjne informacje”. Nazajutrz poinformowany o tym szef Oddziału Informacyjno-Wywiadowczego, ppłk Karol Bołdeskuł w lot zrozumiał wagę sukcesu por. Jana Kowalewskiego:

> Złamanie rosyjskich szyfrów [...] zelektryzowało Naczelne Dowództwo Wojska Polskiego. Szef Sztabu Generalnego [oraz szef wywiadu wojskowego] [...] polecił Janowi zorganizowanie [...] [komórki] dekryptażu. [...] Porucznik Jan Kowalewski [...] osiągnął bardzo wysoki poziom skuteczności, tak że Polacy czytali [od tego czasu] praktycznie wszystkie telegramy wysyłane i odbierane przez Armię Czerwoną.

Tabela 1. Odtworzony deszyfrant (klucz) szyfru Delegat (Делегат)

	0	1	2	3	4	5
0		м	ш	**з**	ю	**о**
1	**и**	**н**	**в**	г	л	е
2	ж	б	**р**	**к**	ц	ь
3	ф	**д**	т	щ	**я**	**а**
4	с	ы	ч	п*	у	х

*W oryginale deszyfrantu w kratce tej wpisany jest znak zapytania, ale z analizy zestawu liter wynika, że brakującą literą była litera „п".

W ciągu zaledwie dwóch tygodni utworzona została w Sekcji Szyfrowej Oddziału II Informacyjno-Wywiadowczego SG WP – przekształconej w Biuro Szyfrów – nowa komórka organizacyjna pod nazwą „Wydział II Szyfrów Obcych", na czele której stanął Jan Kowalewski. Zatrudniono w niej kilku młodych oficerów o nieszablonowych metodach działania; co charakterystyczne, zwartą grupę stanowili wśród nich instruktorzy harcerscy i harcerze ze wszystkich trzech zaborów, osobowości o „swędzących mózgach", jak mówił o nich Jan Kowalewski: por. Jakub Plezia (komendant hufca i komendant chorągwi w Krakowie), ppor. Maksymilian Ciężki (drużynowy i komendant Hufca w Szamotułach), por. Jerzy Suryn (zastępowy w polskiej drużynie harcerskiej w Odessie). Nieprzypadkowo, gdy por. Jan Kowalewski, przed awansem na stopień kapitana, musiał w końcu 1920 roku odbyć praktykę frontową, wybrał dowodzenie kompanią w szóstym harcerskim pułku piechoty wojsk Litwy Środkowej.

Złamanie pierwszego klucza szyfrowego Armii Czerwonej i utworzenie Wydziału II Szyfrów Obcych wypełniło brakujące ogniwo w systemie radiowywiadu. Odtąd nasłuch i przejmowanie jawnej i tajnej korespondencji przeciwnika, ustalanie elementów „ruchu radiowego" oraz lokalizowanie nieprzyjacielskich radiostacji dopełnione zostało komórką najważniejszą zajmującą się kryptoanalizą (dekryptażem), czyli łamaniem nieprzyjacielskich szyfrów. Kolejnym etapem tworzenia struktury radiowywiadu było stworzenie komórek kryptoanalitycznych w dowództwach frontów i armii, gdzie na podstawie złamanych w Wydziale II SO BS kluczy szyfrowych odczytywano na miejscu, na froncie korespondencję przeciwnika, bez potrzeby dwukrotnego przesyłania (z frontu do Warszawy i z powrotem) szyfrowanej i odczytanej korespondencji.

Stworzenie takiego systemu na przełomie 1919 i 1920 roku umożliwiło szybkie odczytywanie korespondencji bolszewickiej ze wszystkich frontów wojny domowej na Ukrainie, w południowej Rosji, na Syberii i na Kaukazie. Jan Kowalewski złamał także szyfry używane przez Armię Ochotniczą gen. Antona Denikina oraz „białą" Flotę Czarnomorską, a także stosowane przez Armię Ukraińskiej Republiki Ludowej (Naddnieprzańskiej). Dało to możliwość śledzenia wydarzeń na rozległych terenach Rosji od Syberii po Piotrogród i od Murmania po Morze Czarne.

Z czasem doszły jednak nowe problemy. Jak zapisał w swych wspomnieniach Jan Kowalewski o kluczu Delegat:

> Był on nieskomplikowanym szyfrem, w którym dwie cyfry zastępowały jedną literę alfabetu. Do rzędu cyfr otrzymywanych w ten sposób, dodawanych było [na początku] dwanaście cyfr [specjalnego] klucza. Szyfr po zastąpieniu liter przez cyfry był stałym [szyfrem podstawowym], ale dwanaście cyfr klucza ulegało zmianie. Było tam sześć odrębnych grup cyfr, skąd brało się sześć [kolejnych] wersji szyfru Delegat.

Podobny zapis znajduje się na zachowanym deszyfrancie (odtworzonym kluczu) Delegata – czyli wzorze złamanego klucza szyfrowego:

> Odszyfrował Kowalewski por. i oprócz tego dostarczony z niektórymi zmiennikami przez B[iuro] W[ywiadowcze]. Często była używana baza [wersja podstawowa] bez zmiennika i w takich wypadkach na początku depeszy umieszczano hasło „biez pokazitiela", albo nie podawano (czasem „Dieliegat", lub „Dieliegat biez pokazitiela). System szyfrowania ten sam co w poprzednich. Jeżeli stosowano zmiennik to pisano „dieliegat pierwyj", „dieliegat wtoroj", itp. Zmienników zastosowano 7 [wersji]. Przy szyfrowaniu zmiennika pod podstawowym szyfrogramem podpisywano współczynnik, raz w porządku normalnym, następnie odwrotnym i tak na zmianę do końca.

Wspomnienia Jana Kowalewskiego oraz opis na deszyfrancie wskazują na problemy, które pojawiły się wkrótce, w kolejnych wersjach Delegata, a dotyczyły tzw. zmienników – czyli pokazitieli. W korespondencji Armii Czerwonej i WuCzeKa (bolszewickiej policji politycznej), Rosjanie zaczęli stosować szyfry podwójnego przekształcenia, dla złamania którego metoda lingwistyczna okazywała się niewystarczająca.

Szyfrowanie przy pomocy Delegata ze zmiennikiem (pokazitieliem) polegało na odjęciu od pierwotnej wersji szyfrogramu przemiennie zastosowanego zbioru sześciu cyfr tzw. zmiennika (w kilku jego kolejnych wersjach). Były one, jak czytamy we wspomnieniach Jana Kowalewskiego, dopisane na początku szyfrogramu, ale tego początkowo nie wiedziano. W ten sposób od zaszyfrowanego pierwszy raz radiogramu odejmowano zmiennik, co stanowiło wtórne szyfrowanie i do powstałego w ten sposób rzędu cyfr (stanowiących różnicę) dopisywano na początku szyfrogramu ów dwunastocyfrowy zmiennik (na przykład Delegat I: 517382-283715).

Od zaszyfrowanego szyfrem Delegat teksty radiogramu odejmujemy zapisany przemiennie sześciocyfrowy zmiennik:

40052205234334323534311012100310344305312305013511 31...
517382283715517382283715517382283715517382283715 5173...
99324087963883695316040561472192073854684187742060 68...

Różnica stanowiła nowy, drugi raz (wtórnie) przekształcony szyfrogram, który zapisywano z dodaniem (wytłuszczonego tu) zmiennika na początku:

51738228371599324087963883695316040561472192073854684187742060 68...

Tak dwukrotnie przekształcony tekst nie poddawał się już atakowi lingwistycznemu. Jan Kowalewski szybko jednak odkrył stosowanie przez Rosjan metody wtórnego (podwójnego) szyfrowania za pomocą zmienników, ale gdy z czasem przestano je umieszczać na początku szyfrogramu, podając je jedynie w pakietach (do nadawców i odbiorców) na kolejne tygodnie, „stanął przed ścianą". Ponadto kratka szyfrowa (oparta na kratce tabliczki mnożenia) miała 100 pól, tymczasem alfabet rozpisany w podstawowej wersji zajmował zaledwie czwartą ich część, więc Rosjanie, aby utrudnić stosowanie metody ataku lingwistycznego, w kolejnych kluczach dublowali lub potrajali najczęściej używane samogłoski. W takiej sytuacji metoda statystycznego badania „frekwencji" – czyli częstotliwości występowania liter w odpowiednio dużym materiale – nie przynosiła dobrych rezultatów. Gdy wszystkie dotychczas stosowane metody zawiodły, nie zawiodła por. Jana Kowalewskiego intuicja. Zwrócił się on (za zgodą szefa Oddziału Informacyjno-Wywiadowczego ppłk. Bołdeskuła) do profesorów matematyki Uniwersytetu Warszawskiego i Lwowskiego – Stefana Mazurkiewicza, Wacława Sierpińskiego i Stanisława Leśniewskiego. Byli to znamienici uczeni, współtwórcy polskiej szkoły matematycznej. Włączeni do pracy, konstruowali algorytmy pozwalające na odnalezienie zmienników, co zapoczątkowało nieznany dotąd, podwójny – lingwistyczny i matematyczny – atak na szyfry. Włączeni do pracy wraz ze swymi asystentami z Wydziału Filozofii Uniwersytetu Warszawskiego konfrontowali swą wiedzę matematyczną z doświadczeniami i umiejętnościami w zakresie terminologii wojskowej z oficerami Wydziału II BS. Zapoczątkowana wówczas współpraca uwieńczona została później – oczywiście w nieporównywalnie większej skali – jednym z największych sukcesów Mariana Rejewskiego, Jerzego Różyckiego i Henryka Zygalskiego, którzy, łącząc metody lingwistyczne i matematyczne, złamali szyfry maszynowe Engimy. Byli oni uczniami Zdzisława Krygowskiego z Uniwersytetu Poznańskiego. Sam Krygowski włączony został w tajemnice kryptoanalizy przez swych kolegów pracujących w Biurze Szyfrów od końca 1919 roku.

6. Sukcesy polskiego radiowywiadu

Radiowywiad w pełnej swej strukturze miał niezwykłe walory natury operacyjnej i politycznej, dawał bowiem informacje – aktualne, wiarygodne oraz dotyczące niezwykle szerokiego spektrum spraw.

Aktualne, ponieważ żaden agent polskiego wywiadu nie zdążyłby przesłać informacji z miejsca ich zdobycia do centrali w Warszawie (lub na polską stronę frontu, co zajmowało od kliku dni do kilku tygodni) w czasie, w jakim odczytywane były nieprzyjacielskie szyfrogramy (na podstawie ustalonego klucza trwało to kilkanaście minut, a łamanie nowych kluczy zajmowało od kilku godzin do kilku dni, jeśli był to szczególnie trudny nowy klucz szyfrowy).

Wiarygodne, ponieważ mogły być one i były natychmiast sprawdzalne, a rosyjskie sztaby podczas wojny i długo po niej nie dopuszczały myśli, że ich „stojące na wysokim stopniu trudności" systemy szyfrowe mogły być złamane przez „jakichś Polaków". Posługiwali się więc swoimi szyframi z przekonaniem o bezpieczeństwie swej korespondencji, a tymczasem cała przesyłana przez radiotelegraf korespondencja trafiała równocześnie do rosyjskich i polskich odbiorców.

Wreszcie, jeśli chodzi o *spektrum* wiedzy, to żaden polski agent, a nawet Lenin, Trocki i Stalin, gdyby tylko byli agentami polskiego wywiadu, nie mieliby tak szerokiego dostępu do różnego rodzaju informacji, ani też nie byliby w stanie tak szybko przekazać ich na polską stronę.

Owoce pracy polskiego radiowywiadu dawały więc najwyższym polskim czynnikom wojskowym i politycznym, a przede wszystkim Naczelnikowi Państwa i Wodzowi Naczelnemu – Józefowi Piłsudskiemu oręż szczególny, niezwykle ważny w polityce zagranicznej i działaniach wojennych. Marszałek Piłsudski posiadał również dostęp do informacji pochodzących z deszyfrowanych radiogramów władz cywilnych i wojskowych państw sąsiadujących z Polską – Niemiec, Litwy, Węgier i Czechosłowacji.

Łącznie podczas wojny z bolszewicką Rosją, od sierpnia 1919 roku do końca 1920 roku Jan Kowalewski i kierowany przezeń Wydział II Szyfrów Obcych złamał około stu rosyjskich kluczy szyfrowych i odczytał ponad trzy tysiące szyfrogramów bolszewickich (nie licząc „białych" Rosjan, ukraińskich, czeskich, niemieckich i węgierskich), tyle bowiem autor niniejszego artykułu zestawił na podstawie przebadanych akt polskiego wywiadu wojskowego, znajdujących się w Polsce i w Moskwie.

Klucze szyfrowe zmieniane były przez Rosjan co około dwa tygodnie do dziesięciu dni. Na tyle oceniali oni zdolności polskiego wywiadu. Złamanie bowiem szyfru po upływie tygodnia – dwóch dawało dostęp jedynie do zdezaktualizowanych i bezużytecznych informacji. Tymczasem łatwiejsze rosyjskie klucze szyfrowe Jan Kowalewski łamał w ciągu dwóch godzin, a trudniejsze – dwóch dni.

Jeśli w ówczesnej Europie, w której mapa polityczna po I wojnie światowej uległa ogromnej przebudowie, wytyczymy linię od Półwyspu Jutlandzkiego do Półwyspu Apenińskiego, na zachód od tej linii funkcjonowały w Paryżu i Londynie dwie sprawne, budowane przez dziesięciolecia (a nawet stulecia) struktury wywiadu i biura szyfrów zajmujące się kryptoanalizą. Jednak po I wojnie światowej, na wschód od tej linii, jeden z najsprawniejszych wywiadów, a w jego ramach najnowocześniejszy radiowywiad i Biuro Szyfrów, powstały w Warszawie. Ani Berlin, ani Wiedeń, ani Moskwa nie odgrywały w tym czasie takiej roli jak dawniej. To pozwala zrozumieć, dlaczego zarówno działania wojenne, jak i polityka polska prowadzona była w tym czasie racjonalnie i skutecznie.

7. Znaczenie radiowywiadu – lustro Piłsudskiego

Na fotografiach i karykaturach Józef Piłsudski przedstawiany był często, gdy siedział w fotelu i układał na niewielkim stoliku ulubione pasjanse. Wyobraźmy sobie, że fotel i stolik są takie same, tyle, że zamiast układać pasjansa, Marszałek gra w pokera z Leninem. Za plecami przeciwnika ustawione jest niewidzialne dlań lustro, więc Piłsudski, zerkając w lustro, wie, jakimi kartami dysponuje Lenin, wie, że szachruje, widzi, jak wyciąga karty z rękawa, jak licytuje z kamienną twarzą, aby przechytrzyć Piłsudskiego. Ale Marszałek mruży oczy i ściąga brwi i sam stara się ograć przeciwnika. Gra toczy się o wysoką stawkę.

Owym niewidzialnym lustrem ustawionym za plecami przeciwnika był polski radiowywiad. Oczywiście samym zerkaniem w lustro i wiedzą o tym, jaką kartę ma przeciwnik, nie można wygrać partii z doświadczonym szulerem. Polski Wódz Naczelny i Naczelnik Państwa musi także mieć mocną kartę – tą było waleczne wojsko i postawa Narodu, a także pomoc materialna z Francji i Stanów Zjednoczonych. Ale w pokerze o wyniku rozgrywki decyduje nie tylko mocna karta w rękach Piłsudskiego, ale również żelazna konsekwencja gracza, jego zdolności i charakter. Potrzebna jest także odrobina szczęścia – ale temu można dopomóc zerkaniem w karty przeciwnika. Wgląd w atuty Lenina, dzięki owemu niewidzialnemu dlań lustru, dawał przewagę, dawał możliwość prowadzenia rozgrywki nie w ciemno, nie zdając się na łut szczęścia i ślepy los, ale optymalnego licytowania, oceniania szans, dobierania kart, podbijania stawki, albo sprawdzania i wreszcie pokonania przeciwnika.

Doświadczenia i sukcesy polskiego radiowywiadu podczas wojny z bolszewicką Rosją zaowocowały nawiązaniem ścisłej współpracy w tej dziedzinie z Japonią. Jan Kowalewski w 1923 roku został skierowany służbowo do Tokio, gdzie stworzył podstawy radiowywiadu japońskiego ukierunkowanego na Rosję. Polska (radiostacje w Wilnie i Lwowie) oraz Japonia (radiostacje wybudowane w Mandżurii) monitorowały do 1939 roku rosyjskie sieci radiowe na całym obszarze Związku Sowieckiego. Łamaniem rosyjskich szyfrów zajmowała się sekcja rosyjska Biura Szyfrów kierowana przez kpt. dr. Stanisława Szachno-Romanowicza.

Łamanie szyfrów niemieckich zapoczątkowane zostało w Polsce w 1920 roku, gdy francuski wywiad wojskowy udostępnił polskiemu wywiadowi informacje o stosowanych podczas I wojny światowej szyfrach niemieckich, „podwójnych zmienników" (albo „przestawienia podwójnego", czy „transpozycyjnego") – Doppelwürfelverfahren oraz Handschlüsselverfahren. Dzięki temu polskie władze wojskowe i polityczne kontrolowały korespondencję wojskową Niemiec. Miało to swe szczególne znaczenie podczas plebiscytu na Górnym Śląsku i III Powstania Śląskiego w 1921 roku, gdy awansowany do stopnia kapitana Jan Kowalewski został szefem wywiadu polskiego Dowództwa Ochrony Plebiscytu, a następnie szefem wywiadu Dowództwa Wojsk Powstańczych.

Radiowywiad na Niemcy prowadziły wybudowane w latach dwudziestych XX wieku nowoczesne radiostacje nasłuchowe w Starogardzie Gdańskim, Poznaniu oraz w Krzesławicach koło Krakowa. Sekcja niemiecka Biura Szyfrów (BS-4) łamała na bieżąco wszystkie stosowane ówcześnie szyfry niemieckie aż do drugiej połowy lat dwudziestych. W 1926 roku niemieckie siły morskie, a w 1928 roku Reichswehra – jako pierwsze w Europie – wprowadziły do użytku maszyny szyfrowe Enigma. Stefan Mazurkiewicz, którego konsultowano w zakresie nowych niemieckich szyfrów, określił je jako maszynowe i nie dające się złamać przy pomocy tradycyjnych metod, niemniej przekazał sugestie dotyczące prac nad nimi swemu przyjacielowi Zdzisławowi Krygowskiemu z Uniwersytetu Poznańskiego. Wkrótce polskie Biuro Szyfrów zareagowało zorganizowaniem tam kursu kryptoanalitycznego. Zajęcia prowadzili na nim mjr Franciszek Pokorny, Maksymilian Ciężki i inż. Antoni Palluth – wszyscy oni mieli doświadczenia w łamaniu, począwszy od 1919 roku, szyfrów rosyjskich i niemieckich. Stosowali metody ataku lingwistycznego i matematycznego na niemieckie szyfry, co wkrótce doprowadziło do sukcesu. Trzech absolwentów kursu – Marian Rejewski (studiujący następnie w Getyndze), Jerzy Różycki i Henryk Zygalski – zostało zatrudnionych w sekcji niemieckiej Biura Szyfrów (BS-4) i w końcu 1932 roku ich prace zostały uwieńczone sukcesem. W ten sposób doświadczenia z lat walk o niepodległość i granice Rzeczypospolitej z lat 1918–1921 wykorzystane zostały z sukcesem przed i podczas II wojny światowej.

Racjonalni oficerowie Reichswehry, wiedzący, ile matematycznych kombinacji daje Enigma, nie dopuszczali myśli, że ktokolwiek byłby zdolny do złamania szyfrów maszynowych, tym bardziej, że z każdym (cotygodniowym przed wojną, a podczas II wojny światowej codziennym) nastawieniem maszyny uzyskiwało się nową wersję szyfru.

Marian Rejewski wywodził się z Bydgoszczy w zaborze pruskim. Ze szkoły oraz studiów matematycznych w Getyndze wyniósł doskonałą znajomość języka niemieckiego, którym potrafił posługiwać się równie biegle jak ojczystym. Znał niemieckie idiomy, poezję i przyzwyczajenie do systematyczności oraz porządku, znał z kursów kryptograficznych wojskowe procedury, schematyczny język dokumentów szkoleniowych i operacyjnych w armii niemieckiej, terminologię i zwroty, charakterystyczny układ tekstów rozkazów i meldunków. Znajomość kultury rosyjskiego zaborcy, która Janowi Kowalewskiemu ułatwiła złamanie szyfrów rosyjskich w latach 1919–1920, Marianowi Rejewskiemu pomogła w rozwiązywaniu szyfrów niemieckich. Obaj zaborcy wykształcili polskich pogromców swoich szyfrów, ale najważniejszym czynnikiem, który przysłużył się łamaniu szyfrów wroga, była – oprócz znajomości języka i zwyczajów nieprzyjaciela – matematyka, polska szkoła matematyczna, szkoła logicznego myślenia, która jest źródłem i kwintesencją nauki.

Bibliografia

[1] J. Hare, *Crusader in the secret war*, Christopher Johnson, London 1952.

[2] D. Kahn, *Łamacze kodów. Historia kryptologii*, Zysk i S-ka, Warszawa 2004.

[3] G. Nowik, *Zanim złamano „Enigmę"… Polski radiowywiad podczas wojny z bolszewicką Rosją 1918–1920*. Część 1, Oficyna Wydawnicza Rytm, Warszawa 2004.
[4] G. Nowik, *Zanim złamano „Enigmę" rozszyfrowano „Rewolucję"… Polski radiowywiad podczas wojny z bolszewicką Rosją 1918–1920*. Część 2, Oficyna Wydawnicza Rytm, Warszawa 2010.
[5] *Marian Rejewski 1905–1980. Życie Enigmą pisane*, Wydawnictwo Tekst, Bydgoszcz 2005, praca zbiorowa.
[6] *Marian Rejewski 16 VIII 1905–13 II 1980. Bydgoszczanin, wybitny matematyk, genialny kryptolog, pogromca Enigmy*, Przegląd Historyczno-Wojskowy 5 (2005), nr 210.

Grzegorz Nowik
Instytut Studiów Politycznych PAN
grzegorznowik@egonet.pl

Wiad. Mat. 55 (2) 2019, 303–331

Piotr Kopacz (Gdynia)

Problem nawigacji Zermelo dawniej a obecnie

Pamięci mojego Taty
Marka Kopacza (1940–2019)

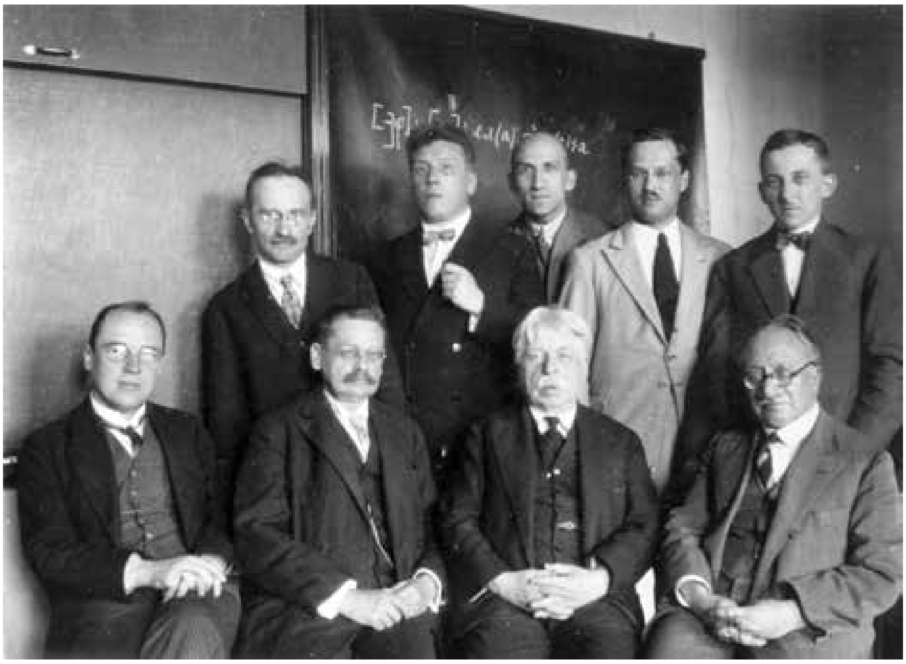
1. Geneza problemu

1.1. *Związek Zermelo z rachunkiem wariacyjnym.* Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871–1953) jest znany głównie z wyników w teorii mnogości i logice. Przywołajmy słynny aksjomat wyboru z 1904 roku zastosowany w dowodzie twierdzenia o dobrym porządku czy paradoksalnym rozkładzie kuli Banacha–Tarskiego oraz aksjomatyzację teorii mnogości Zermelo–Fraenkela z 1908 roku. Jednakże przed poświęceniem się wspomnianym działom matematyki przez niemal trzydzieści lat swojej naukowej aktywności Zermelo zajmował się rachunkiem wariacyjnym. Jego rozprawa doktorska zatytułowana *Untersuchungen zur Variations-Rechnung* (*Studia z rachunku wariacyjnego*) i obroniona w Berlinie w 1894 roku była poprzedzona studiami uniwersyteckimi z matematyki w Berlinie, fizyki w Halle i filozofii we Fryburgu. Temat rozprawy został zasugerowany przez jego promotora Hermanna Schwarza, którego pierwszym doktorantem był właśnie Zermelo. Zermelo kontynuował i rozwijał wariacyjne wyniki Karla Weierstrassa, w szczególności rozszerzył metodę badania ekstremów całek krzywoliniowych do przypadku, w którym funkcja podcałkowa zależy od pochodnych dowolnego rzędu. Następnie był asystentem Maxa Plancka i prowadził badania w fizyce teoretycznej oraz matematyce stosowanej, w tym w mechanice statystycznej. Z kolei jego habilitacja *Hydrodynamische Untersuchungen über die Wirbelbewegungen* *in einer Kugelfläche* (*Hydrodynamika ruchów wirowych na powierzchni sfery*) była poświęcona zagadnieniom hydrodynamicznym i napisana w Getyndze w 1899 roku. Z początkiem XX wieku cała jego uwaga skupiona została na intensywnie rozwijającą się teorię mnogości wraz z zastosowaniami, na przykład w teorii gier (szachy). Szczegółową biografię Ernsta Zermelo przedstawia [13].

1.2. *Problem nawigacyjny.* Powodem zainteresowania niemieckiego matematyka zagadnieniem określanym jako *problem nawigacji Zermelo* była najprawdopodobniej ówczesna pierwsza podróż sterowca Graf Zeppelin dookoła świata w 1929 roku lub wcześniejszy pierwszy przelot transatlantycki w 1928 roku czy też ogólnie rozwój żeglugi powietrznej, w tym zeppelinów, których sterowanie (nawigacja) było istotnie związane z siłą i kierunkiem wiatru (zob. [13]). Zagadnienie zostało postawione przez samego Zermelo w artykule [43] następująco (tłumaczenie autora).

> Na nieograniczonej płaszczyźnie, przy czym wiatr jest zadany przez pole wektorowe jako funkcja położenia i czasu, statek powietrzny [sterowiec] lub samolot porusza się ze stałą prędkością względem otaczających mas powietrza. W jaki sposób należy sterować statkiem, aby przemieścić się z punktu do innego punktu w jak najkrótszym czasie?

1.3. *Wątek polski.* Jest bardzo możliwe, iż tytułowy problem został sformalizowany w Sopocie, gdzie Zermelo przebywał na urlopie zdrowotnym w lipcu 1929 roku. Pierwszy wykład zatytułowany *Über die Navigation in der Luft als Problem der Variationsrechnung* (*O nawigacji w powietrzu jako problemie rachunku wariacyjnego*) odbył się na uniwersytecie w Pradze 18 września 1929 roku, a pierwsza praca [43] o tym samym tytule opisująca problem wraz z rozwiązaniem na płaszczyźnie euklidesowej ukazała się w następnym roku. Drugi artykuł [44] poświęcony tytułowemu problemowi, *Über das Navigationsproblem bei ruhender oder veränderlicher Windverteilung* (*O problemie nawigacji przy stałym lub zmiennym rozkładzie wiatru*) ukazał się rok później, w którym Zermelo poprawił i rozszerzył swoje rezultaty do przestrzeni $(\mathbb{R}^3, \delta_{ij})$. Warto wspomnieć, iż Zermelo przyjechał do Polski wiosną 1929 roku na oficjalne zaproszenie Uniwerystetu Warszawskiego z 20 lutego 1929 roku, poprzedzone osobistymi staraniami Wacława Sierpińskiego i Stefana Mazurkiewicza podczas Międzynarodowego Kongresu Matematyków w Bolonii w 1928 roku. Celem jego pobytu było wygłoszenie serii wykładów z logiki i teorii mnogości. W Warszawie Ernst Zermelo miał dziewięć godzinnych wystąpień



1. Ernst Zermelo na Uniwersytecie Warszawskim. W pierwszym rzędzie od lewej: W. Sierpiński, E. Zermelo, S. Dickstein, A. Przeborski. W drugim rzędzie od lewej: J. Łukasiewicz, S. Leśniewski, B. Knaster, J. Spława-Neyman, F. Leja
(Universitätsarchiv Freiburg, C0129: Nachlass Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo)

w Instytucie Matematycznym między 27 maja a 10 czerwca 1929 roku. Wykładom towarzyszyły spotkania z polskimi matematykami w Krakowie[1], Lwowie i Warszawie[2]. Sam Zermelo był bardzo zadowolony z cennych spotkań i wymian myśli w Polsce, dla których zresztą zrezygnował z prowadzenia ustalonego już wcześniej kursu z geometrii różniczkowej w semestrze letnim na uniwersytecie we Fryburgu (zob. [13]).

1.4. *Początek dyskusji naukowej.* Wspomniany wykład w Pradze spotkał się z dużym zainteresowaniem, a prace poświęcone poruszanemu tematowi – z różnymi uogólnieniami – wkrótce przedstawili m.in. Tullio Levi-Civita, Richard von Mises, Aureliano de Mira Fernandes, Basilio Manià, Philipp Frank, Constantin Carathéodory czy nieco później Kenneth Arrow (zob. [4, 9, 12, 14, 26, 28, 41]). Arrow, powszechnie znany jako laureat Nagrody Banku Szwecji im. Alfreda Nobla z ekonomii (w 1972 roku, wspólnie z Johnem Hicksem), swoje zainteresowania

1 W Krakowie rachunkiem wariacyjnym zajmowali się wówczas Stanisław Zaremba i Alfred Rosenblatt.

2 W Warszawie Zermelo zatrzymał się w mieszkaniu Bronisława Knastera.

2. Ernst Zermelo na uniwersytecie we Lwowie. W pierwszym rzędzie od lewej: H. Steinhaus, E. Zermelo, S. Mazurkiewicz. W drugim rzędzie od lewej: K. Kuratowski, B. Knaster, S. Banach, W. Stożek, E. Żyliński, S. Ruziewicz
(Universitätsarchiv Freiburg, C0129: Nachlass Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo)

naukowe skierował w kierunku nauk ekonomicznych dopiero po napisaniu wspomnianej pracy. Artykuł [4] był pierwszym poświęconym problemowi nawigacji Zermelo w kontekście nieeuklidesowym (sferycznym), a autor łączył w nim teorię i zastosowania praktyczne. Arrow – po ukończeniu w 1941 roku studiów matematycznych – w czasie II wojny światowej był przez cztery lata oficerem pogodowym i zajmował się praktyczną optymalizacją tras transatlantyckich dla samolotów. Ciekawostką jest także fakt, iż Zermelo po doktoracie, będąc jeszcze asystentem Plancka, starał się w 1896 roku, przy rekomendacji swojego promotora (Schwarza), o zatrudnienie w *Deutsche Seewarte* w Hamburgu – głównej instytucji zajmującej się meteorologią morską i hydrografią, w szczególności opracowywaniem zaleceń dla statków dotyczących tras żeglugowych. Jednakże z nieznanych powodów Zermelo ostatecznie zdecydował się ubiegać o posadę na uniwersytecie. Podjął dalsze studia w Getyndze, gdzie słuchał wykładów m.in. Davida Hilberta, Felixa Kleina (równania różniczkowe w mechanice, liczby niewymierne, seminarium), Oskara Meyera (termodynamika), Arthura Schoenfliesa (teoria mnogości), zob. [13].

Faktycznie pierwszym nieeuklidesowym ujęciem problemu (na sferze wymiaru dwa przy szczególnym rodzaju wiatru) była rozprawa doktorska Kurta Zity [45] napisana na uniwersytecie we Wrocławiu. Jej temat był zasugerowany przez samego Zermelo [4,13]. Następnie w rozwijającej się teorii optymalnego sterowania problem był podejmowany z użyciem zasady maksimum Pontriagina. Jego płaska wersja ($\mathbb{R}^2$) stała się klasycznym przykładem w tejże dziedzinie i w zastosowaniach praktycznych związanych z nawigacją morską i lotniczą [20,27]. Należy także zwrócić uwagę na istniejące związki i analogie pomiędzy problemem nawigacji Zermelo a optyką geometryczną (propagacja i refrakcja światła, prawo Snelliusa) wraz z zasadą Fermata najkrótszego czasu (najmniejszego działania) i problemem brachistochrony.

2. Geometria Finslera

Całkiem nowe i spore zainteresowanie tytułowym zagadnieniem nastąpiło na początku XXI wieku w związku z powiązaniami z geometrią Finslera, którą często uważa się za uogólnienie geometrii Riemanna. Oprócz problemu samego w sobie nawigacja Zermelo stała się także efektywną metodą odgrywającą istotną rolę w tejże geometrii, a także fizyce współczesnej, na przykład mechanice kwantowej (zob. [6–8,11,19,34,35]).

Zanim przejdziemy do bieżących badań, zacznijmy od pewnej analogii, wspominając mniej znaną pracę [30]. Edward McShane rozważał w niej omawiany problem, biorąc pod uwagę fakt, że samolot może szybciej opadać niż się wznosić, zastępując sferę zbiorem wypukłym w $\mathbb{R}^3$. Udowodnił on istnienie rozwiązania, rozważając zmodyfikowaną (ogólniejszą) wersję problemu Zermelo i zakładając, że prędkość samolotu jest niemal zawsze maksymalna. Podobne rozumowanie, ale już w innym kontekście (geometrycznym), możemy zauważyć w znacznie późniejszym artykule Makoto Matsumoto [29]. Mianowicie, rozważana jest tu indykatrysa opisująca ruch człowieka chodzącego w różnych kierunkach po nachylonym zboczu góry przy działaniu grawitacji. Zbocze traktowane jest jako powierzchnia Finslera z metryką Matsumoto (tj. metryką określaną mianem „slope metric", zob. [29]) w odniesieniu do miary fizycznego czasu. Poniżej w kontekście nawigacji Zermelo geometryzowany czas będzie wyrażany jako całka z długości w odpowiedniej metryce Finslera.

2.1. *Rzeczywista geometria Finslera.* W literaturze istnieją różne podejścia wprowadzające w podstawy geometrii Finslera. W artykule tym wzorujemy się przede wszystkim na podejściu przedstawianym w pracach Shiinga-Shena Cherna i Zhongmina Shena [11], jako że to właśnie Shen zaobserwował bliski związek między problemem nawigacji Zermelo a pewną metryką Finslera (zob. [38]). Od tego momentu tytułowe zagadnienie zaczęło być rozważane także „czysto” geometrycznie.

Niezbędnym dla nas narzędziem będzie metryka Finslera, której definicję podamy z wykorzystaniem tak zwanej normy Minkowskiego.

Definicja 2.1 [11]**.** Niech V będzie przestrzenią wektorową skończonego wymiaru. Funkcja $F = F(y)$ na V nazywa się *normą Minkowskiego*, jeśli ma następujące własności:

1° $F(y) \geqslant 0$ dla każdego $y \in V$ i $F(y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y = 0$,

2° $F(cy) = cF(y)$ dla każdego $y \in V$ i $c > 0$,

3° F jest taką funkcją klasy C^∞ na $V \setminus \{0\}$, że dla każdego $y \in V$ następujący dwuliniowy symetryczny funkcjonał g_y na V jest iloczynem skalarnym

$$g_y(u, v) := \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} [F^2(y + su + tv)]_{s=t=0}.$$

Iloczyn skalarny g_y nazywa się formą fundamentalną w kierunku y. Parę (V, F) nazywamy *przestrzenią Minkowskiego*. Mówimy, że norma Minkowskiego jest *odwracalna*, jeśli $F(-y) = F(y)$ dla każdego $y \in V$.

Zakładamy, że rozmaitości M są tutaj klasy C^∞ (gładkie), spójne i skończonego wymiaru. Dla punktu $x \in M$ oznaczmy przez $T_x M$ *przestrzeń styczną* do M w punkcie x. *Wiązka styczna* TM jest sumą mnogościową $TM := \bigcup_{x \in M} T_x M$ przestrzeni stycznych z naturalną strukturą różniczkową. Elementy w TM oznaczmy przez (x, y), przy czym $y \in T_x M$ oraz (x^i, y^i) są współrzędnymi w mapie lokalnej, $i = 1, \ldots, n$. Niech $TM_0 := TM \setminus \{0\} = \{(x, y) \in TM : y \neq 0,\ x \in M\}$. Metryka Finslera na rozmaitości M jest funkcją klasy C^∞ na TM_0, której obcięcie do każdej przestrzeni stycznej $T_x M$ jest normą Minkowskiego.

Definicja 2.2 [11]**.** Funkcja $F = F(x, y)$ na TM nazywa się *metryką Finslera* na M, jeśli spełnia następujące warunki:

1° F jest klasy C^∞ na TM_0,

2° $F_x(y) := F(x, y)$ jest normą Minkowskiego na $T_x M$ dla każdego $x \in M$.

Parę (M, F) nazywamy *rozmaitością Finslera*.

W dalszej części potrzebować będziemy wypukłości F, tj. nierówności

$$F(x, y_1 + y_2) \leqslant F(x, y_1) + F(x, y_2), \quad y_1, y_2 \in T_x M. \tag{1}$$

Powyższą nierówność zastąpimy jednak silniejszym warunkiem. Mianowicie, hesjan $[F^2(x, y)]_{y^i y^j}$ ma być dodatnio określony dla każdego $y \in T_x M \setminus \{0\}$. Indeksy dolne y^i, y^j oznaczają tutaj pochodne cząstkowe. Taki warunek implikuje nierówność (1). Przywołując definicję normy Minkowskiego, mamy

$$g_{ij}(x,y) := \frac{1}{2}\left[F^2(x,y)\right]_{y^i y^j} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}. \qquad (2)$$

Niezdegenerowana macierz (g_{ij}) jest nazywana tensorem fundamentalnym. Oznaczmy przez $g^{ij}(x,y)$ element odwrotny do $g_{ij}(x,y)$, tj. $g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k$. Mówimy, że metryka Finslera F jest *silnie wypukła*, jeżeli kanoniczna symetryczna forma dwuliniowa $g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$, przy czym g_{ij} jest wyrażony przez wzór (2), jest dodatnio określona i wówczas definiuje iloczyn skalarny na każdym włóknie $\pi^* TM$ (zob. [5]).

Mówimy także, że metryka Finslera $F = F(x,y)$ na rozmaitości M jest *odwracalna*, jeśli $F(x,-y) = F(x,y)$ dla wszystkich $y \in T_xM$. Ogólnie warunek odwracalności (symetrii) nie zachodzi dla metryk Finslera. W szczególnym przypadku F generuje na M *metrykę Riemanna*, jeśli $F_x(y) := F(x,y) = \sqrt{\langle y,y\rangle_x}$ dla każdego $x \in M$ i $y \in T_xM$, przy czym $\langle \cdot,\cdot\rangle_x$ jest iloczynem skalarnym na T_xM. W tym sensie metryki Riemanna są więc odwracalnymi metrykami Finslera. W zapisie ze współrzędnymi lokalnymi $F = F(x,y)$ generuje metrykę Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy $g_{ij}(x,y) = g_{ij}(x)$ nie zależy od y. W tym przypadku $F = \sqrt{g_{ij}(x)y^i y^j}$.

Metryka typu (α,β). Używając normy Riemanna danej wzorem $\alpha = \sqrt{a_{ij}y^i y^j}$ oraz 1-formy $\beta = b_i y^i$ na przestrzeni stycznej T_xM, możemy zdefiniować ogólniejsze normy Minkowskiego (zob. [11]), czyli (α,β)-normy

$$F = \alpha\phi\left(\frac{\beta}{\alpha}\right), \qquad (3)$$

przy czym $\phi = \phi(s)$ jest dodatnią funkcją klasy C^∞ określoną na pewnym symetrycznym przedziale otwartym $I = (-b_0, b_0)$, $s = \frac{\beta}{\alpha}$. Taka F jest dodatnio jednorodna stopnia pierwszego na TM_0 względem y. Więcej szczegółów na ten temat można znaleźć w książce [11, rozdział 1, w szczególności lemat 1.1.2]. Z równości (3) możemy wygenerować szczególne przypadki, na przykład metrykę Riemanna $F = \alpha$ $(\phi(s) = 1)$, Randersa $F = \alpha + \beta$ $(\phi(s) = 1 + s)$, Kropiny $F = \frac{\alpha^2}{\beta}$ $(\phi(s) = \frac{1}{s})$, Matsumoto $F = \frac{\alpha^2}{\alpha-\beta}$ $(\phi(s) = \frac{1}{1-s})$. Geodezyjne wspomnianej już wcześniej metryki Matsumoto reprezentują czasominimalne trajektorie na zboczu góry traktowanym jako powierzchnia Finslera, z uwzględnieniem działania pola grawitacyjnego.

2.2. *Zespolona geometria Finslera.* Problem nawigacji Zermelo jest również obecny w zespolonej geometrii Finslera na rozmaitościach Hermite'a z użyciem zespolonych metryk Randersa i Kropiny, przy działaniu zakłócenia $W(z)$ zmiennej zespolonej z. W przeciwieństwie do przypadku rzeczywistego (riemannowskiego), zespolona metryka Randersa została wprowadzona znacznie później, bo dopiero w 2007 roku. Przykładowa różnica polega na tym, że zespolone metryki Randersa otrzymane z perturbacji pewnych metryk Hermite'a o stałej holomorficznej krzywiźnie sekcyjnej nie mają stałej krzywizny holomorficznej. Zespolone metryki Randersa i Kropiny zostały zastosowane w badaniach nad uogólnionymi przestrzeniami Berwalda, zespolonymi przestrzeniami Douglasa oraz rzutowo równoważnymi zespolonymi metrykami Finslera (zob. [3]). Więcej szczegółów na temat uogólnień zespolonej nawigacji Zermelo można znaleźć w pracach [1, 2]. Inne wykorzystanie nawigacji Zermelo na gładkich $2n$-wymiarowych rozmaitościach Riemanna ze strukturą prawie zespoloną przedstawia artykuł [25], gdzie wykazano warunek konieczny i dostateczny dla metryki Randersa na to, aby była ona metryką Rizza.

3. Rozwiązania problemu Zermelo ze względu na rodzaj zaburzenia

Istotną rolę w nawigacji Zermelo odgrywa pole wektorowe, dlatego w dalszej części rozróżnimy przypadki problemu ze względu na „siłę" wiatru $|W|_h$, przy czym h jest wyjściową metryką Riemanna. Oznacza to, że problem jest postawiony pierwotnie w przestrzeni (M, h). Zaznaczmy, iż wiatr zależy tutaj od miejsca, ale nie od czasu. W standardowym ujęciu (przy stałej prędkości własnej statku, $f = 1$) wyróżnia się wiatr: słaby ($|W|_h < 1$), krytyczny ($|W|_h = 1$) i silny ($|W|_h > 1$). W przypadku braku zakłócenia metryka Finslera sprowadza się oczywiście do metryki Riemanna, co uważamy za przypadek trywialny. W dalszej części chcemy pokazać konstrukcję metryki, w której geodezyjne stanowią rozwiązanie tytułowego zagadnienia, czyli minimalizują czas podróży statku na „riemannowskim morzu" (M, h). W tym celu wykorzystamy najpierw pojęcie indykatrysy i dodatkowo dopuścimy zmienną prędkość własną statku, $|u|_h = f(x) \in (0, 1]$, przy czym wektor u będzie pełnił rolę sterowania. To powoduje, że ujęcie problemu jest nieco ogólniejsze ze względu na dodatkowe przypadki konforemne (zob. [11, 22]). Inna możliwa droga wykorzystuje głównie iloczyn skalarny (zob. [5]).

3.1. *Wiatr słaby,* $|W|_h < f$. Przypadek problemu Zermelo przy słabym wietrze i stałej prędkości statku ($f = 1 = \text{const}$) został uogólniony na dowolną rozmaitość Riemanna po raz pierwszy w 2002 roku przez Shena, który zaobserwował to, iż rozwiązaniem zagadnienia są geodezyjne pewnej szczególnej metryki Finslera, tj. metryki Randersa (zob. [5, 11, 38]). Warto wspomnieć, iż te niesymetryczne metryki zostały wprowadzone przez fizyka Gunnara Randersa w 1941 roku w teorii pola z punktu widzenia teorii względności. Później nazwane zostały jego nazwiskiem przez Romana Ingardena, który z kolei użył ich w teorii mikroskopu elektronowego w 1957 roku. Metryka ta pojawia się w różnych działach fizyki teoretycznej, a jej własności zostały opisane szczegółowo w geometrii Finslera.

Konstrukcja oparta na indykatrysie. Dana jest przestrzeń Minkowskiego (V, Φ). Niech

$$S_\Phi := \{y \in V : \Phi(x, y) = 1\}.$$

Zbiór S_Φ jest domkniętą hiperpowierzchnią, która jest dyfeomorficzna ze standardową sferą $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ i S_Φ nazywamy *indykatrysą* Φ (zob. [11]). W szczególności, indykatrysą w każdej przestrzeni stycznej jest

$$S_x(\Phi) := \{y \in T_x M : \Phi(x, y) = 1\},$$

przy czym (M, Φ) jest dowolną rozmaitością Finslera. Indykatrysa $S_x(\Phi)$ metryki Finslera Φ jest zwartym podzbiorem $T_x M$. Funkcja Φ jest odwracalna w punkcie $x \in M$ wtedy i tylko wtedy, gdy $S_x(\Phi)$ jest symetryczna względem środka w $T_x M$ (zob. [32]).

Metryki F można konstruować poprzez przesunięcie Φ w taki sposób, aby indykatrysy metryk Finslera Φ i F z polem wektorowym W, przy czym $\Phi(x, W) < 1$, były związane poprzez sztywną translację (zob. na przykład [11])

$$S_x(F) = S_x(\Phi) + W_x.$$

Rozważmy takie $W \in T_x M$, że $\Phi(x, W) < f$, przy czym $f = f(x) \in (0, 1]$ jest funkcją gładką na M. Wówczas zbiór $S_x\left(\frac{\Phi}{f}\right) + W_x$ zawiera środek $T_x M$, ponieważ wiatr jest słaby i $\frac{\Phi}{f} < 1$. Możemy zatem zdefiniować funkcję $F\colon TM \to [0, \infty)$ następująco. Dla każdego wektora $y \in T_x M \setminus \{0\}$ określamy jednoznacznie $F(x, y)$ jako taką liczbę dodatnią, że

$$\frac{y}{F(x, y)} \in S_x\left(\frac{\Phi}{f}\right) + W_x,$$

a więc $S_x(F) = S_x\left(\frac{\Phi}{f}\right) + W_x$. Zauważmy, że $\frac{yf}{\Phi(x,y)} \in S_x\left(\frac{\Phi}{f}\right)$. Stąd

$$\Phi\left(x, \frac{y}{F(x, y)} - W\right) = f \tag{4}$$

oraz $\Phi\big(x, \frac{yf}{\Phi(x,y)}\big) = f$. Wówczas dla każdego $y \in T_xM \setminus \{0\}$ możemy wyznaczyć $F(x, y)$ z równania

$$f(x)F(x, y) = \Phi\big(x, y - F(x, y)W(x)\big).$$

Można powiedzieć, że F jest metryką Finslera generowaną przez (Φ, W, f). Jeśli $F = F(x, y)$ jest wyznaczona przez (Φ, W, f), to wtedy $\Phi = \Phi(x, y)$ jest wyznaczona przez $(F, -W, f)$. A zatem pomysł polega na wykorzystaniu metryki Finslera Φ, pola wektorowego W i prędkości własnej statku f spełniających nierówność $\Phi(x, W) < f$ oraz wyznaczeniu nowej metryki Finslera F jako rozwiązania ostatniego równania. Mamy zatem $\Phi(x, u) = f(x)$. Następnie niech $\Phi(x, y) = \sqrt{h(y, y)}$ oznacza metrykę Riemanna. Wtedy $\Phi(x, v - W) = \sqrt{h(v - W, v - W)} = f(x)$, przy czym $v = u + W$. Wektor v będziemy traktować jako wektor prędkości wypadkowej statku. Sfera jednostkowa w każdej przestrzeni T_xM składa się ze wszystkich takich wektorów stycznych u, że $\frac{|u|_h}{f} = 1$, przy czym $|\cdot|_h$ oznacza normę w metryce h. Stąd

$$|v - W|_h = |u|_h = f(x). \tag{5}$$

Otrzymujemy zatem

$$\Big|\frac{y}{F(x, y)} - W(x)\Big|_h = f(x). \tag{6}$$

Dla każdego wektora $y \in T_xM\setminus\{0\}$ mamy jednoznaczne rozwiązanie $F = F(x, y) > 0$ równania (6). Dla dowolnego $c > 0$ zachodzi $\big|\frac{cy}{cF(x,y)} - W(x)\big|_h = f(x)$. Z drugiej zaś strony, podstawiając $y := cy$, otrzymujemy $\big|\frac{cy}{F(x,cy)} - W(x)\big|_h = f(x)$. Tak więc $\big|\frac{cy}{cF(x,y)} - W(x)\big|_h = \big|\frac{cy}{F(x,cy)} - W(x)\big|_h$ i z jednoznaczności mamy $F(x, cy) = cF(x, y)$. Oznacza to, że $F = F(x, y)$ jest dodatnio jednorodną funkcją ze względu na wektor $y \in T_xM$ w każdym punkcie $x \in M$. Dla $y = Fv$ i $v = u + W$, porównując (5) i (6), dostajemy

$$F(x, v) = 1. \tag{7}$$

W każdej przestrzeni stycznej T_xM sfera jednostkowa metryki F jest W-translacją sfery jednostkowej $\frac{h}{f}$.

Geometryzacja czasu. W celu zmierzenia długości gładkiej krzywej $\gamma\colon [t_0, t_1] \to M$, $t \mapsto \gamma(t) = x(t)$, wystarczy zdefiniować nieujemną funkcję skalarną $F(x(t), \dot{x}(t))$ na każdej przestrzeni stycznej T_xM. Wówczas długość γ określamy jako

$$\mathcal{L}_F(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), \dot{x}(t))\,\mathrm{d}t.$$

Funkcja F musi być dodatnio jednorodna stopnia jeden, tj. $F(x, cy) = cF(x, y)$ dla $c > 0$. Wówczas $\mathcal{L}_F(\gamma)$ nie zależy od parametryzacji. Otrzymujemy zatem nieujemną funkcję $d\colon M \times M \to [0, \infty)$ poprzez $d(P, Q) := \inf \mathcal{L}_F(\gamma)$, przy czym kres dolny jest brany po wszystkich (kawałkami) gładkich krzywych γ z P do Q. Ogólnie d nie jest odwracalna, tj. $d(P, Q) \neq d(Q, P)$ dla pewnych par punktów (P, Q). Powyższe możemy formalnie wyrazić w postaci krótkiego lematu.

Lemat 3.1 [11]**.** *Niech (M, Φ) będzie rozmaitością Finslera i W polem wektorowym na M, przy czym $\Phi(x, W(x)) < 1$ dla każdego $x \in M$. Niech $F\colon TM \to [0, \infty)$ dana będzie przez wzór* (4) *i $f = 1$. Dla każdej kawałkami gładkiej krzywej γ na M F-długość γ jest równa czasowi, w którym statek przemieszcza się wzdłuż niej.*

Dowód. Niech $\tilde{c}\colon [0, T] \to M$ będzie taką parametryzacją γ, że wektor prędkości $\dot{\tilde{c}}(t)$ równy jest wektorowi v zaczepionemu w punkcie $\tilde{c}(t)$. Wówczas T jest czasem ruchu statku wzdłuż krzywej γ oraz z warunku (7) dostajemy $F(\tilde{c}(t), \dot{\tilde{c}}(t)) = 1$. Stąd wynika, iż $T = \int_0^T F(\tilde{c}(t), \dot{\tilde{c}}(t))\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}_F(\gamma)$. □

Oznacza to, że przy działaniu pola wektorowego W, dla dowolnych punktów P, Q na M najkrótsza droga z P do Q nie jest już geodezyjną w wyjściowej metryce Riemanna h, ale geodezyjną w metryce Finslera. Należy wybrać taką drogę $\gamma(t)$ z P do Q, która minimalizuje całkowity czas przejścia T. Wielkość ta jest niezależna od parametryzacji zachowujących orientację z powodu dodatniej jednorodności F oraz twierdzenia o zamianie zmiennych.

Z warunku (6) i definicji iloczynu skalarnego otrzymujemy $h\left(\frac{y}{F} - W, \frac{y}{F} - W\right) = f^2$. Zachodzi zatem równośc $\frac{1}{F^2}h(y, y) - 2\frac{1}{F}h(y, W) + h(W, W) = f^2$. W ten sposób mamy zależność

$$\left(|u|_h^2 - |W|_h^2\right)F^2 + 2h(y, W)F - |y|_h^2 = 0. \tag{8}$$

Wybierając dodatnie rozwiązanie równania (8), dostajemy

$$F(x, y) = \frac{\sqrt{[h(W, y)]^2 + |y|_h^2(|u|_h^2 - |W|_h^2)} - h(W, y)}{|u|_h^2 - |W|_h^2}. \tag{9}$$

Otrzymaną metrykę Randersa F możemy także przedstawić w postaci $F = \alpha + \beta$ jako sumę dwóch składników.

– Pierwszy składnik jest normą α z y względem nowej metryki Riemanna $a := a_{ij}\,\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$, czyli

$$\alpha(x,y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}, \quad a_{ij} = \frac{h_{ij}}{\lambda} + \frac{W_i}{\lambda}\frac{W_j}{\lambda}.$$

– Drugi składnik jest wartością 1-formy $b := b_i \mathrm{d}x^i$ w y, czyli

$$\beta(x,y) = b_i(x)y^i, \quad b_i = -\frac{W_i}{\lambda},$$

przy czym $W_i = h_{ij}W^j$ i $\lambda = |u|_h^2 - W^i W_i = |u|_h^2 - h(W,W) = f^2 - |W|_h^2$. Możemy teraz zapisać wzór (9) w nieco innej postaci

$$F(x,y) = \frac{\sqrt{[h(W,y)]^2 + \lambda |y|_h^2}}{\lambda} - \frac{h(W,y)}{\lambda} = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j} + b_i(x)y^i.$$

Elementy (h, W, f) nazywamy (*uogólnionymi*) *danymi nawigacyjnymi*, natomiast pary (α, β) można określić mianem *danych geometrycznych* dla metryki F (zob. [1, 2, 22, 32]). Zauważmy, iż w przypadku braku zakłócenia geodezyjne wyjściowej metryki Riemanna h nie muszą być rozwiązaniem problemu, tak jak ma to miejsce w standardowym podejściu ($h(u,u) = 1$). Różnica powstaje tutaj ze względu na wpływ zmiennej funkcji $|u(x)|_h$, co w efekcie prowadzi do geodezyjnych metryk konforemnych do wyjściowej. Dopuszczenie zmiennej prędkości f tworzy także związek z konforemnymi polami wektorowymi oraz tak zwaną słabo konforemną geometrią Finslera (zob. [16, 32, 37]).

Uwaga 3.1. Problem Zermelo rozważany w geometriii Finslera przez różnych autorów, na przykład [11, 17, 33, 42], odnosi się w rzeczywistości do szczególnego przypadku problemu, tj. w szczególności pole wektorowe nie zależy od czasu[3]. W $\mathbb{R}^2$ został on wyszczególniony już przez Carathéodory'ego i zatytułowany *Najszybsza droga morska dla danego stacjonarnego prądu morskiego* (zob. [9, §§ 276–287]). Pełna wersja problemu dopuszcza zależność działającego zakłócenia od przestrzeni i czasu (zob. [9, §§ 458–460]) oraz pola o dowolnej sile. Takie założenia były już zawarte w pracach Zermelo [43, 44] czy Levi-Civity [26], co prawda rozważanych jedynie w przestrzeniach euklidesowych. Ogólniejszy kontekst uwzględnimy w ujęciu wariacyjnym zagadnienia w paragrafie 4.

Konstrukcja oparta na iloczynie skalarnym. Dla porównania pokażemy pokrótce drugą konstrukcję metryki F opartą na iloczynie skalarnym.

[3] Ponadto rozważane dotychczas zakłócenia w geometrii Finslera nie były silne (zob. [8, 21]).

W przeciwieństwie do rozważań w pracy [5] nie zakładamy, że $|u|_h = \sqrt{h(u,u)} = 1$, przy czym W oznacza słaby wiatr, $|W|_h \in [0,1)$. A zatem $|u|_h \in (|W|_h, 1]$. Stąd $|W|_h < |u|_h \leqslant 1 = u_{\max}$ i $|u|_h = f$, przy czym f jest funkcją gładką. Tak samo jak wcześniej – zarówno wiatr, jak i prędkość własna statku zależą od miejsca, ale nie zależą od czasu. Podstawiając $u = v - W$ w $h(u,u)$, dostajemy $h(v, W) = |v|_h |W|_h \cos\theta$, a dla $\theta \equiv \measuredangle\{v, W\}$ mamy

$$|u|_h^2 = h(v - W, v - W) = |v - W|_h^2 = |v|_h^2 - 2|v|_h|W|_h \cos\theta + |W|_h^2.$$

Po przyjęciu oznaczenia $\lambda = |u|_h^2 - |W|_h^2$, mamy równość $|v|_h^2 - 2|v|_h|W|_h \cos\theta - \lambda = 0$. Ze względu na założenie $|W|_h < |u|_h$ prędkość wypadkowa jest zawsze dodatnia, czyli $|v|_h > 0$. Po rozwiązaniu otrzymanego równania kwadratowego i wybraniu dodatniego pierwiastka dostajemy związek $|v|_h = |W|_h \cos\theta + \sqrt{|W|_h^2 \cos^2\theta + |u|_h^2 - |W|_h^2}$, co w skrócie można zapisać jako $|v|_h = p + q$. W literaturze używa się często krótszego zapisu dla metryki F jedynie z argumentem wektorowym, przyjmijmy zatem $F(v) := F(x, v)$. Jako że $F(v) = 1$, widzimy, że

$$F(v) = \frac{|v|_h}{|v|_h} = |v|_h \frac{q - p}{q^2 - p^2} = \frac{\sqrt{[h(W,v)]^2 + |v|_h^2 \lambda} - h(W,v)}{\lambda}.$$

Pozostaje obliczyć $F(y)$, przy czym $y \in T_x M$. Każdy niezerowy wektor y otrzymujemy jako iloczyn dodatniej liczby c dla pewnego wektora v, przy czym $F(v) = 1$. Dla $c > 0$ podróż wzdłuż $y = cv$ przy zakłócającym wietrze zabiera c jednostek czasu. Z tego wynika, iż F jest dodatnio jednorodna, $F(y) = cF(v)$. Korzystając z tej jednorodności oraz otrzymanego wzoru na $F(v)$, dostajemy formułę (9). Z założenia mamy $|W|_h < |u|_h$, stąd $\lambda > 0$. Widzimy, że $F(y)$ jest dodatnia, gdy $y \neq 0$ oraz $F(0) = 0$.

Podsumowując, dla $f = 1$ otrzymujemy następujący rezultat.

Twierdzenie 3.2 [5]**.** *Silnie wypukła metryka Finslera F jest metryką Randersa wtedy i tylko wtedy, gdy stanowi rozwiązanie problemu nawigacji Zermelo na rozmaitości riemannowskiej (M, h) przy działaniu wiatru W spełniającego warunek $h(W, W) < 1$. Ponadto F jest metryką riemannowską wtedy i tylko wtedy, gdy $W = 0$.*

Otrzymujemy zatem bijekcję między parami (α, β) a (h, W) na rozmaitości M. Pełny dowód powyższego twierdzenia można znaleźć w artykule [5], a nieco ogólniejszej jego wersji z poszerzonymi danymi nawigacyjnymi (h, W, f) w pracach [22, 32]. Dodajmy, iż w kontekście czasoprzestrzennym uogólniony problem Zermelo był także rozważany w artykule [16] w nawiązaniu do pracy [12] pochodzącej z początków dyskusji.

Poniższe przykłady deformacji przestrzeni riemannowskich za pomocą pól wektorowych, czyli poprzez nawigację Zermelo, generują metryki Randersa o różnym znaku krzywizny flagowej, która jest finslerowskim odpowiednikiem krzywizny sekcyjnej. W przypadku wymiaru dwa sprowadza się ona do krzywizny Gaussa (więcej na temat krzywizny flagowej można znaleźć w książce [11]).

Przykład 3.1 ($\mathbb{S}^3$ z wiatrem rotacyjnym, [5])**.** Niech $\mathbb{S}^3$ oznacza sferę jednostkową w $\mathbb{R}^4$, której parametryzacja wyraża się następująco:

$$(x, y, z) \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}}(s, x, y, z),$$

a $s = \pm 1$ dla wschodniej i zachodniej półkuli. Ustalmy dowolną stałą $\varepsilon \in (0, 1)$. Wówczas pole rotacyjne możemy opisać jako $W = \varepsilon(y, -x, 0)$, przy czym

$$|W| = \varepsilon\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2 + z^2}} < 1.$$

Otrzymana metryka Randersa $F = \alpha + \beta$ ma stałą (dodatnią) krzywiznę flagową $K = 1$. Jeśli przyjmiemy, że $\psi := xu + yv$, otrzymujemy

$$\alpha^2 = \frac{\rho^2(u^2 + v^2) - (\rho + \varepsilon^2\varphi)\psi^2 + \eta[(\rho - z^2)w^2 - 2zw\psi]}{\rho\eta^2},$$

$$\beta = \frac{\varepsilon(xv - yu)}{\eta},$$

przy czym $\varphi := 1 + z^2$, $\rho := 1 + x^2 + y^2 + z^2$ i $\eta := 1 + (1 - \varepsilon^2)(x^2 + y^2) + z^2$.

Przykład 3.2 ($\mathbb{R}^3$ z translacją, tj. polem stałym, [5])**.** Niech wyjściowa metryka Riemanna h będzie metryką euklidesową δ_{ij} w $\mathbb{R}^3$ oraz p, q, r będą dowolnymi takimi stałymi, że $p^2 + q^2 + r^2 < 1$. Pole wektorowe wynosi $W = (p, q, r)$, przy czym $|W| = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$. W wyniku takiej perturbacji otrzymujemy metrykę Randersa o zerowej krzywiźnie flagowej, której składniki wynoszą

$$\alpha = \frac{\sqrt{(pu + qv + rw)^2 + (u^2 + v^2 + w^2)[1 - (p^2 + q^2 + r^2)]}}{1 - (p^2 + q^2 + r^2)},$$

$$\beta = -\frac{pu + qv + rw}{1 - (p^2 + q^2 + r^2)}.$$

Funkcja F jest także metryką Minkowskiego.

Przykład 3.3 (przestrzeń hiperboliczna z wiatrem rotacyjnym [5])**.** Niech h będzie metryką Kleina na kuli jednostkowej $\mathbb{B}^3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 <$

$1\}$, tj. $h_{ij} = \frac{(1-x^2-y^2-z^2)\delta_{ij}+x_i x_j)}{(1-x^2-y^2-z^2)^2}$, przy czym $x_i := \delta_{is}x^s$. Wiatr dany jest przez $W = (y, -x, 0)$, przy czym

$$|W| = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2 - z^2}}.$$

Stosując nawigację Zermelo, otrzymujemy metrykę Randersa o stałej (ujemnej) krzywiźnie flagowej ($K = -1$)

$$\alpha^2 = \frac{\varphi[\rho(u^2 + v^2) + (1 - \eta)w^2 + 2zw(xu + yv)] + \eta(yu - xv)^2}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)\varphi^2},$$

$$\beta = \frac{-1}{\varphi}(yu - xv),$$

przy czym $\varphi := 1 - 2x^2 - 2y^2 - z^2$, $\rho := 1 - z^2$, $\eta := x^2 + y^2$. Zwróćmy uwagę, że aby spełniony był tutaj warunek wypukłości, czyli $|W| < 1$, należy ograniczyć dziedzinę do zbioru $\{2x^2 + 2y^2 + z^2 < 1\}$.

Warunek silnej wypukłości, $|W|_h < 1$, zapewnia to, że F jest dodatnio określoną metryką Finslera.

Wybrane zastosowania. Wykorzystując zachodzącą bijekcję między danymi nawigacyjnymi (h, W) a geometrycznymi (α, β), udało się dokonać klasyfikacji silnie wypukłych metryk Randersa o stałej (skalarnej) krzywiźnie flagowej z dokładnością do lokalnych izometrii oraz efektywnie zbadać przestrzenie modularne w kontekście twierdzenia Yasuda–Shimada (zob. [5]). W szczególności, metryki Finslera zostały skategoryzowane w zależności od znaku krzywizny flagowej. Co więcej, pozwoliło to znacznie poszerzyć dotychczasowy stan wiedzy na temat rzutowo równoważnych metryk Finslera, w tym rzutowo płaskich metryk Randersa o stałej krzywiźnie flagowej i odpowiadających im równań różniczkowych cząstkowych, geodezyjnych przestrzeni Randersa o stałej krzywiźnie, a także, ogólniej, geodezyjnych metryk Finslera (zob. [17]). Colleen Robles, stosując nawigację Zermelo, sklasyfikowała geodezyjne Randersa na sferze wymiaru dwa przy działaniu wiatru rotacyjnego, co można także modelować jako ruchy sztywne sfery (zob. [33]). Ciekawy związek geometryczno-teorioliczbowy dotyczy tutaj istnienia otwartych i zamkniętych geodezyjnych Randersa w zależności od rodzaju liczby rzeczywistej $c \in (0;1)$, tzn. jej (nie)wymierności, przy czym c jest współrzędną wiatru wyrażonego we współrzędnych sferycznych (ϕ, θ), tj. $W(\phi, \theta) = (c, 0)$. Ten sam typ geodezyjnych na elipsoidzie był także analizowany w artykule [24]. Przykłady zastosowania nawigacji Zermelo z metryką Randersa w fizyce w kontekście mechaniki kwantowej i teorii względności są zawarte na przykład w pracach [6–8, 34, 35].

3.2. *Wiatr krytyczny,* $|W|_h = f$. Rozwiązanie problemu w geometrii Finslera jest zupełnie inne, jeśli wiatr staje się silniejszy, tj. krytyczny. W związku z założeniem $|W|_h = f$ równanie (8) staje się równaniem pierwszego stopnia. Teraz statek nie może już przemieszczać się w każdym kierunku, tak jak w przypadku słabego wiatru. Interpretując to geometrycznie, w każdej przestrzeni stycznej T_xM sfera jednostkowa nowej metryki Finslera F jest W-translacją h-jednostkowej sfery Riemanna. Jednakże inaczej niż w przypadku Randersa, ta pierwsza przechodzi przez środek T_xM i dlatego F nie może być metryką Finslera w klasycznym sensie (zob. [42]).

Po przeprowadzeniu rozważań analogicznych do poprzednich, otrzymujemy w rezultacie (α, β)-metrykę typu Kropiny

$$F(x, y) = \frac{|y|_h^2}{2h(y, W(x))}.$$

Otrzymana metryka ma postać $F = \alpha^2/\beta$, przy czym $\alpha = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}$ i $\beta = b_i(x)y^i$, $a_{ij}(x) = e^{-k(x)}h_{ij}$, $b_i(x) = 2e^{-k(x)}W_i$ dla pewnej gładkiej funkcji $k(x)$ – zob. artykuł [42].

Stwierdzenie 3.3. *Metryka Finslera F jest metryką Kropiny wtedy i tylko wtedy, gdy stanowi rozwiązanie problemu nawigacji Zermelo na rozmaitości Riemanna* (M, h) *przy zmiennej w przestrzeni prędkości własnej statku* $0 < |u(x)|_h \leqslant 1$ *i działaniu wiatru krytycznego* $W(x)$ *spełniającego warunek* $|W|_h = |u|_h$.

W ujęciu globalnym wymaga się, aby na rozmaitości M istniało pole wektorowe W bez żadnego zera. Aby użyć omawianej teorii, należy wziąć pod uwagę topologiczne ograniczenia wynikające z twierdzenia Poincarégo–Hopfa. W szczególności, nie mamy tutaj ujętego przypadku sfery wymiaru dwa, ponieważ dla każdej zwartej i regularnej 2-wymiarowej rozmaitości z niezerową charakterystyką Eulera każde ciągłe styczne pole wektorowe ma przynajmniej jedno zero (zob. [42, Proposition 5.2 i Theorem 5.13]). Wraz ze wzrostem siły wiatru (słabego) geodezyjne Randersa zbliżają się w granicy ($|W|_h \to f$) do geodezyjnych Kropiny, ale postać obydwu (α, β)-metryk jest całkiem różna. Taka zmiana jest jednak widoczna, jeśli spojrzymy na postać wyjściowego równania (8), tj. współczynnik $\lambda = |W|_h^2 - f^2$.

3.3. *Wiatr silny,* $|W|_h > f$. Pozostaje pytanie o rozwiązanie problemu nawigacji Zermelo, gdy wiatr jest silny. W literaturze w ujęciu geometrycznym tytułowe zagadnienie przy silnym zakłóceniu i stałej prędkości własnej statku ($f = 1 = \text{const}$) zostało przedstawione w pracach [8, 21], z wykorzystaniem tzw. wiatrowych struktur finslerowskich (stożkowych) w kontekście m.in. ogólnej teorii względności. W tej sytuacji rozwiązanie stanowią geodezyjne w metryce pseudo-Finslera i Lorentza. Przypadek ten, do którego nawiążemy w paragrafie 4, jest ciekawy również z tego powodu, iż oprócz rozwiązań czasominimalnych mogą występować także rozwiązania czasomaksymalne, które nie istnieją w przypadku wiatru słabego lub krytycznego. Czy trajektorie maksymalizujące czas można traktować jako rozwiązanie problemu nawigacji Zermelo, czy też nie, zależy od ujęcia zagadnienia (zob. na przykład książkę [9]).

4. Uogólniony wzór na optymalną nawigację w ujęciu wariacyjnym

4.1. *Kontekst.* Wracając do genezy problemu i podejścia wariacyjnego, przypomnijmy ponownie, że od samego początku dopuszczane było zakłócenie zależące od przestrzeni i czasu oraz mogło ono mieć różną siłę, jak wiatr bądź prąd wodny. Oznacza to, że pole wektorowe może zmieniać się, na przykład, ze słabego w silne lub odwrotnie. W ujęciu finslerowskim nawigacja Zermelo ogólnie rozpatrywana jest dla każdego typu wiatru osobno, z użyciem różnych metryk w każdym z przypadków. W rachunku wariacyjnym, a następnie w teorii sterowania najistotniejszą rolę w kwestii rozwiązania odgrywa przepis na optymalne sterowanie, czyli zachowanie wektora u („kurs statku względem przemieszczającej się wody lub powietrza"). Z kolei w podejściu geometrycznym istotę wyniku stanowi metryka, a co za tym idzie zachowanie wektora v stycznego do F-geodezyjnej („kurs statku względem stałego dna"). Obie wielkości są oczywiście ze sobą powiązane ogólną relacją $v = u + W$.

Pozostając w konwencji, w jakiej przedstawiali swoje wyniki kolejni matematycy w początkach badań nad tytułowym problemem (zob. na przykład prace [4, 9, 12, 14, 26, 28, 43, 44]), pokażemy poniżej uogólnienie warunku na optymalną nawigację dla rozmaitości Riemanna konforemnie płaskich w dowolnym wymiarze, przy działaniu pola wektorowego zmiennego w przestrzeni i czasie, dopuszczając dodatkowo zmienną prędkość własną. Warunek ten w układzie z równaniami ruchu daje trajektorie czasooptymalne (ekstremale), o ile istnieją. Bazując na równaniach Eulera–Lagrange'a, chcemy nawiązać bezpośrednio do pierwszych uogólnień autorstwa przede wszystkim Levi-Civity, De Mira

Fernandesa, Manià i Arrowa (zob. [4, 12, 26, 28]). Powiążemy je w znacznie szerszym kontekście, operując uogólnionymi danymi nawigacyjnymi (h, W, f). W zapisie będziemy stosować konwencję sumacyjną Einsteina. W sytuacji ogólnej wariacyjne podejście oparte na lagranżjanie jest równoważne do drogi z wykorzystaniem hamiltonianu. Jednak to, które z nich jest korzystniejsze z punktu widzenia złożoności obliczeń, zależy od konkretnych danych (h, W, f), tzn. mamy układ n równań różniczkowych rzędu dwa bądź układ $2n$ równań różniczkowych rzędu jeden.

4.2. *Wyjściowa metryka Riemanna konforemnie płaska.* Dwie metryki Riemanna h, $\tilde{h}$ na tej samej rozmaitości nazywamy *konforemnie równoważnymi*, jeśli miary kątów są takie same w obu metrykach, czyli $\tilde{h} = e^{-2f}h$ zachodzi dla pewnej funkcji skalarnej f. Dla porównania warto wspomnieć, że pojęcie kąta w geometrii Finslera nie jest symetryczne. Każda dwuwymiarowa metryka Riemanna jest lokalnie konforemnie euklidesowa (lokalnie konforemnie płaska) i współrzędne izotermiczne zawsze istnieją. Jeśli $\tilde{h}$ jest lokalnie konforemnie płaska, wówczas składnik tensora krzywizny (tzw. tensor Weyla) się zeruje. Dla $n \geqslant 4$ także implikacja w drugą stronę jest prawdziwa. Mianowicie, ten warunek konieczny jest także warunkiem dostatecznym na to, aby metryka była konforemnie płaska (dla $n \geqslant 4$, ale nie dla $n = 3$), co wynika z klasycznego twierdzenia Schoutena lub lematu Weyla. W szczególnosci, jeśli $\tilde{h}$ jest metryką Einsteina konforemnie płaską, to $\tilde{h}$ ma stałą krzywiznę. W ostatnich latach sporo uwagi poświęcono klasyfikacji rozmaitości konforemnie płaskich przy różnych założeniach geometrycznych i topologicznych, na przykład stała dodatnia krzywizna skalarna [10].

4.3. *W kierunku uogólnienia.* Niech (M, h) będzie taką spójną rozmaitością Riemanna wymiaru n, że dodatnio określony tensor metryczny h_{ij} spełnia równość $h_{ij}(x) = \frac{1}{S^2(x)}\delta_{ij}$ $(i, j = 1, \dots, n)$ dla każdego $x \in M$, przy czym współczynnik konforemności S jest dodatnią funkcją gładką określoną na M, a δ_{ij} oznacza deltę Kroneckera. Ponadto niech $(x^1, \dots, x^n)$ będą współrzędnymi lokalnymi punktu $x \in M$. Będziemy rozważać przestrzeń styczną T_xM rozpiętą przez $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$. Wówczas $v \in T_xM$ możemy wyrazić jako $v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, przy czym $v^1, \dots, v^n$ są współrzędnymi v, lub stosując konwencję Einsteina $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ – indeks występujący dwukrotnie w iloczynie jest sumowany od 1 do wymiaru przetrzeni n. Niech $\gamma\colon [0, 1] \to M$ będzie gładką krzywą na M o współrzędnych $(x^1(t), \dots, x^n(t))$ dla $t \in [0, 1]$. Dla wektora stycznego do γ będziemy używać zapisu $\dot{x}^i(t) = \frac{d}{dt}(x^i(t))$ $(i = 1, \dots, n)$. Tym razem uwzględniamy dodatkowo zależność zakłócenia W od czasu, którego współrzędne oznaczamy $W^i(x,t)$ $(i = 1,\dots,n)$. Prędkość własną statku opisuje $|u|_h = f(x,t) \in (0,1]$, przy czym $(x,t) \in M \times \mathbb{R}$ (zob. [31, Część 2]). Wektor v jest styczny do trajektorii, zatem globalny ruch wyrażony przez $v = u + W$ możemy, używając współrzędnych $(x^1(t),\dots,x^n(t))$, zapisać za pomocą *równań ruchu*.

$$\dot{x}^i(t) = W^i + u^i, \quad i = 1,\dots,n. \tag{10}$$

Celem jest otrzymanie lagranżjanu, który pozwoli nam obliczać czas. Mamy więc zależność $h_{ij}(\dot{x}^i - W^i)(\dot{x}^j - W^j) = h_{ij}u^iu^j$. Niech $\alpha_i(x,t) = S(x)\cos\theta_i(t)$, przy czym $\cos\theta_i$ oznacza kosinusy kierunkowe wektora prędkości u. Stąd otrzymujemy $u^i = f\alpha_i$ i $h_{ij}u^iu^j = \frac{1}{S^2}(u^i)^2 = \frac{f^2}{S^2}(\alpha_i)^2$, gdyż $h_{ij}u^iu^j = f^2 = |u|_h^2$ i $(\alpha_i)^2 = S^2$. W rezultacie dostajemy równanie

$$\frac{1}{S^2}\left[(\dot{x}^i)^2 - 2\dot{x}^iW^i + (W^i)^2\right] = f^2.$$

Po przyjęciu oznaczeń $\lambda := f^2 - w^2$, $p := \frac{1}{S^2}\dot{x}^iW^i$, $v^2 = \frac{1}{S^2}(\dot{x}^i)^2$, $w^2 = |W|_h^2 = \frac{1}{S^2}(W^i)^2$, $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ oraz przeprowadzeniu odpowiednich przekształceń otrzymujemy

$$\lambda L^2(x,\dot{x},t) + 2pL(x,\dot{x},t) - v^2 = 0. \tag{11}$$

Następnie biorąc pod uwagę fakt, iż $L(x,\dot{x},t) = 1$ wzdłuż krzywych spełniających równania (10), a co za tym idzie

$$T = \int_0^T L(x,\dot{x},t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T \mathrm{d}t,$$

możemy obliczyć czas, w którym statek przemieszcza się z punktu początkowego $(x^i(0))$ do punktu końcowego $(x^i(T))$ wzdłuż trajektorii $(i = 1,\dots,n)$.

W kolejnym kroku zapisujemy równania Eulera–Lagrange'a, mając na względzie powyższą całkę, czyli

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{\partial L}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i},$$

przy czym L traktujemy jako funkcję zmiennych x, $\dot{x}$ i t (zob. na przykład [26]). W rezultacie równanie (11) możemy zapisać w nowej postaci

$$(f^2 - |W|_h^2)L^2 + \frac{2}{S^2}W^i\dot{x}^iL - \frac{1}{S^2}(\dot{x}^i)^2 = 0. \tag{12}$$

Ostatnie równanie jest wariacyjnym odpowiednikiem równania (8) w geometrii Finslera. Dla porównania z przypadkami wyszczególnionymi w paragrafie 2 możemy wyróżnić tutaj dwa główne scenariusze: $\lambda \neq 0$ i $\lambda = 0$. Pierwszy oznacza, że równanie (12) jest drugiego stopnia i odnosi się do słabego wiatru, tj. $f > |W|_h \geqslant 0$ $(\lambda > 0)$ lub silnego wiatru, tj. $0 < f < |W|_h$ $(\lambda < 0)$. W drugim przypadku (12) jest równaniem pierwszego stopnia i odnosi się do wiatru krytycznego, tj. $f = |W|_h > 0$ $(\lambda = 0)$. W szczególności zatem dodatnia wartość λ odnosi się do metryki Randersa, a zerowa λ odpowiada metryce Kropiny w podejściu finslerowskim.

Po przeprowadzeniu odpowiednich obliczeń i połączeniu obu przypadków mamy w efekcie następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.1. *Niech (M, h) będzie konforemnie płaską rozmaitoscią Riemanna wymiaru n, a (h, W, f) danymi nawigacyjnymi, przy czym $\lambda + p \neq 0$. Wzór na nawigację Zermelo na (M, h) wyraża się następująco*

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_i}{\mathrm{d}t} = &- S^2\left(\frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{1}{S^2}\frac{\partial W^j}{\partial x^i}\alpha_j\right) + \frac{1}{S^2}\frac{\partial W^k}{\partial x^j}\alpha_i\alpha_j\alpha_k + \frac{\partial f}{\partial x^j}\alpha_i\alpha_j \\ &- fS\frac{\partial S}{\partial x^i} + \frac{1}{S}\frac{\partial S}{\partial x^j}(W^j + 2f\alpha_j)\alpha_i, \quad i = 1, \ldots, n.\end{aligned} \tag{13}$$

Powyższy wynik możemy stosować dla dowolnego wiatru W. Układ równań składający się z (13) oraz równań ruchu, $\dot{x}^i = W^i + f\alpha_i$, generuje trajektorie będące rozwiązaniami problemu Zermelo, o ile istnieją. W przypadku braku wiatru z takiego układu otrzymujemy równania riemannowskich $\tilde{h}$-geodezyjnych na M w metryce konforemnej do wyjściowej metryki Riemanna h, przy czym współczynnik konforemności jest równy $\frac{1}{f(x)}$, czyli $\tilde{h}_{ij} = \frac{1}{f^2(x)}h_{ij}$. Łatwo zauważyć, iż $(\alpha_i)^2 = S^2$. W szczególnym przypadku, jeśli $S = f = 1$, wówczas (13) daje wynik Levi-Civity w $\mathbb{R}^n$ (zob. [26]). Uogólniony warunek na optymalną nawigację możemy również podać dla przypadku ogólnego, gdy h jest dowolną metryką Riemanna. Wykracza to jednak poza zakres tego artykułu.

Uwaga 4.1. Układ równań składający się z (13) oraz równań ruchu przy silnym wietrze (gdy $|W|_h > f$) generuje rozwiązania zarówno minimalizujące, jak i maksymalizujące czas, o ile istnieją. Ponadto jeśli $\lambda + p = 0$, to mogą istnieć krzywe anormalne.

W przypadku braku zależności od czasu i przestrzeni jednocześnie możemy wyciągnąć poniższe wnioski.

Wniosek 4.2. *Jeśli $f = f(x)$ lub $W = W(x)$, to wzór na optymalną nawigację ma taką samą postać co równość* (13).

Jednakże rowiązanie problemu stanowią ogólnie inne krzywe niż w przypadku występowania zależności do czasu, ponieważ zmieniają się w szczególności równania ruchu.

Wniosek 4.3. *Jeśli prędkość własna statku zmienia się tylko w czasie* ($f = f(t)$)*, to wzór* (13) *upraszcza się do*

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -\frac{\partial W^j}{\partial x^i}\alpha_j + \frac{1}{S^2}\frac{\partial W^k}{\partial x^j}\alpha_i\alpha_j\alpha_k - fS\frac{\partial S}{\partial x^i} + \frac{1}{S}\frac{\partial S}{\partial x^j}(W^j + 2f\alpha_j)\alpha_i.$$

Równanie ma zatem taką samą postać jak w przypadku standardowej nawigacji Zermelo ($f = 1$)*.*

Podobnie jak wcześniej, trajektorie optymalne są ogólnie różne w obu sytuacjach.

Otrzymany wzór (13), jak i równania ruchu mogą być wyrażone w niższych wymiarach we współrzędnych n-sferycznych φ_i zamiast używania kątów θ_i, przy czym $\varphi_1 \in [0, 2\pi)$ i $\varphi_2, \dots, \varphi_{n-1} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Zachodzi również zależność $\cos\theta_k = \prod_{i=k}^{n} \cos\varphi_i \sin\varphi_{k-1}$ dla $k = 1, \dots, n$, przy czym $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ i $\varphi_n = 0$. Jest to także bardziej wygodne przy opisie szczególnych przypadków rozwiązań problemu Zermelo, na przykład czasooptymalnych loksodrom oraz w zastosowaniach. Wtedy liczba niewiadomych, a tym samym liczba równań generowanych przez równość (13) zmniejsza się do $n - 1$. Uczynimy tak dla wymiaru trzy i dwa. Uczynimy tak dla wymiarów trzy i dwa, aby nawiązać do pierwszych wyników Zermelo.

Dla $n = 3$ po transformacji współrzędnych warunek (13) sprowadza się do dwóch równań

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi_1}{dt}\cos\varphi_2 = \Bigg[&-\frac{\partial W^1}{\partial x^2}\cos^2\varphi_1 + \frac{\partial W^2}{\partial x^1}\sin^2\varphi_1 \\
&+ \left(\frac{\partial W^1}{\partial x^1} - \frac{\partial W^2}{\partial x^2}\right)\sin\varphi_1\cos\varphi_1\Bigg]\cos\varphi_2 \\
&+ \left(\frac{\partial W^3}{\partial x^1}\sin\varphi_1 - \frac{\partial W^3}{\partial x^2}\cos\varphi_1\right)\sin\varphi_2 \\
&+ \left(f\frac{\partial S}{\partial x^1} + S\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)\sin\varphi_1 - \left(f\frac{\partial S}{\partial x^2} + S\frac{\partial f}{\partial x^2}\right)\cos\varphi_1
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_2}{\mathrm{d}t} = &-\left(\frac{\partial W^1}{\partial x^3}\cos\varphi_1 + \frac{\partial W^2}{\partial x^3}\sin\varphi_1\right)\cos^2\varphi_2\\ &+\left(\frac{\partial W^3}{\partial x^1}\cos\varphi_1 + \frac{\partial W^3}{\partial x^2}\sin\varphi_1\right)\sin^2\varphi_2\\ &+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial W^1}{\partial x^1}\cos^2\varphi_1 + \frac{\partial W^2}{\partial x^2}\sin^2\varphi_1\right.\\ &\left.+\left(\frac{\partial W^2}{\partial x^1} + \frac{\partial W^1}{\partial x^2}\right)\sin\varphi_1\cos\varphi_1 - \frac{\partial W^3}{\partial x^3}\right]\sin 2\varphi_2\\ &+\left(f\frac{\partial S}{\partial x^1} + S\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \left(f\frac{\partial S}{\partial x^2} + S\frac{\partial f}{\partial x^2}\right)\sin\varphi_1\sin\varphi_2\\ &-\left(f\frac{\partial S}{\partial x^3} + S\frac{\partial f}{\partial x^3}\right)\cos\varphi_2.\end{aligned}$$

Odpowiadające wymiarowi równania ruchu przybierają wówczas postać

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t} &= W^1 + fS\cos\varphi_1\cos\varphi_2,\\ \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t} &= W^2 + fS\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\\ \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}t} &= W^3 + fS\sin\varphi_2.\end{aligned}$$

W szczególnym przypadku, jeśli $S = f = 1$, to dostajemy wynik Zermelo w $\mathbb{R}^3$ zawarty w jego drugiej pracy na temat tytułowego problemu (zob. [44, równanie (44), str. 122], z oryginalną notacją $\varphi_1 := \varphi$, $\varphi_2 := \theta$ tamże).

Zdecydowanie bardziej znanym w literaturze wzorem w omawianym temacie jest jednak wynik Zermelo w $\mathbb{R}^2$, który pojawił się w jego pierwszej pracy [43], rozpoczynającej szeroką naukową dyskusję nad problemem. Dla $n = 2$ z uogólnionego warunku (13) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{\mathrm{d}t} = &-\frac{\partial W^1}{\partial x^2}\cos^2\varphi + \left(\frac{\partial W^1}{\partial x^1} - \frac{\partial W^2}{\partial x^2}\right)\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\partial W^2}{\partial x^1}\sin^2\varphi\\ &+ S\frac{\partial f}{\partial x^1}\sin\varphi - S\frac{\partial f}{\partial x^2}\cos\varphi + f\frac{\partial S}{\partial x^1}\sin\varphi - f\frac{\partial S}{\partial x^2}\cos\varphi,\end{aligned} \tag{14}$$

przy czym φ oznacza tutaj sterowanie (optymalny kurs statku), tj. kąt brany od osi odciętych x^1 w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara w kartezjańskim układzie współrzędnych $x^1 0 x^2$. Równania ruchu mają postać

$$\dot{x}^1 = W^1 + fS\cos\varphi, \quad \dot{x}^2 = W^2 + fS\sin\varphi.$$

Pierwszy wiersz we wzorze (14) przedstawia wspomniany słynny wynik, czyli dla przypadku euklidesowego $h_{ij} := \delta_{ij}$, tj. $S = 1$ oraz stałej maksymalnej prędkości statku, $f = 1$. Ten rezultat został w przeszłości określony przez Carathéodory'ego jako „nawigacyjny wzór Zermelo" otrzymany w „nadzwyczaj pomysłowy sposób" [9,13]. Współcześnie jest on przytaczany w pracach z zastosowań matematyki, na przykład [20, 27, 40]. Można go także przedstawić w najkrótszej postaci, jeśli układ odniesienia zwiążemy ze statkiem, czyli oś x^1 pokrywa się z osią główną (wzdłużną) statku: $\dot{\varphi}(t) = -\frac{\partial W^1}{\partial x^2}$ (zob. [4, 9, 43, 44]). Dodajmy, że Zermelo przedyskutował w artykule [43] także warunek dostateczny na optymalną nawigację, korzystając z konstrukcji pola Weierstrassa. W ten sposób po przerwie ponad dwudziestu lat oraz intensywnej pracy w teorii mnogości i logice nawiązał do wariacyjnych badań i narzędzi z okresu swojego doktoratu i habilitacji.

Na koniec w celu uproszczenia obliczeń przedstawimy przykłady rozwiązań (ekstremali) na płaszczyźnie euklidesowej z zakłóceniem typu „rzeka" zależnym jedynie od przestrzeni, $W(x, y) = (W^1(y), 0)$.

Przykład 4.1. Najpierw porównamy postacie rozwiązań otrzymanych w obydwu omawianych podejściach. Rozważmy zakłócenie (prąd na prostym odcinku rzeki) zmieniające się liniowo, które zadane jest przez pole $W = (y, 0)$ w $\mathbb{R}^2$, z kartezjańskim układem współrzędnych $x0y$ i niech $f = 1$ (Zermelo określił wiatr zmienny liniowo $W = (-y, 0)$ jako „najprostszy nietrywialny przykład naszej teorii" [9; 43, str. 48]). W podejściu finslerowskim ze wzoru (9), przy spełnieniu warunku wypukłości, tj. $|W(x, y)| = |y| < 1$, dostajemy metrykę Randersa

$$F(x, y; u, v) = \frac{\sqrt{(1 - y^2)(u^2 + v^2) + (uy)^2}}{1 - y^2} - \frac{uy}{1 - y^2},$$

przy czym (x, y) oznaczają współrzędne punktu, a (u, v) współrzędne wektora stycznego; $u = \dot{x}$, $v = \dot{y}$. Po przyjęciu oznaczeń $\Phi = \sqrt{\dot{x}^2 - \delta \dot{y}^2}$ i $\delta = (y^2 - 1)$ i przeprowadzeniu odpowiednich przekształceń otrzymujemy układ równań F-geodezyjnych [23]

$$\ddot{x} - \frac{\dot{y}[(\dot{x} - y\Phi)^2 + (y\dot{x} - \Phi)^2]}{\delta(y\dot{x} - \Phi)} = 0, \quad \ddot{y} + \frac{(\dot{x} - y\Phi)[\delta^2 \dot{y}^2 - (y\dot{x} - \Phi)^2]}{\delta^2(y\dot{x} - \Phi)} = 0.$$

Z kolei w podejściu wariacyjnym w tej samej sytuacji z formuł (10) oraz (14) dostajemy natychmiast układ równań

$$\dot{x} = y + \cos\varphi, \quad \dot{y} = \sin\varphi, \quad \dot{\varphi} = -\cos^2\varphi,$$

przy czym $\varphi = \varphi(t)$ oznacza optymalny kurs statku. Trajektorie czasominimalne stanowiące rozwiązanie problemu nawigacji Zermelo można przedstawić tutaj w jawnej postaci (zob. [9]).

Rodziny ekstremali (F-geodezyjnych) dla różnych kursów początkowych $\varphi(0)$ w formie rozwiązania graficznego przedstawimy jeszcze dla dwóch innych zakłóceń, a mianowicie opisanych krzywą Gaussa

$$W(x,y) = \left(c_1 e^{-\frac{(y-c_2)^2}{2c_3^2}}, 0\right) \tag{15}$$

oraz krzywą czwartego stopnia postaci[4]

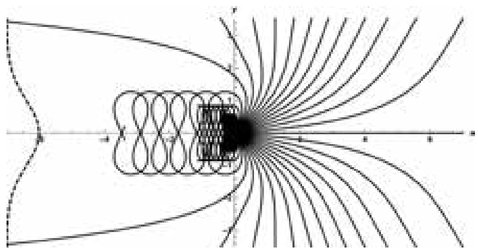
$$W(x,y) = \left(c_4(c_5 - y^2)^2, 0\right) \tag{16}$$

przy czym $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, 5$. Niech $c_1 = \frac{5}{2\sqrt{2\pi}} \approx 0.997$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1$, $c_4 = 0.8$, $c_5 = 1$. Obie „rzeki" płyną poziomo w prawą stronę, symetrycznie względem osi x. Rysunek 3 przedstawia zachowanie rozwiązań wychodzących ze środka „rzeki" i przy działaniu prądu (15) (przy czym $|W(y_0 = 0)| \approx 0.997 < f$, czyli prąd jest słaby, ale prawie krytyczny), a Rysunek 4 – przy występowaniu pola (16) i dla różnych położeń punktu początkowego. To znaczy $y_0 \in \{0, -1, -1{,}6\}$, czyli tam, gdzie odpowiednio występuje prąd: słaby ($|W(y_0)| = 0{,}8 < f$); brak prądu ($|W(y_0)| = 0$); silny ($|W(y_0)| \approx 1{,}95 > f$), przy czym $f = 1$. W przypadku rozwiązania za pomocą geometrii Finslera warunek wypukłości $|W| < 1$ implikuje dziedzinę $|y| \lesssim 1{,}455$ dla zakłócenia danego równością (16). Natomiast dla pola gaussowskiego (15) dziedziną jest cała płaszczyzna $\mathbb{R}^2$. Rzut oka na przebiegi otrzymanych nietrywialnych trajektorii wspomaga wstępną analizę w kontekście na przykład istnienia punktów sprzężonych, jednoznaczności rozwiązań, istnienia rozwiązań w obszarze silnego pola, strategii optymalnego ruchu pod prąd czy z jednego brzegu „rzeki" na drugi wyznaczonych przez prąd krytyczny ($|W|_h = f$, tj. warunek wypukłości), nawrotów pętlowych (zob. [23]). Inne przykłady rozwiązań problemu nawigacji Zermelo w niskim wymiarze, na przykład na sferze, elipsoidzie, w zakresie badań teoretycznych można znaleźć na przykład w pracach [24, 33, 38].

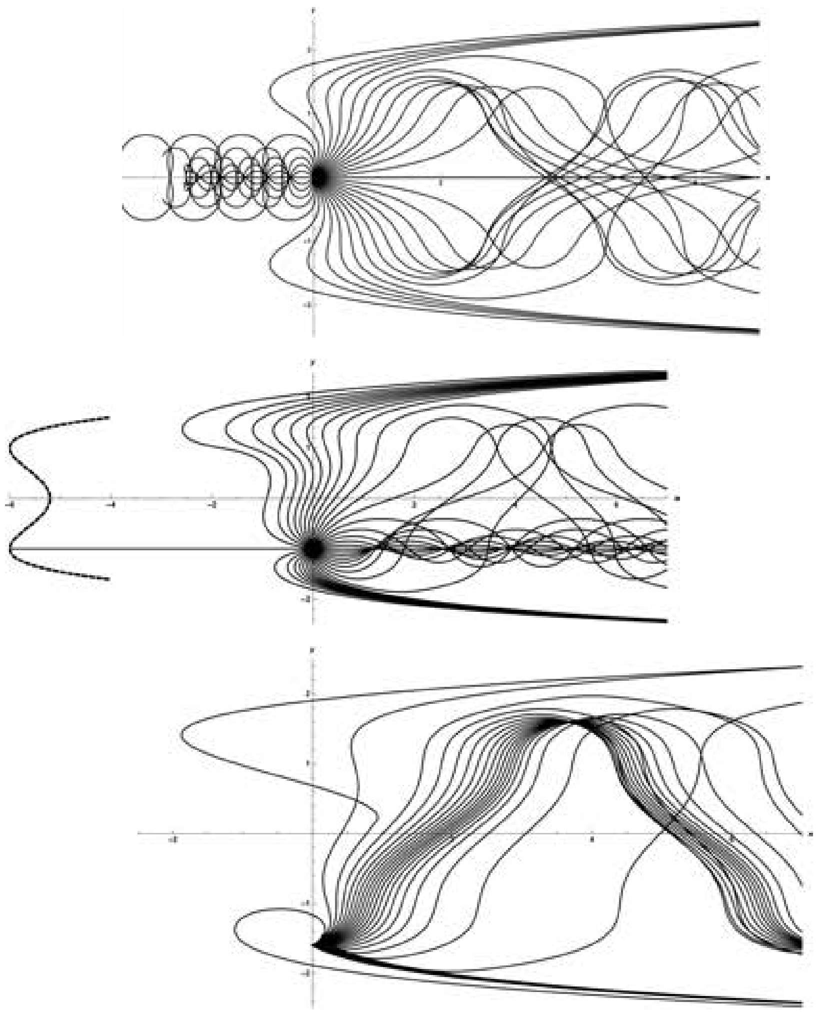
5. Uwagi końcowe

5.1. *Kierunki bieżących badań.* Omówione wyniki dotyczące tytułowego zagadnienia odnoszą się w głównej mierze do rozwiązań lokalnych. W ujęciu

[4] Przy występowaniu zakłócenia (16) problem nawigacji Zermelo omawiany w ramach wykładu na Duke University przedyskutował także Robert Bryant, prezes American Mathematical Society w latach 2015–2017.



3. Ilustracja zachowań rozwiązań wychodzących ze środka „rzeki” i przy działaniu prądu (15) (profil oznaczony linią przerywaną)



4. Ilustracja zachowań rozwiązań przy występowaniu pola (16) (profil oznaczony linią przerywaną), dla różnych położeń punktu początkowego

globalnym podejmowane badania obejmują m.in. zbiory punktów ekstremali czy geodezyjnych w odpowiedniej metryce Finslera, w których tracimy optymalność, tj. pierwsze punkty sprzężone, czyli zera równania Jacobiego (ang. cut loci). Ten temat w geometrii Finslera w kontekście obrotowych sfer wymiaru dwa i metryk Randersa został niedawno przedstawiony w pracach [15, 36]. Oprócz wspomnianych już w artykule wyników i zagadnień teoretycznych powiązanych z tytułowym problemem przykładem nowego kierunku badań jest holonomia w kwantowej nawigacji Zermelo (zob. [19]). Nawigacja Zermelo jako metoda jest używana w rozważaniach nad czwartym problemem Hilberta w geometrii Finslera (zob. [11, 39]), w której pojęcie odległości (metryki), a także kąta nie jest symetryczne. Od niedawna zaczęła ona być także wykorzystywana w fizyce teoretycznej, na przykład mechanice kwantowej, teorii względności. Badania zmierzające w kierunku uogólnienia zasady Fermata z wykorzystaniem metryki (pseudo-)Finslera i Lorentza pojawiły się w pracach [8, 21].

W teorii sterowania, gdzie problem Zermelo jest jednym z klasycznych przykładów w niskim wymiarze, podstawowym narzędziem jest zasada maksimum Pontriagina i równania Hamiltona–Jacobiego–Bellmana. Jednak warunki dostateczne na optymalną nawigację nadal stanowią tutaj wyzwanie w ogólnym przypadku. W klasyczym ujęciu tytułowego zagadnienia, tj. wychodząc od danych nawigacyjnych (h, W, f), mamy do rozwiązania układ równań różniczkowych zwyczajnych. Na problem można również spojrzeć inaczej. Mianowicie możemy zapytać o dane nawigacyjne, a przede wszystkim zakłócenie, które generują trajektorie optymalne w sensie czasu o określonych własnościach, na przykład są (uogólnionymi) loksodromami. W takim postawieniu problemu mamy do czynienia z równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Przykłady współczesnych zastosowań praktycznych na przykład w robotyce, modelowaniu wzorców poszukiwań, nawigacji lotniczej i morskiej czy badaniu strategii zwierząt migrujących przy występowaniu prądów powietrznych i wodnych można znaleźć na przykład w pracach [18, 20, 23, 27, 40].

5.2. *Refleksja.* Mając na względzie nierzadką dyskusję w środowisku matematycznym i nie tylko nad wyższością rozważań czysto teoretycznych bez jakiegokolwiek elementu utylitarności nad pracami stosowanymi oraz podnoszoną zgoła inną tezą o potrzebie większej klarowności i sensowności co do celowości nieograniczonych (kierunkowo i zakresowo) badań teoretycznych, problem nawigacji Zermelo jest przykładem interesującego zagadnienia żywo obecnego po obu stronach, dawniej i obecnie. Co więcej, sam Ernst Zermelo potrafił łączyć efektywnie, bezkonfliktowo i z uznaniem oba „żywioły", o czym świadczy jego dorobek naukowy.

Podziękowania. Autor dziękuje Robertowi Wolakowi (IM UJ) i Redakcji *Wiadomości Matematycznych* za cenne uwagi redakcyjne i merytoryczne. Ponadto autor wyraża wdzięczność Heinzowi-Dieterowi Ebbinghausowi i Archiwum Uniwersytetu we Freiburgu za udostępnienie oraz wyrażenie zgody na publikację w tym artykule archiwalnych zdjęć z 1929 roku Ernsta Zermelo z polskimi matematykami.

Bibliografia

[1] N. Aldea, P. Kopacz, *Generalized Zermelo navigation on Hermitian manifolds under mild wind*, Differ. Geom. Appl. 54 (2017), 325–343.

[2] N. Aldea, P. Kopacz, *Generalized Zermelo navigation on Hermitian manifolds with a critical wind*, Results Math. 72 (2017), 2165–2180.

[3] N. Aldea, G. Munteanu, *Projectively related complex Finsler metrics*, Nonlinear Anal. Real World Appl. 13 (2012), nr 5, 2178–2187.

[4] K. J. Arrow, *On the use of winds in flight planning*, J. Meteorol. 6 (1949), 150–159.

[5] D. Bao, C. Robles, Z. Shen, *Zermelo navigation on Riemannian manifolds*, J. Differential Geom. 66 (2004), nr 3, 377–435.

[6] D. C. Brody, D. M. Meier, *Solution to the quantum Zermelo navigation problem*, Phys. Rev. Lett. 114 (2015), 100502.

[7] D. C. Brody, G. W. Gibbons, D. M. Meier, *Time-optimal navigation through quantum wind*, New J. Phys. 17 (2015), 033048.

[8] E. Caponio, M. A. Javaloyes, M. Sánchez, *Wind Finslerian structures: from Zermelo's navigation to the causality of spacetimes* (2015), dostępne pod adresem https://arxiv.org/abs/1407.5494.

[9] C. Carathéodory, *Calculus of variations and partial differential equations of the first order*, American Mathematical Society, Chelsea Publishing 1935 (reprint 2008).

[10] G. Catino, *On conformally flat manifolds with constant positive scalar curvature*, Proc. Amer. Math. Soc. 144 (2016), nr 6, 2627–2634.

[11] S.-S. Chern, Z. Shen, *Riemann–Finsler geometry*, Nankai Tracts in Mathematics, World Scientific, River Edge (N.J.), London, Singapore 2005.

[12] A. De Mira Fernandes, *Sul problema brachistocrono di Zermelo*, Rend. Accad. Naz. Lincei 15 (1932), nr 4, 47–52.

[13] H.-D. Ebbinghaus, V. Peckhaus, *Ernst Zermelo. An approach to his life and work*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 2015.

[14] P. Frank, *Die schnellste Flugverbindung zwischen zwei Punkten*, ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 13 (1933), nr 2, 88–91.

[15] R. Hama, J. Kasemsuwan, S. V. Sabau, *The cut locus of a Randers rotational* 2*-sphere of revolution*, Publ. Math. Debrecen 93 (2018), nr 3–4, 387–412.

[16] C. A. R. Herdeiro, *Mira Fernandes and a generalised Zermelo problem: purely geometric formulations*, Bol. Soc. Port. Mat. (2010), 179–191.

[17] L. Huang, X. Mo, *On geodesics of Finsler metrics via navigation problem*, Trans. Amer. Math. Soc. 139 (2011), nr 8, 3015–3024.

[18] G. C. Hays, A. Christensen, S. Fossette, G. Schofield, J. Talbot, P. Mariani, *Route optimisation and solving Zermelo's navigation problem during long distance migration in cross flows*, Ecol. Lett. 17 (2014), nr 2, 137–143.

[19] B. Hubicska, Z. Muzsnay, *Holonomy in the quantum navigation problem*, Quantum Inf. Process. 18 (2019), 325.

[20] M. R. Jardin, A. E. Bryson Jr., *Methods for computing minimum-time paths in strong winds*, J. Guidance Control Dynam. 35 (2012), nr 1, 165–171.

[21] M. A. Javaloyes, H. Vitório, *Some properties of Zermelo navigation in pseudo-Finsler metrics under an arbitrary wind*, Houston J. Math. 44 (2018), nr 4, 1147–1179.

[22] P. Kopacz, *On generalization of Zermelo navigation problem on Riemannian manifolds*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 16 (2019), nr 4, 1950058, 19.

[23] P. Kopacz, *Application of planar Randers geodesics with river-type perturbation in search models*, Appl. Math. Model. 49 (2017), 531–553.

[24] P. Kopacz, *A note on time-optimal paths on perturbed spheroid*, J. Geom. Mech. 10 (2018), nr 2, 139–172.

[25] N. Lee, *Zermelo's navigation problem on Hermitian manifolds*, Korean J. Math. 14 (2006), nr 1, 79–83.

[26] T. Levi-Civita, *Über Zermelo's Luftfahrtproblem*, ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 11 (1931), nr 4, 314–322.

[27] B. Li, Ch. Xu, K. L. Teo, J. Chu, *Time optimal Zermelo's navigation problem with moving and fixed obstacles*, Comput. Appl. Math. 224 (2013), 866–875.

[28] B. Manià, *Sopra un problema di navigazione di Zermelo*, Math. Ann. 133 (1937), nr 3, 584–599.

[29] M. Matsumoto, *A slope of a mountain is a Finsler surface with respect to a time measure*, J. Math. Kyoto Univ. 29 (1989), nr 1, 17–25.

[30] Edward J. McShane, *A navigation problem in the calculus of variations*, Amer. J. Math. 59 (1937), nr 2, 327–334.

[31] R. Paláček, O. Krupková, *On the Zermelo problem in Riemannian manifolds*, Balk. J. Geom. Appl. 17 (2012), nr 2, 77–81.

[32] M. Rafie-Rad, *Weakly conformal Finsler geometry*, Math. Nachr. 287 (2014), nr 14–15, 1745–1755.

[33] C. Robles, *Geodesics in Randers spaces of constant curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007), nr 4, 1633–1651.

[34] B. Russell, S. Stepney, *Zermelo navigation in the quantum brachistochrone*, J. Phys. A 48 (2015), nr 11, 115303.

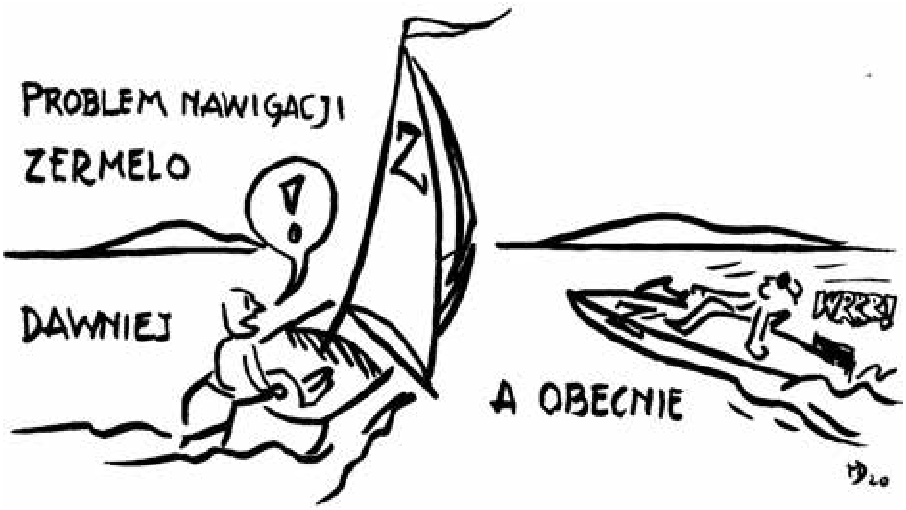
[35] B. Russell, S. Stepney, *Zermelo navigation and a speed limit to quantum information processing*, Phys. Rev. A 90 (2014), 012303.

[36] S. V. Sabau, M. Tanaka, *The cut locus and distance function from a closed subset of a Finsler manifold*, Houston J. Math. 42 (2016), 1157–1197.

[37] Z. Shen, M. Yuan, *Conformal vector fields on some Finsler manifolds*, Sci. China Math. 59 (2016), nr 1, 107–114.

[38] Z. Shen, *Finsler Metrics with* $K = 0$ *and* $S = 0$, Canad. J. Math. 55 (2003), nr 1, 112–132.
[39] Z. Shen, *Projectively flat Finsler metrics of constant flag curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. 355 (2002), nr 4, 1713–1728.
[40] L. Techy, *Optimal navigation in a planar time-varying point-symmetric flow-field*, [w:] *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, IEEE, Orlando, FL 2011, 7325–7330.
[41] R. von Mises, *Zum Navigationsproblem der Luftfahrt*, ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 11 (1931), nr 5, 373–381.
[42] R. Yoshikawa, S. V. Sabau, *Kropina metrics and Zermelo navigation on Riemannian manifolds*, Geom. Dedicata 171 (2013), nr 1, 119–148.
[43] E. Zermelo, *Über die Navigation in der Luft als Problem der Variationsrechnung*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 89 (1930), 44–48.
[44] E. Zermelo, *Über das Navigationsproblem bei ruhender oder veränderlicher Windverteilung*, ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 11 (1931), nr 2, 114–124.
[45] K. Zita, *Beiträge zu einem Variationsproblem von Zermelo*, Ph.D. Inaugural-Dissertation, Schlesischen Friedrich-Wilhelms-Universität, Breslau 1931.

Piotr Kopacz
Wydział Nawigacyjny
Uniwersytet Morski w Gdyni
p.kopacz@wn.umg.edu.pl



Rys. Maciej Denkowski (Instytut Matematyki UJ)

Wiad. Mat. 55 (2) 2019, 333–341

Simon Tatham (Cambridge, Wielka Brytania)

O parze kości, na której nigdy nie wypada siedem*

1. Wprowadzenie

Kilkoro z moich przyjaciół lubi spędzać czas przy grze planszowej *Osadnicy z Catanu*. W tej grze każdy z uczestników rzuca w swojej turze dwiema zwykłymi kośćmi, a wynik rzutu określa, jakie surowce gracze otrzymają w tej turze. Gdy wypadnie siedem, dzieje się coś specjalnego – zamiast surowców na planszy pojawia się (lub przemieszcza) złodziej.

Po kilku rozgrywkach moi znajomi doszli do wniosku, że choć gra byłaby nieco nudna bez siódemek, to w początkowej fazie gry są one dość irytujące. Gdy każdy stara się zdobyć jak najwięcej surowców na początek, wyrzucenie siódemki spowalnia wszystkich. Zmodyfikowaliśmy więc zasady, ustalając, że jeżeli w pierwszych dwóch pełnych rundach ktoś wyrzuci siódemkę, natychmiast rzuca ponownie, aż otrzyma jakiś inny wynik. Po paru rundach, gdy gra nabierze tempa, siódemki znowu stają się dozwolone.

Chociaż cel przyspieszenia gry na początek wydaje się szczytny, niezbyt spodobał mi się sposób jego uzyskania. Rzucanie tak długo, aż otrzymamy satysfakcjonujący wynik, nie jest zbyt eleganckie. Postanowiłem więc zaprojektować specjalną parę kości, która dawałaby liczby od dwóch do dwunastu z prawdopodobieństwami proporcjonalnymi do tych w przypadku pary kości sześciennych, jednak w taki sposób, aby nie mogła wypaść siódemka.

Wydawać by się mogło, że nie ma na to wielkich szans – okazuje się jednak, że da się to zrobić. W tym tekście pokażę, jak to uczynić.

* Angielski oryginał artykułu znajduje się pod adresem https://www.chiark.greenend.org.uk/~sgtatham/dice/ (dostęp 2018-05-11, ostatnia modyfikacja 2017-05-07).

2. Konstrukcja

W efekcie rzutu parą zwykłych kości możemy uzyskać każdą liczbę całkowitą od dwójki do dwunastki – ale nie każdą z tym samym prawdopodobieństwem. Najłatwiej to zauważyć, oznaczając każdą kość tak, aby je odróżnić (użyję oznaczeń *W* i *K*, jak „wiersz” i „kolumna”), i rysując tabelkę możliwych wyników (tabela 1).

Tabela 1. Możliwe wyniki rzutu dwiema kośćmi sześciennymi

$K \backslash W$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Ze wszystkich trzydziestu sześciu możliwych układów tylko jeden daje dwójkę (jedynka na obu kościach) i tylko jeden daje dwunastkę (szóstka na obu kościach) – ale siódemka może wypaść na sześć możliwych sposobów, a zatem jest sześć razy bardziej prawdopodobna.

Pomysł, który wpadł mi do głowy, polegał na przeorganizowaniu tabelki. Skoro sześć pozycji wskazywało siódemkę, pomyślałem, że interesującym eksperymentem byłoby ułożenie ich wszystkich w jednej kolumnie. Pozostaje prostokąt 6 × 5. Co ciekawe, mamy pięć pozycji, w których powinna znaleźć się szóstka, i tyle samo miejsc na ósemkę – w sam raz na dwa rzędy tego prostokąta. Teraz został prostokąt o wysokości cztery i tak się składa, że mamy po cztery dziewiątki i piątki, i tak dalej. Na koniec, w dwóch ostatnich wolnych komórkach, umieszczamy pojedyncze liczby – dwójkę i dwunastkę.

Tak przepisana tabelka (tabela 2) zawiera dokładnie ten sam zestaw liczb co pierwotna i każda liczba występuje w niej tyle samo razy. Jeżeli więc rzucimy dwiema (odróżnialnymi) kośćmi i sprawdzimy wynik w tabelce, otrzymamy taki sam rozkład liczb, jakiego oczekiwalibyśmy od zwykłej pary kości.

Rzecz jasna, trochę niewygodnie jest sprawdzać tabelkę po każdym rzucie kości – lepiej byłoby tak je opisać, żeby tabelka stała się zbędna. Okazuje się, że jest to całkiem proste.

Tabela 2. Możliwe wyniki rzutu dwiema kośćmi – układ, w którym każdy wynik występuje tylko w jednym wierszu bądź kolumnie

K \ W	1	2	3	4	5	6
1	7	6	6	6	6	6
2	7	8	8	8	8	8
3	7	5	9	4	4	4
4	7	5	9	10	10	10
5	7	5	9	3	11	2
6	7	5	9	3	11	12

- Pierwsza kolumna zawiera same siódemki. Oznaczmy więc jedną ściankę kości *K* liczbą 7 (taki będzie wówczas wynik, niezależnie od tego, co wypadło na kości *W*).
- Dwie ścianki kości *W* oznaczymy liczbami 6 i 8, gdyż taki będzie wynik rzutu w przypadku wypadnięcia jednej z nich (o ile na kości *K* nie wypadło 7).
- Kolejne dwie ścianki kości *K* oznaczymy liczbami 5 i 9, i tak dalej.
- Ostatnią ściankę kości *K* pozostawimy pustą – gdy ona wypadnie, wynikiem rzutu jest to, co wypadło na kości *W*.

Nasza tabelka wygląda więc teraz następująco (tabela 3).

Tabela 3. Możliwe wyniki rzutu dwiema kośćmi z nowymi oznaczeniami ścianek

K \ W	7	5	9	3	11	
6	7	6	6	6	6	6
8	7	8	8	8	8	8
4	7	5	9	4	4	4
10	7	5	9	10	10	10
2	7	5	9	3	11	2
12	7	5	9	3	11	12

Pozostaje tylko zapamiętać, które liczby „wygrywają" z którymi: siódemka wygrywa z szóstką i ósemką, które wygrywają z piątką i dziewiątką, i tak aż do pustej ścianki, która przegrywa ze wszystkimi. Dorysujmy więc na ściankach kropki: sześć kropek na ściankach z siódemką, pięć na ściankach z szóstką i ósemką itd. (tabela 4).

Tabela 4. Nowe oznaczenia ścianek kości

W	$\underset{\cdot}{2}$	$\underset{\cdot\cdot\cdot}{4}$	$\underset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{6}$	$\underset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{8}$	$\underset{\cdot\cdot\cdot}{10}$	$\underset{\cdot}{12}$
K	$\underset{\cdot\cdot}{3}$	$\underset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{5}$	$\underset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{7}$	$\underset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{9}$	$\underset{\cdot\cdot}{11}$	

Procedura jest teraz następująca: rzucamy naszymi kośćmi i wybieramy tę ściankę, na której jest więcej kropek (remis jest niemożliwy, bo każda para ścian z tą samą liczbą kropek znajduje się na tej samej kostce).

Efektem całej tej pracy jest zatem alternatywny sposób oznakowania pary sześciennych kości, który daje dokładnie taki sam układ prawdopodobieństw, co zwykłe podejście z sumowaniem wyników dwóch rzutów. Jak pomogło mi to w skonstruowaniu pary kości, na której nie może wypaść siódemka?

Odpowiedź jest następująca: zdarzenie „wypadła siódemka" jest teraz własnością *jednej* kości, a nie ich pary. Aby uzyskać żądaną parę kości, trzeba teraz jedynie usunąć ściankę 7 z kości K, zmieniając ją w kość pięciościenną ze ściankami 3, 5, 9, 11 i pustą. Ta zmodyfikowana para kości ma następującą tabelkę wyników (zob. tabela 5).

Tabela 5. Możliwe wyniki rzutu dwiema kośćmi – jedną sześcienną i jedną pięciościenną – z nowymi oznaczeniami ścianek

K \ W	5	9	3	11	
6	6	6	6	6	6
8	8	8	8	8	8
4	5	9	4	4	4
10	5	9	10	10	10
2	5	9	3	11	2
12	5	9	3	11	12

Wszystko oprócz siódemki wypada zatem z poprawnymi (względnymi) prawdopodobieństwami, ale sama siódemka nie może wypaść, gdyż po prostu nie ma ścianki z tą liczbą. Bingo!

Praktyczne wykonanie kości z pięcioma ścianami byłoby trudne. Zamiast tego kupiłem standardową kość dziesięciościenną (złożoną z dwóch „piramid" o pięciu ścianach bocznych złożonych podstawami) i użyłem na ścianach pięciu oznaczeń, każdego dwukrotnie.

3. Rozszerzenie

Powyższa konstrukcja spełniła pierwotny cel. Nabyłem parę pustych kości, oznaczyłem je tak, jak opisałem (nie zdobyłem jedynie pustej kości dziesięciościennej, więc kupiłem zwykłą i ją przemalowałem), i gdy skończyłem, miałem dwie kości „nieparzyste" (jedną sześcienną, z siódemką, i jedną dziesięciościenną, bez siódemki) oraz jedną „parzystą". Rzut dwiema kośćmi sześciennymi – i otrzymuje się zwykły rozkład, jak przy rzucie klasycznymi kośćmi; rzut kością „parzystą" oraz „nieparzystą" o dziwnym kształcie – i otrzymuje się to samo, ale bez siódemki.

Pozostał jednak jeden problem. *Osadnicy z Catanu* mają dodatek, zwany *Miasta i Rycerze*. W tej grze jedna z kości jest wyróżniona czerwonym kolorem. Kość ta ma specjalną funkcję – suma oczek na obu kościach nadal określa, jakie surowce będą generowane w danej kolejce, ale liczba na wyróżnionej kości decyduje również – dodatkowo – o tym, kto otrzyma karty specjalne. Moje kości nie dają tej dodatkowej informacji. W dodatku nie można po prostu rzucić zwykłą kością – oprócz moich dwóch – ponieważ może to doprowadzić do układów, które nie byłyby możliwe przy zwykłych kościach (na przykład wyróżniona kość nie może wskazywać szóstki, gdy suma oczek wynosi cztery). Wygląda więc na to, że moje kości nie mogą zostać użyte do *Miast i Rycerzy* bez zmiany zasad gry.

A może jednak?

Na pewno mogą zadziałać – w teorii. Wystarczy tylko zaznaczyć przy każdym wyniku w tabelce dodatkową liczbę oznaczającą wynik na wyróżnionej kości. Przy klasycznych kościach taka tabelka wygląda jak w tabeli 6 (przy założeniu, że wyróżniona jest kość K). Nie jest ona szczególnie czytelna, ale przynajmniej pokazuje, jakie liczby na wyróżnionej kości są możliwe przy odpowiedniej sumie.

- Jeśli suma wynosi 2, to wartość na wyróżnionej kości musi wynosić 1,
- jeśli suma wynosi 3, to wartość na wyróżnionej kości musi wynosić 1 lub 2,
- jeśli suma wynosi 4, to wartość na wyróżnionej kości musi wynosić 1, 2 lub 3,
- i tak dalej.

Moglibyśmy więc wziąć tabelkę wyników dla zmodyfikowanych kości i umieścić odpowiednie adnotacje w jakimkolwiek porządku (zob. tabela 7).

To działa – w teorii. Otrzymujemy zarówno sumę, jak i „czerwoną" liczbę, z takim samym rozkładem jak para zwykłych kości, i usunięcie siódemki na kości K nadal robi to, co powinno. Nie jest jednak eleganckie, bo „czerwone" liczby nie są ułożone według żadnego konkretnego porządku – znów zatem potrzebujemy tabelki. Byłoby lepiej, gdyby udało się znaleźć jakiś sposób na takie ich rozmieszczenie, żeby spoglądanie do tabelki stało się zbędne.

Tabela 6. Możliwe wyniki rzutu dwiema kośćmi z zaznaczoną „czerwoną" liczbą

$K \backslash W$	1	2	3	4	5	6
1	$^{1}2$	$^{1}3$	$^{1}4$	$^{1}5$	$^{1}6$	$^{1}7$
2	$^{2}3$	$^{2}4$	$^{2}5$	$^{2}6$	$^{2}7$	$^{2}8$
3	$^{3}4$	$^{3}5$	$^{3}6$	$^{3}7$	$^{3}8$	$^{3}9$
4	$^{4}5$	$^{4}6$	$^{4}7$	$^{4}8$	$^{4}9$	$^{4}10$
5	$^{5}6$	$^{5}7$	$^{5}8$	$^{5}9$	$^{5}10$	$^{5}11$
6	$^{6}7$	$^{6}8$	$^{6}9$	$^{6}10$	$^{6}11$	$^{6}12$

Tabela 7. Możliwe wyniki rzutu dwiema kośćmi z nowymi oznaczeniami ścianek z zaznaczonym wynikiem rzutu czerwoną kością

$K \backslash W$	7	5	9	3	11	
6	$^{1}7$	$^{1}6$	$^{2}6$	$^{3}6$	$^{4}6$	$^{5}6$
8	$^{2}7$	$^{2}8$	$^{3}8$	$^{4}8$	$^{5}8$	$^{6}8$
4	$^{3}7$	$^{1}5$	$^{3}9$	$^{1}4$	$^{2}4$	$^{3}4$
10	$^{4}7$	$^{2}5$	$^{4}9$	$^{4}10$	$^{5}10$	$^{6}10$
2	$^{5}7$	$^{3}5$	$^{5}9$	$^{1}3$	$^{5}11$	$^{1}2$
12	$^{6}7$	$^{4}5$	$^{6}9$	$^{2}3$	$^{6}11$	$^{6}12$

Po paru eksperymentach odkryłem, że sprawy wyglądają znacznie lepiej, gdy uporządkujemy ścianki na kościach rosnąco (traktując pustą ścianę jako zero). Tabela 8 wygląda znacznie mniej intuicyjnie, ale daje zaskakująco prosty sposób ułożenia „czerwonych" liczb (umieściłem „zwykłe" liczby po lewej, a „czerwone" osobno po prawej, żeby było lepiej widać ich rozmieszczenie).

Szczerze mówiąc, kompletnie nie mam pojęcia, skąd się tu wzięła taka piękna symetria. Moje kości *nie są* symetryczne – jak się zdawało, usunąłem całą ich symetrię w trakcie moich dziwnych machinacji. A jednak – bez żadnego widocznego powodu – to całkowicie regularne ułożenie „czerwonych" liczb *po prostu działa*, dając właściwy zestaw prawdopodobieństw dla każdej możliwej sumy. Tego się nie spodziewałem – i nadal tego nie rozumiem! – ale tak to właśnie wygląda.

Tabela 8. Nowe oznaczenia kości – po lewej wynik rzutu parą kości, po prawej wynik rzutu czerwoną kością

K \ W	3	5	7	9	11
2	2	3	5	7	9	11
4	4	4	5	7	9	4
6	6	6	6	7	6	6
8	8	8	8	7	8	8
10	10	10	5	7	9	10
12	12	3	5	7	9	11

K \ W		3	5	7	9	11
2	1	2	3	4	5	6
4	2	3	4	5	6	1
6	3	4	5	6	1	2
8	4	5	6	1	2	3
10	5	6	1	2	3	4
12	6	1	2	3	4	5

Mając to rozmieszczenie, łatwo jest wymyślić konkretny sposób oznaczenia kości. Najprościej jest napisać „czerwone" liczby na kości „parzystej", umieszczając liczby od jeden do sześć na ściankach z kolejnymi liczbami parzystymi. Następnie dopisujemy modyfikatory na kości „nieparzystej": +1 na ściance z trójką, +2 na ściance z piątką, −1 na ściance z jedenastką, −2 na ściance z dziewiątką. Pusta ścianka pozostaje pusta. Zgodnie z powyższym schematem, ścianka z siódemką powinna otrzymać modyfikator +3 lub −3, ale ponieważ w przypadku, gdy wynikiem jest siedem, i tak może wypaść dowolna „czerwona" liczba, prościej jest nie dopisywać na tej ściance nic. Burzy to piękną symetrię tabelki, ale ułatwia faktyczne używanie kości.

Podsumowując, nasze kości wyglądają teraz jak w tabeli 9.

Tabela 9. Nowe oznaczenia ścianek kości z wynikiem rzutu czerwoną kością

W	${}^{1}\underset{\cdot}{2}$	${}^{2}\underset{\cdot\cdot\cdot}{4}$	${}^{3}\underset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{6}$	${}^{4}\underset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{8}$	${}^{5}\underset{\cdot\cdot\cdot}{10}$	${}^{6}\underset{\cdot}{12}$
K	${}^{+1}\underset{\cdot\cdot}{3}$	${}^{+2}\underset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{5}$	$\underset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{7}$	${}^{-2}\underset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{9}$	${}^{-1}\underset{\cdot\cdot}{11}$	

Procedura ich używania jest następująca: rzucamy obiema i wybieramy wynik na ściance, na której jest więcej kropek. Aby otrzymać „czerwoną" liczbę, bierzemy „małą" liczbę na kości „parzystej", a jeżeli na kości „nieparzystej" widnieje jakiś modyfikator, dodajemy go do tej liczby. Wreszcie, jeżeli otrzymamy w wyniku coś większego niż 6, odejmujemy sześć, a jeżeli coś mniejszego od 1, dodajemy sześć.

Ponownie okazuje się, że usunięcie ścianki z siódemką z kości „nieparzystej" daje parę kości, na których nigdy nie wypada siódemka, przy czym otrzymujemy zarówno sumę, jak i „czerwoną" liczbę – możemy więc użyć ich do *Miast i Rycerzy*.

4. Podsumowanie

Mechanizm, który opisałem, wygląda dobrze w teorii. Niestety, ma jedną poważną wadę praktyczną – jest bardzo wrażliwy na brak precyzji w wykonaniu kości.

Tradycyjna procedura rzucania dwiema kośćmi i sumowania wyników daje efekt rozłożenia skutków niedoskonałości wykonania. Załóżmy, że na jednej z kości wyrzucenie trójki jest odrobinę bardziej prawdopodobne niż powinno. W rezultacie każda z liczb od 4 do 9 będzie wypadać z nieco większym prawdopodobieństwem – ale tylko o jedną szóstą różnicy między faktyczną a prawidłową szansą wypadnięcia trójki na pierwszej kości, ponieważ losowa wartość z drugiej kości rozkłada ten błąd na sześć możliwych wyników. Oznacza to, że zwykły sposób cechuje się naturalną odpornością na błędy wykonania kości.

Z opisanym w artykule trikiem jest inaczej. Jeżeli na „parzystej" kości ósemka wypada o 25% częściej niż szóstka, to tak samo będzie z wynikiem łącznym – cały błąd jednej z kości przenosi się na wynik łączny. A ponieważ w *Osadnikach* różne wyniki rzutu kością traktuje się jako różne jakościowo, a nie tylko jako trochę większą lub mniejszą wartość wielkości zmieniającej się w sposób ciągły, drobne usterki kości mają poważny i zauważalny wpływ na przebieg rozgrywki. Istotnie, odkąd gramy moimi kośćmi, nieustannie irytuje nas ich najwyraźniej niesprawiedliwe zachowanie podczas gry. Nie posunęliśmy się do zrobienia testów statystycznych precyzji moich kości, ale wydaje się możliwe, że winę ponosi opisany problem.

Nasuwającym się rozwiązaniem byłoby rzucenie kością sześcienną (oznaczoną tradycyjnie) i pięciościenną (oznaczoną zwyczajnie liczbami od 1 do 5), zsumowanie wyników i dodanie jedynki w przypadku, gdy wypadło siedem lub więcej. Ten sposób pozwala również uzyskać „czerwoną" liczbę banalną metodą – umawiamy się po prostu, że kość sześcienna jest czerwona. Z początku odrzuciłem ten pomysł jako mniej elegancki – chciałem, żeby (powiedzmy) dziewiątka była wynikiem czegoś, co wygląda na dziewiątkę, a nie czegoś, co wygląda na ósemkę i wymaga pamiętania o dodaniu jedynki. W szczególności, jednym z przejawów elegancji mojego mechanizmu jest to, że sposób wyznaczania wyniku jest identyczny niezależnie od tego, której „nieparzystej" kości akurat używamy. Niestety, to nieeleganckie podejście mogłoby się okazać bardziej praktyczne, jeżeli chodzi o tolerancję na błędy wykonania kości.

Czytelnicy zaznajomieni z zakresem kości dostępnych w sklepach dla graczy mogliby też zauważyć, że tabelka pięć na sześć daje łącznie trzydzieści możliwości, można więc kupić kość o trzydziestu ściankach (takie kości są dostępne w sprzedaży) i oznaczyć odpowiednio jej ścianki.

Blisko krańców zakresu 2–12 błędy mogłyby być zbyt duże (ponieważ tylko jedna ścianka pokazuje dwójkę i tylko jedna dwunastkę, łatwo może się zdarzyć zauważalna nierównowaga między nimi), ale w środku zakresu (gdzie gracze w *Osadników* lubią spędzać tyle czasu, ile tylko się uda) zapewne tolerowalne – na przykład z pięcioma oddzielnymi ściankami z ósemką trudniej byłoby uzyskać znaczące odchylenia od prawidłowego prawdopodobieństwa. Jedyny problem z tym podejściem jest taki, że trudno znaleźć kość trzydziestościenną ze ściankami na tyle dużymi, żeby bez problemu oznaczyć je po swojemu...

Simon Tatham
anakin@pobox.com
tłumaczenie: Marcin Borkowski

Rys. Maciej Denkowski (Instytut Matematyki UJ)

Wiad. Mat. 55 (2) 2019, 343–345

Krzysztof Ciesielski (Kraków)

Weterani Olimpiady Matematycznej

W 2019 roku obchodzimy jubileusz siedemdziesięciolecia Olimpiady Matematycznej. Osoby kojarzące się z Olimpiadą to przede wszystkim ci, którzy odnosili w niej największe sukcesy albo ci, dla których olimpijskie triumfy stanowiły preludium do osiągnięcia wybitnych naukowych wyników. Znacznie rzadziej wspomina się o pracujących na rzecz Olimpiady, zwłaszcza o tych nie pełniących funkcji kierowniczych. Tymczasem bez nich Olimpiada nie miałaby szans istnieć.

Olimpiadę Matematyczną organizuje kilkunastoosobowy Komitet Główny Olimpiady wsparty przez około dziesięcioosobowe Komitety Okręgowe. Zasady przeprowadzania zawodów Olimpiady przez siedemdziesiąt lat jej istnienia praktycznie nie były zmieniane, wprowadzano jedynie drobne modyfikacje. Zawody są trzystopniowe i polegają na pisemnym rozwiązywaniu zadań przez uczniów. Najpierw uczniowie przez trzy miesiące (do końca listopada) rozwiązują dwanaście zdań (opracowanych przez Komitet Główny) i przesyłają rozwiązania na adres właściwego Komitetu Okręgowego. Najlepsi uczestnicy zawodów I stopnia są przez te Komitety kwalifikowani do zawodów II stopnia. Te zawody, organizowane przez Komitety Okręgowe, są dwudniowe (zadania ponownie przygotowuje Komitet Główny); każdego dnia uczniowie rozwiązują trzy zadania. Wstępnego sprawdzenia prac dokonują członkowie Komitetów Okręgowych, a ostateczna weryfikacja, ocena i ustalenie listy finalistów należą do Komitetu Głównego. Ten Komitet organizuje zawody finałowe (III stopnia), a po ocenie prac decyduje o ostatecznych wynikach. Potem członkowie Komitetu Głównego przygotowują najlepszych do zawodów międzynarodowych.

Podczas pierwszej Olimpiady działało sześć Komitetów Okręgowych (miasta, w których miały one siedziby, to Kraków, Lublin, Łódź, Poznań, Warszawa, Wrocław). Z upływem lat zmieniały się zasięgi terytorialne działalności Komitetów Okręgowych, zwiększała się też ich liczba – obecnie jest ich jedenaście. Dochodziły kolejno: Toruń (od VI OM, 1954 rok), Katowice (od XVII OM, 1965 rok), Gdańsk (od XIV OM, 1972 rok), Szczecin (od XXXVIII OM, 1986 rok) i Rzeszów (od LXI OM, 2009 rok).

Zacytujmy fragment przemówienia Aleksandra Pełczyńskiego, ówczesnego przewodniczącego Komitetu Głównego Olimpiady Matematycznej, podczas uroczystości zakończenia jubileuszowej dwudziestej piątej Olimpiady.

> Szczególne słowa uznania należą się członkom Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej. Praca ich jest wyjątkowo odpowiedzialna i trudna. Obowiązkiem ich jest ocena prac z zawodów stopnia I i II. Oznacza to obecnie, przy wzroście ilości zawodników biorących udział w zawodach stopnia I i II, ogromne obciążenie.

Na tym samym posiedzeniu przemawiał Andrzej Schinzel, który zaczął swoje wystąpienie od słów:

> Kiedy przemawiałem z tego miejsca przed pięciu laty, starałem się wyrazić wdzięczność ówczesnemu Komitetowi Głównemu i jego przewodniczącemu profesorowi Stefanowi Straszewiczowi. W stosunku do obecnego Komitetu Głównego zrobić tego nie mogę, jako jego członek, gorąco pragnę natomiast ponowić moje podziękowanie dla członków dawnego Komitetu Głównego, mogę bowiem lepiej niż poprzednio ocenić ich pracę poznawszy ją z własnego doświadczenia.

Z okazji jubileuszu siedemdziesięciolecia Olimpiady Matematycznej warto przedstawić listę tych, którzy w Komitetach Olimpiady pracowali najdłużej. Już kilka lat członkostwa w komitecie zasługuje na uznanie, ale wszystkich wymienić się nie da... Na liście są nazwiska tych, którzy wchodzili w skład komitetów przez co najmniej trzydzieści pięć lat, czyli przez połowę czasu istnienia Olimpiady. Obok liczby lat pracy podane są informacje o odpowiednich komitetach oraz numery olimpiad. W przypadku członkostwa w dwóch komitetach na pierwszym miejscu podany jest ten, w którym dana osoba pracowała dłużej.

Począwszy od pierwszej Olimpiady Matematycznej, publikowane były *Sprawozdania z Olimpiad Matematycznych*, a w nich obok treści zadań i ich rozwiązań, nazwisk finalistów, laureatów oraz ich nauczycieli podawane były składy komitetów. Powyższe zestawienie zostało opracowane na podstawie tych *Sprawozdań*. Niestety okazało się, że czasami w podawanych tam składach zdarzały się usterki. Ponadto ostatnie *Sprawozdanie*, które ukazało się drukiem, dotyczyło LXII Olimpiady, a kolejne, niestety, nie zostały wydane.

Przy przygotowywaniu listy rozmaite szczegóły konsultowane były z przedstawicielami odpowiednich komitetów. Błędy w zestawieniu są jednak możliwe, choć mało prawdopodobne – autor zestawienia będzie zobowiązany za informację o ewentualnych dostrzeżonych usterkach.

Lista osób pracujących najdłużej w Komitetach Olimpiady Matematycznej

Liczba OM	Imię i nazwisko	Komitet(y)	Numery OM
58	Paweł Jarek	KO Toruń	VII–LXIV
54	Edward Tutaj	KO Kraków, KG	XVII–LXX
53	Zbigniew Bobiński	KO Toruń	XVIII–LXX
48	Andrzej Mąkowski	KG	XI–LVIII
47	Michał Krych	KO Warszawa, KG	XXIV–LXX
46	Mirosław Uscki	KO Toruń	XXV–LXX
45	Mieczysław Czyżykowski	KG, KO Warszawa	II–XLVI
44	Marcin E. Kuczma	KO Warszawa, KG	XXVII–LXX
43	Zenon Piesyk	KO Łódź	XIII–XIV, XVII–XXII, XXVII–LXI
42	Alina Haman	KO Warszawa	XII–LIII
42	Józef Kalinowski	KO Katowice	XXIX–LXX
41	Witold Nitka	KO Wrocław, KG	VIII–XXI, XLIV–LX
40	Franciszek Ferdek	KO Wrocław	II–XLI
40	Maria Król	KO Gdańsk	VI–XLV
40	Marek Piętka	KO Katowice	XXVII–LXVI
39	Krzysztof Ciesielski	KO Kraków	XXXII–LXX
38	Halina Hebda-Grabowska	KO Lublin	XXXIII–LXX
37	Józef Janikowski	KO Łódź	XII–XLVIII
36	Leon Jeśmanowicz	KO Toruń	VI–XLI
36	Lech Sławik	KO Kraków	XXVIII–LXIII
35	Maciej Bryński	KG	XVI–L
35	Andrzej Nowicki	KO Toruń, KG	XXXI–LXV
35	Ryszard Rudnicki	KO Katowice, KG	XXXVI–LXX
35	Jacek Uryga	KO Katowice	XXXVI–LXX
35	Olga Turska	KG	I–XXXV

Zadania z poszczególnych olimpiad wraz z rozwiązaniami, listy finalistów i laureatów można obecnie znaleźć na stronie internetowej Olimpiady Matematycznej (i bardzo dobrze!), ale jeśli chodzi o składy komitetów, to są tam wyłącznie składy aktualne. Żal, że nazwiska pewnych osób, które wkładały mnóstwo pracy i serca na rzecz Olimpiady Matematycznej, mogą zaginąć w mrokach historii...

Krzysztof Ciesielski
Uniwersytet Jagielloński
Instytut Matematyki
krzysztof.ciesielski@im.uj.edu.pl

Medal siedemdziesięciolecia Olimpiady Matematycznej

Wiad. Mat. 55 (2) 2019, 347–376

Michał Krych (Warszawa)

Siedemdziesiąt lat Olimpiady Matematycznej

1. Historia

Krzysztof Ciesielski poprosił mnie o kilka słów na temat Olimpiady Matematycznej z okazji jej siedemdziesięciolecia. W jakimś sensie jest to rozsądny pomysł, bo najpierw startowałem w OM, następnie byłem długo członkiem Komitetu Okręgowego w Warszawie, potem jego przewodniczącym, a wreszcie życie włączyło mnie do Komitetu Głównego i komisji zadaniowej. To są jakieś podstawy do dowodu twierdzenia o moich kompetencjach. Jednak choć jestem starszy od OM, to pierwszymi olimpiadami w trakcie ich trwania nie interesowałem się zupełnie, bo moja przewaga to tylko rok. Coś na temat powstania OM jednak wiem, więc od tego zacznę.

Olimpiady matematyczne zaczęto organizować jeszcze w XIX wieku. Robili to Węgrzy. Do nas jednak przyszły ze Związku Radzieckiego, gdzie angażowali się w nie wybitni matematycy, których tam było wielu. Oto, co można przeczytać w książeczce *Pierwsza Olimpiada Matematyczna. Sprawozdanie Komitetu Głównego*:

> W roku szkolnym 1949/50 odbyły się w Polsce po raz pierwszy zawody matematyczne dla uczniów szkół średnich pod nazwą Olimpiada Matematyczna". Postanowienie urządzenia zawodów powzięło Prezydium Polskiego Towarzystwa Matematycznego z inicjatywy Ministra Oświaty dra St. Skrzeszewskiego. Opracowanie odpowiednich form organizacyjnych zostało zlecone Komisji Dydaktycznej P.T.M. Po przedyskutowaniu zagadnienia i zapoznaniu się z organizacją olimpiad matematycznych w Związku Radzieckim ustalono następujące zasady ogólne:

> Zadaniem zawodów powinno być wytworzenie wśród młodzieży szkolnej atmosfery zainteresowania matematyką, wciągnięcie wszystkich zdolniejszych i nawet mniej zdolnych uczniów do pracy nad pogłębieniem wiadomości z tego przedmiotu oraz wyszukanie jednostek wybitnie uzdolnionych do matematyki celem ułatwienia im wstępu do uczelni wyższych, a następnie udzielenia jak najdalej idącej opieki i pomocy w studiach. Olimpiady matematyczne powinny być ważnym czynnikiem w walce o wyniki nauczania w szkołach średnich, a ponadto przyczynić się mają do zapewnienia Polsce Ludowej jak najliczniejszych kadr młodych pracowników naukowych w dziedzinie nauk ścisłych.

Rozmawiał z matematykami radzieckimi nie tylko i zapewne nie przede wszystkim minister Stanisław Skrzeszewski, doktor filozofii (doktorat uzyskał na UJ, studiował również na Sorbonie), ale też ówczesny prezes PTM Kazimierz Kuratowski. Zorganizowanie OM powierzono Stefanowi Straszewiczowi, który kierował Olimpiadą przez pierwszych dwadzieścia lat. W zasadzie organizacja OM nie zmieniła się istotnie od pierwszych lat jej istnienia, choć początkowo przeprowadzano ją na dwóch poziomach. Nie wiadomo było, czy rzecz się przyjmie. „Muszę przyznać, że z początku zapatrywaliśmy się na powodzenie Olimpiady sceptycznie. Jednakże obawy te trwały krótko i pierwsza Olimpiada przyniosła sukces. Przystąpiło do niej 1209 uczniów..." – to słowa z przemówienia Straszewicza wygłoszonego na zakończenie dziesiątej edycji konkursu.

Od nieco ode mnie starszych kolegów wiem, że Straszewicz przed ustaleniem wyników kolejnych Olimpiad oglądał prace wszystkich finalistów. W rezultacie nie sama punktacja decydowała o wynikach, ale również do pewnego stopnia jakość rozwiązań. Po wielu latach, długo po odejściu Straszewicza z KG, po zmianach regulaminowych, tego rodzaju ustalenie ostatecznych wyników przestało być możliwe. Jednak kilka lat temu udało się wprowadzić do regulaminu OM punkt pozwalający Komitetowi Głównemu na zwiększenie oceny za wyjątkowo dobrze rozwiązane zadanie. Jeszcze z tej możliwości nie skorzystaliśmy, ale stworzona została dlatego, że nie mogliśmy wcześniej włączyć do finału kogoś, kto wyjątkowo ładnie rozwiązał jedno z zadań i w dodatku pochodził z nieolimpijskiej szkoły – brakowało mu bardzo niewiele punktów.

Straszewicz pisał rozwiązania zadań z wielką troską o ich zrozumiałość. Były one, wraz z innymi informacjami o olimpiadzie, zamieszczane w *Sprawozdaniach z Olimpiad*, drukowanych przez PZWS i rozsyłanych do szkół ponadpodstawowych w całym kraju. Dla wielu osób były pomocą w przygotowywaniu się do następnych olimpiad (dla mnie też). Po pięciu latach Straszewicz napisał książkę *Zadania z olimpiad matematycznych.* Powtórzył to potem jeszcze trzykrotnie. Następne tomy napisali Jerzy Browkin (dwa tomy, zadania z dziesięciu olimpiad), Maciej Bryński i Marcin Kuczma po jednym. Potem wydawnictwo

WSiP (następca PZWS) straciło zainteresowanie – drukowanie takich książek skierowanych do niezbyt licznego grona odbiorców jest przecież nieopłacalne. Dodać należy, że zarówno w corocznych sprawozdaniach, jak i we wspomnianych książkach są nie tylko rozwiązania, ale też i obszerne komentarze dotyczące zagadnień matematycznych związanych z zadaniami.

Straszewicz współpracował z różnymi matematykami. Przewodniczącym Komitetu Okręgowego w Warszawie od początku jej istnienia aż do XVIII OM włącznie był Wacław Sierpiński. We Wrocławiu członkiem i przewodniczącym bywał Hugo Steinhaus (choć nie od początku). Wymieniam tylko tych dwóch, bo byli to czołowi polscy matematycy. Oni musieli widzieć w tym sens, skoro zajmowali się tym, przychodzili na „herbatki”[1] i opowiadali młodym ludziom o matematyce. Wielu innych też przychodziło, sprawdzało zadania itd. Pamiętam, że w czasie „herbatki” po drugim stopniu XVI OM, referując rozwiązanie prostego zadania przy tablicy, popełniłem drobny błąd, którego nie zauważył nikt poza Sierpińskim, siedzącym z zamkniętymi oczami (miał wtedy osiemdziesiąt dwa lata) i wtedy okazało się, że on wcale nie śpi, bo przywołał mnie do porządku. To działało na młodego człowieka.

W 1972 roku zostałem członkiem Komitetu Okręgowego w Warszawie. Sprawdzałem więc zadania, przychodziłem na „herbatki”. Przez chyba pięć lat wspólnie z Tadeuszem Iwańcem, dziś bardzo znanym matematykiem, prowadziliśmy obozy przygotowawcze przed Olimpiadą Międzynarodową. W pewnym momencie zauważyliśmy, że młodzież traktuje te obozy w zasadzie jako wczasy – nie angażowali się zbytnio w rozwiązywanie zadań, a zwłaszcza w ich redagowanie. Zaproponowaliśmy wtedy Komitetowi Głównemu, aby obóz przed olimpiadą międzynarodową stał się obozem kwalifikacyjnym. Chodziło o to, by ostateczna decyzja o tym, kto będzie reprezentować Polskę na międzynarodowej olimpiadzie matematycznej, zapadała po obozie i brała pod uwagę jego wyniki. Komitet zgodził się i wtedy na obóz jechali wszyscy laureaci OM. To były dodatkowe zawody trwające około dwóch tygodni. Na pierwszym takim z pewnością wszyscy pracowali intensywnie – były klasówki, zadania domowe. W roku szkolnym 1976/1977 jeden z zakwalifikowanych zachorował i nie mógł pojawić się na finale. W poprzednim roku był laureatem i uzyskał nagrodę III stopnia na Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej. KG OM zakwalifikował go na obóz przygotawczo-kwalifikacyjny. Znalazł się w reprezentacji Polski, uzyskał na MOM najlepszy wynik spośród reprezentatów Polski i zajął siódme miejsca w końcowej klasyfikacji, co dało mu Nagrodę I stopnia. Po pewnym

[1] „Herbatki”, czyli spotkania uczestników Olimpiady z komisją, na których przy herbacie i ciastkach referowane są rozwiązania zadań, są jedną z tradycji OM.

czasie Komitet Główny, w innym już składzie, zrezygnował z tej formy, a teraz OM wraca do tego w ograniczonym zakresie. Zdarzyło się wielokrotnie, że punktacja z finału nawet w połączeniu z punktacją z zawodów drugiego stopnia nie rozróżniała kandydatów do reprezentacji. Zaproponowano więc dogrywki, które kilka razy się odbyły. Nie zapraszano teraz wszystkich laureatów, a jedynie tych z „pogranicza".

Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna organizowana jest od 1959 roku. To pomysł rumuński. Polska uczestniczyła we wszystkich z wyjątkiem drugiej. W pierwszej współzawodniczyło 52 uczniów z siedmiu krajów, w drugiej – 39 uczniów z pięciu krajów, w 1980 roku nie zorganizowano jej, a w ostatniej – 621 uczniów ze 112 państw. Do 1966 roku uczestniczyły w MOM wyłącznie państwa państwa socjalistyczne, a później również inne – m.in. Anglia, Francja, Szwecja, Włochy. W 1986 roku odbyła się ona po raz trzeci i zapewne – jako że nie ma co liczyć na państwowe dotacje – ostatni raz w Polsce. Byli tam uczniowie z trzydziestu siedmiu państw, radiostacja *Głos Ameryki* donosiła o świetnym wyniku reprezentacji USA – byli na pierwszym miejscu wspólnie ze Związkiem Radzieckim, a Joseph Keane otrzymał specjalną nagrodę za wyjątkowo pomysłowe rozwiązanie jednego z zadań[2] (choć w końcowej klasyfikacji trzech uczniów go wyprzedziło, w tym Stanisław Smirnow, medalista Fieldsa z 2010 roku, i Geza Kos, obecnie (od wielu lat) mocno zaangażowany w przygotowywanie zadań na olimpiadę międzynarodową i zawody studenckie). Terence Tao, medalista Fieldsa z 2006 roku, był wówczas osiemdziesiąty siódmy, ale miał dopiero jedenaście lat. W każdym razie z pewnością już były to zawody o zasięgu światowym. Dwukrotnie (1987, 1988), z powodu braku pieniędzy na wyjazd pełnej drużyny, reprezentacja Polski startowała na MOM w okrojonym o połowę składzie.

Zadania z MOM pojawiają się w *Sprawozdaniach Komitetu Głównego* od XIV OM, a informacje o niej od X OM (I MOM).

Można powiedzieć, że Olimpiada Matematyczna jest bardzo stabilnym przedsięwzięciem, nie wymagającym ciągłych gruntownych reform. Pomimo tego, że Ministerstwo Edukacji Narodowej przed przyznaniem dotacji na kolejne zawody ocenia tzw. innowacyjność projektu. Jednak, zmieniając czasem nieco regulamin OM, nikt nie myśli o innowacyjności. Ostatnie zmiany wprowadzaliśmy z myślą o uczestnikach z mniejszych miejscowości uczęszczających do szkół,

[2] Oto to zadanie: „Każdemu wierzchołkowi pięciokąta foremnego przyporządkowana jest liczba całkowita w taki sposób, że suma wszystkich pięciu liczb jest dodatnia. Jeśli trzem kolejnym wierzchołkom przyporządkowane są odpowiednio liczby x, y, z i $y < 0$, to następująca operacja jest dopuszczalna: liczby x, y, z zastępujemy odpowiednio liczbami $x+y$, $-y$, $z+y$. Powtarzamy tę operację dopóty, dopoki co najmniej jedna z liczb jest ujemna. Rozstrzygnąć, czy ten proces musi się zakończyć po skończonej liczbie kroków."

których uczniowie nie próbują startować w zawodach, a bywa, że nauczyciele ich zniechęcają do przygotowań tekstami w rodzaju „z naszej szkoły nikt nigdy nie startował, więc i tobie się zapewne nie uda..." To jeden z większych problemów stojących przed organizatorami. Są szkoły, w których uczniowie są zachęcani do udziału, są tam prowadzone kółka, na których można sporo się nauczyć. I nie tylko nauczyciele je prowadzą, często robią to byli uczniowie. To oczywiście stawia uczniów ze „szkół olimpijskich" w lepszej sytuacji. Z drugiej strony, jeśli ktoś idąc do liceum myśli o matematyce i mieszka w Warszawie, to wiadomo, że powinien pomyśleć o LO nr XIV. Podobnie jest w Krakowie, Wrocławiu, Toruniu, Gdyni, Szczecinie, Rzeszowie, Bielsku-Białej, Stalowej Woli, Tarnowie, Końskich. W niektórych miastach jest to instytucjonalnie gwarantowane (umowa z wyższą uczelnią, która przysyła pracowników), a gdzie indziej to sprawa często jednego nauczyciela. Jednak rady na tę nierówność, w każdym razie sensownej, nikt jeszcze nie wymyślił. Być może takowa nie istnieje. Każdy, komu zdarzyło się być w dobrej klasie, dobrej grupie studenckiej wie, że ważne jest również to, że inne osoby w grupie mają pomysły, że nie trzeba poświęcać czasu na drobiazgi.[3] Poza tym lekcje w normalnej klasie są w jakimś sensie ukierunkowane na maturę, a tam zadania mają sprawdzać wiedzę, nie zaś pomysłowość, oryginalność itp. Warto też dodać, że laureaci i finaliści są doceniani nie tylko przez wydziały matematyki wyższych uczelni. W zdecydowanej większości są to ludzie myślący i sprawdzają się później na studiach (nie tylko na kierunkach ścisłych) i w pracy. Oznacza to, że system wymyślony przez matematyków po II wojnie światowej jest skuteczny i działa dobrze.

Dodać wypada, że we wczesnych latach pięćdziesiątych XX wieku dyplom Olimpiady lub zaświadczenie o udziale w finale OM umożliwiało studiowanie osobom z niewłaściwym z punktu widzenia ówczesnej władzy pochodzeniem. Wspominała o tym publicznie Danuta Przeworska-Rolewicz, już nie pamiętam przy jakiej okazji. Młodsi czytelnicy mogą nie zdawać sobie sprawy, że wtedy negatywna opinia na przykład organizacji młodzieżowej mogła blokować przyjęcie na studia. Przepis państwowy gwaratował jednak laureatom OM studia i ich nie dotyczyły rozważania o właściwym pochodzeniu społecznym. Dodam jeszcze, że problemy z dostateczną liczbą dzieci robotników i chłopów na studiach były odgórnie rozwiązywane jeszcze w latach osiemdziesiątych. Kolega z innego wydziału UW sekretarzował komisji rekrutacyjnej, kiedyś na ostatnim miejscu znalazły się dwie osoby z identyczną punktacją, jedna z nich miała wliczone punkty za tzw. pochodzenie, wydział chciał przyjąć obie, co

[3] Ostatnio tłumaczyłem studentce, że obliczając jakąś granicę, nie może zastępować kosinusa sinusem tej samej liczby, co ją dziwiło, choć poprawnie odpowiadała na na pytania o sin 0 i cos 0 – takie problemy u kilku uczniów mogą dezorganizować systematycznie lekcje.

by spowodowało przyjęcie 201 zamiast 200 osób, ale uniwersytecka komisja rekrutacyjna zdecydowała przyjąć osobę z punktami za pochodzenie pomimo tego, że była to podwójna preferencja nieprzewidziana przepisami. Olimpiada gwarantuje, i zawsze tak było, ocenę wyłącznie na podstawie tego, co człowiek napisał. Nie ma tu miejsca na żadne inne względy. Myślę, że wiele osób zdaje sobie z tego sprawę.

Może wypada w tym miejscu dodać, że Olimpiada również w ocenie uczestników odgrywała istotną rolę. Oto fragment ze *Sprawozdania Komitetu Głównego* z uroczystości na zakończenie X OM.

> W imieniu zawodników zabierali głos przedstawiciele kilku roczników Olimpiady Matematycznej. Opowiedzieli o przebiegu swoich studiów, podkreślając, że podnietę do studiów i pomoc w początkach nauki zawdzięczają Olimpiadzie Matematycznej. Szczególnie gorące podziękowanie złożył pierwszemu kierownikowi Olimpiady Matematycznej profesorowi dr. Kazimierzowi Zarankiewiczowi Andrzej Schinzel, laureat II olimpiady Matematycznej. Oświadczył, że profesorowi Zarankiewiczowi zawdzięcza stałą opiekę podczas studiów w Warszawie, uzyskanie specjalnego stypendium, wyjazdu do sanatorium i dobrych warunków mieszkaniowych.

Wiem, że później Schinzel pomagał jednemu ze swych uczniów. Ja kiedyś, jeszcze jako uczeń, zapytałem jednego z członków Komitetu Okręgowego w Warszawie, gdzie znaleźć zadania do rozwiązywania. Jego reakcja była prosta – nieznanemu chłopakowi pożyczył wspaniały zbiór zadań (po rosyjsku) *Wybrane zadania i twierdzenia z matematyki elementarnej. Arytmetyka i algebra*, który zwróciłem po kilku miesiącach (nie było kserografów), a gdy po kilku latach pojawiło się następne jego wydanie, kupiłem je natychmiast. Był to jeden z tomów serii *Biblioteka kółka matematycznego*, to było kółko prowadzone przy Uniwersytecie Moskiewskim. Co najmniej jedna z tych książek została przetłumaczona i wydana po polsku jako *Figury wypukłe* (PWN, 1955). Jest w niej m.in. rozwiązanie problemu Kakeyi, czyli znalezienie minimalnego pola figury, w której można obrócić fizycznie (nie wyjmując go z płaszczyzny) odcinek jednostkowy o 180°. Zaskakująca odpowiedź podana została przez Abrama Bezikowicza – to pole może być dowolnie małe. Jeden ze znajomych Rosjan nie chciał uwierzyć, że rozwiązanie jest w książce wydanej w ZSRR, uwierzył dopiero, gdy powiedziałem mu, że nie napisano tam, że odpowiedź podał A. Bezikowicz, którego nazwisko, emigranta z ZSRR z 1924 roku, nie miało prawa pojawiać się w druku. A rzecz nadaje się dla olimpijczyków niekoniecznie jako zadanie, choć gdy już wiemy, czego oczekujemy, jest znacznie łatwiej niż wtedy, gdy formułowane były hipotezy podające jakieś liczby dodatnie. Można o tym przeczytać w angielskiej wikipedii, a jeszcze więcej w rosyjskiej, bo zdjęto klątwę z Bezikowicza.

Warto powiedzieć, że nawet w początkach istnienia OM widać było, że uczniowie również z małych miejscowości, w których nie było wyższych uczelni, czytywali podręczniki uniwersyteckie. Oczywiście zawsze było łatwiej w dużych miastach, w których były księgarnie i niewykupione książki nie szły od razu na przemiał, lecz można było je kupić nawet po wielu latach od wydania (czasem już przecenione). Ludziom z nieuniwersyteckich miast było wtedy zapewne trochę łatwiej niż dziś, gdyż jeszcze nie było tak dużych różnic między szkołami, bo nie było klas, w których matematyki uczyli ludzie z uniwersytetów – te pojawiły się około 1970 roku. W Warszawie patronował temu Stanisław Mazur. Wkrótce uczniowie z tych klas, z różnych miast, zaczęli dominować w OM, ale to było oczywiste – zainteresowani matematyką trafiali do tych klas, byli dobrze uczeni, miewali więcej lekcji matematyki niż inni. Nie oznacza to, że uczniowie z innych klas nie mieli już szans, pojawiali się i pojawiają nadal, ale nie jest ich wielu. Wypada w tym miejscu wyraźnie stwierdzić, że przynajmniej w Warszawie celem nauczania w tych klasach nie jest przygotowanie do startu w OM, lecz nauka matematyki, poznanie jej piękna czy ciekawych twierdzeń z dowodami.

Olimpiada ma swoje problemy, jednak spełnia pokładane w niej nadzieje konsekwentnie od 1949 roku. Wiele osób pracuje układając zadania, sprawdzając, organizując zajęcia dla uczniów i nauczycieli. Ma to wpływ na nauczanie najzdolniejszych uczniów. Oczywiście nie wszyscy zdolni chcą startować w konkursach – tak było zawsze. Czym innym jest rozwiązywanie zadań w ograniczonym czasie, a czym innym praca nad rozwiązaniem problemu otwartego. Jednak dla wielu osób rozwiązywanie zadań olimpijskich było wstępem do zajęcia się matematyką. Wielu spotkało rówieśników lepszych od siebie lub tak samo zdolnych, nawiązało ciekawe kontakty. Spotykali się na kółkach, w tym prowadzonych przez pracowników wyższych uczelni. Później ci ludzie spotykali się w grupach studenckich.

2. Zadania

Trochę wypada napisać o zadaniach. Początkowo bywały łatwe. Oto pierwsze zadanie z I Olimpiady.

I OM, etap 1, zadanie 1. *Dowieść, że jeżeli* $m > 0$, *to* $m + \frac{4}{m^2} \geqslant 3$.

Teraz dla większości poważnie myślących o sukcesie byłoby ono za łatwe. Widać, że chodzi o porównanie średniej arytmetycznej liczb $\frac{m}{2}$, $\frac{m}{2}$ i $\frac{4}{m^2}$ z ich średnią geometryczną. Można też pomnożyć obie strony nierówności przez $m^2 > 0$ i zauważyć, że

$$m^3 - 3m^2 + 4 = (m+1)(m^2 - 4m + 4) = (m+1)(m-2)^2 \geqslant 0.$$

Następny problem też nie sprawiłby „zawodowcom" większych trudności.

I OM, etap 1, zadanie 2. *Dowieść, że suma sześcianów n kolejnych wyrazów postępu arytmetycznego jest podzielna przez sumę tych wyrazów.*

Trzeba jednak powiedzieć, że tym razem szybkie rozwiązanie ułatwione jest przez znajomość wzoru na sumę kwadratów i sumę sześcianów kolejnych liczb naturalnych. Osoba, która widziała te wzory, ale ich nie pamięta, jest w stanie szybko je odtworzyć, a potem rozłożyć odpowiedni wielomian dwóch zmiennych na czynniki, przy czym wielomian trzeciego stopnia zmiennej n ma być podzielny przez konkretny wielomian kwadratowy, więc po prostu dzielimy. Widać więc, że rozwiązanie to tylko kwestia czasu. Tak zresztą wygląda jedno z dwóch rozwiązań napisanych przez Stefana Straszewicza. Dziś byłoby rozwiązane przez wielu uczestników OM, ale też wielu nie dałoby sobie z nim rady.

Następne zadanie z I OM to zadanie konstrukcyjne.

I OM, etap 1, zadanie 3. *Zbudować trójkąt równoboczny, którego wierzchołki leżą na trzech danych prostych równoległych.*

Zadania konstrukcyjne nie pojawiają się od dłuższego czasu, co spowodowane jest brakiem propozycji tego typu zadań. Dla osób wyćwiczonych w rozumowaniach geometrycznych jasne jest, że pachnie tu obrotami – tak wygląda pierwsze z pięciu rozwiązań tego zadania zamieszczonych w *Sprawozdaniu Komitetu Głównego* z pierwszej Olimpiady.. Te rozwiązania są istotnie różne. Widać, że rzecz napisano z myślą o uczestnikach następnych Olimpiad. Czytając, poznają różne metody rozwiązywania zadań.

I jeszcze zadanie czwarte.

I OM, etap 1, zadanie 4. *W trójkącie ABC kąt A jest dany. Czy można obliczyć kąty B i C, gdy wiadomo, że pewna prosta przechodząca przez punkt A dzieli trójkąt na dwa trójkąty równoramienne?*

Jasne jest, że jeśli zdołamy wskazać nieskończenie wiele niepodobnych jeden do drugiego trójkątów z tym samym kątem A, to odpowiedź brzmi: nie. Otóż tak jest, na przykład gdy $A = 90°$, bo wtedy $B + C = 90°$, więc wystarczy rozważyć dowolny trójkąt prostokątny. Zresztą to uczeń powinien skojarzyć, bo przecież wie ze szkoły, że środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym to środek przeciwprostokątnej. Znów jest to bardzo łatwe zadanie. Dodać należy do tego pełniejszą analizę problemu w zależności od kąta A, co zostało zrobione przez Straszewicza – to materiał na kółko matematyczne, równie dobry w 1949 roku jak i teraz. Nietrudny.

Na finale pojawiło się jako pierwsze poniższe zadanie.

I OM, etap 3, zadanie 1. *Rozłożyć wielomian $x^8 + x^4 + 1$ na czynniki stopnia co najwyżej drugiego.*

Znów nie jest trudne. Od razu widać, że wielomian nie ma pierwiastków rzeczywistych, więc chodzi o przedstawienie go w postaci iloczynu wielomianów kwadratowych. Mamy

$$\begin{aligned} x^8 + x^4 + 1 &= (x^4 + 1)^2 - x^4 = \\ &= (x^4 - x^2 + 1)(x^4 + x^2 + 1) = \\ &= \left((x^2 + 1)^2 - 3x^3\right)\left((x^2 + 1)^2 - x^3\right) = \\ &= (x^2 - x\sqrt{3} + 1)(x^2 + x\sqrt{3} + 2)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

Zadanie można omawiać na kółku używając liczb zespolonych, co daje nieco inne spojrzenie na problem, choć bałbym się twierdzić, że te metody są istotnie różne, mimo że ich wygląd to mocno sugeruje.

Zadanie czwarte z finału wyglądało tak.

I OM, etap 3, zadanie 4. *Ktoś chce odkręcić nakrętkę kwadratową o boku a kluczem, którego otwór ma postać sześciokąta foremnego o boku b. Jaki warunek powinny spełniać długości a i b, aby to było możliwe?*

Zadanie to pokochaliby dziennikarze, gdyby pojawiło się na maturze, bo takie niby praktyczne. Jest to zadanie rachunkowe. Z drugiej strony porządny majster na pewno protestowałby, gdyby mechanikowi przyszło do głowy użyć niewłaściwego klucza – niszczą się od tego zarówno klucze, jak i nakrętki. Jednak w czasach pierwszych olimpiad wszystkiego ciągle brakowało – skutki II wojny światowej.

A teraz zadanie drugie z zawodów okręgowych II OM.

II OM, etap 2, zadanie 2. *W trójkącie ABC na bokach BC, CA, AB obrano odpowiednio punkty D, E, F w taki sposób, że*

$$BD : DC = CE : EA = AF : FB = k,$$

gdzie k jest daną liczbą dodatnią. Mając dane pole S trójkąta ABC obliczyć pole trójkąta DEF.

To zadanie powtórzone było w nieco innych wersjach również później (zob. zadanie 5, finał XVI OM). Rozwiązanie pomijam, bo to bardzo proste obliczenia oparte na znanym (wtedy chyba bardziej niż teraz) wzorze na pole trójkąta: $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A$.

Przechodzimy do trzeciej OM.

III OM, etap 1, zadanie 12. *Dowieść, że pole S czworokąta wpisanego w koło i mającego boki a, b, c, d wyraża się wzorem*

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

gdzie $2p = a + b + c + d$.

W tym zadaniu znów niewiele poza obliczeniami jest do zrobienia – trzeba wiedzieć, że suma kątów przeciwnych (wierzchołki są końcami jednej z przekątnych) równa jest $180°$ oraz że suma kosinusów takich kątów jest równa 0. To pozwala na znalezienie kosinusa kąta czworokąta, a następnie sinusa i wreszcie napisania wzoru na pole sumy dwóch trójkątów, których wspólną podstawą jest przekątna czworokąta. Oczywiście należy rokładać na czynniki, co się tylko da rozłożyć, więc postępować przeciwnie do tego, co obecnie propaguje w szkołach wielu nauczycieli. Podejrzewam, że dziś to zadanie byłoby zadaniem średniej trudności. W komentarzu Straszewicz wiąże je z ogólniejszym wzorem na pole dowolnego czworokąta (nie tylko wpisanego w okrąg). Pokazuje też, że dowodzone twierdzenie można odwrócić. Pisze też:

> Powyższe twierdzenie jest przypadkiem szczególnym twierdzenia Cramera (matematyk szwajcarski, 1704–1752):
>
> *Spośród wszystkich wielokątów o danych bokach* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *(gdzie* $n \geqslant 3$*) największe pole ma wielokąt wpisany w koło.*

III OM, etap 2, zadanie 3. *Czy prawdziwe są twierdzenia: a) jeżeli cztery wierzchołki prostokąta leżą na czterech bokach rombu, to boki prostokąta są równoległe do przekątnych rombu; b) jeżeli cztery wierzchołki kwadratu leżą na czterech bokach rombu, który nie jest kwadratem, to boki kwadratu są równoległe do przekątnych rombu.*

Nie podaję rozwiązania, a jedynie odpowiedź w nadziei, że zadanie dostarczy zabawy ewentualnym czytelnikom: a) – nie, b) – tak.

III OM, etap 2, zadanie 5. *Dowieść, że płaszczyzna, która przechodzi: a) przez środki dwóch krawędzi przeciwległych czworościanu i b) przez środek jednej z pozostałych krawędzi czworościanu, dzieli czworościan na dwie części o równych objętościach. Czy teza pozostanie prawdziwa, gdy odrzucimy założenie b)?*

Po zrobieniu dobrego rysunku i wpatrzeniu się weń każdy z pewnością dojrzy tezę. Odpowiedź na oba pytania jest twierdząca. Jasne jest, że standardowa uczniowska reakcja na sformułowanie tego zadania to próba dowodu twierdzenia z punktu a) i podania kontrprzykładu na wersję b). Moim zdaniem to bardzo dobre sformułowanie, bo pozwala zidentyfikować osoby starające się przeanalizować problem – ci prawie na pewno podadzą właściwą odpowiedź. Główna trudność w tym zadaniu to sformułowanie właściwej hipotezy, dowód jest mniejszym problemem. Dziś też to zadanie sprawiłoby wielu uczniom problemy.

III OM, etap 3, zadanie 6. *W okrągłej wieży o wewnętrznej średnicy* 2 *m znajdują się schody kręcone o wysokości* 6 *m. Wysokość każdego stopnia schodów wynosi* 0,15 *m. W rzucie poziomym stopnie tworzą przylegające do siebie wycinki kołowe o kącie* 18°. *Węższe końce stopni umocowane są w okrągłym filarze o średnicy* 0,64 *m, którego oś pokrywa się z osią wieży. Obliczyć największą długość pręta prostoliniowego, który można przenieść tymi schodami z dołu do góry* (*nie brać pod uwagę grubości pręta ani grubości płyt, z których zrobione są schody*).

Dziś też wielu finalistów nie dałoby sobie rady z tym zadaniem, choć nie potrzeba tu specjalnie wyszukanych metod. Jest jednak trochę pracy.

IV OM, etap 1, zadanie 6. *Dowieść, że jeżeli figura płaska ma dwie i tylko dwie osie symetrii, to te osie są prostopadłe.*

Nie jest to zadanie trudne – dla zawodowego matematyka wręcz oczywiste – ale inaczej jest z uczniami. To zadanie znów myślącemu młodemu człowiekowi podsuwa myśl o podobnych pytaniach, zresztą podobne zadania pojawiły się też w następnych olimpiadach. Na przykład w zadaniu siódmym z pierwszego stopnia IX OM.

IX OM, 1 etap, zadanie 7. *Dowieść, że jeżeli figura płaska o rozmiarach skończonych ma środek symetrii O i oś symetrii s, to punkt O leży na prostej s.*

Teraz zadanie z IV OM.

IV OM, etap 1, zadanie 8. *Przez punkt M dany na przedłużeniu boku AB trójkąta ABC poprowadzić prostą przecinającą boki AC i BC w punktach N i P w taki sposób, żeby odcinki AN i BP były równe.*

Znów zadanie konstrukcyjne. Rozwiązanie nie jest specjalnie trudne. Można rzecz sprowadzić do twierdzenia Talesa po dorysowaniu równoległej do poszukiwanej prostej. Można też użyć twierdzenia Menelaosa, co oczywiście skraca rozwiązanie. Dziś wielu uczniów, zwłaszcza ze „szkół olimpijskich", zna twierdzenia Menelaosa i Cevy, więc dla nich zadanie byłoby łatwiejsze niż dla uczniów ze szkół, w których o takich twierdzeniach nikt nawet na kółkach nie wspomina.

IV OM, etap 1, zadanie 10. *Dane są dwie proste skośne m i n. Na prostej m odmierzono odcinek AB o danej długości a, a na prostej n odmierzono odcinek CD o danej długości b. Dowieść, że objętość czworościanu $ABCD$ nie zależy od położenia odcinków AB i CD na prostych m i n.*

Zdaniem autora artykułu to zadanie powinno być obowiązkowe na wszelkiego rodzaju kółkach matematycznych – jest średniotrudne, ale pokazuje sposób patrzenia na czworościan przydatny w wielu sytuacjach. Dla osoby, która uczy całkowania funkcji wielu zmiennych, teza jest całkowicie oczywista. Dowód metodami geometrii syntetycznej jest krótki, ale warto dorysować równoległościan.

IV OM, etap 3, zadanie 4. *Dowieść, że jeżeli n jest liczbą naturalną, to zachodzi równość*

$$(\sqrt{2}-1)^n = \sqrt{m} - \sqrt{m-1},$$

gdzie m jest liczbą naturalną.

To zadanie ma ładną treść. Daje się rozwiązać bez znajomości różnych twierdzeń. Może być punktem wyjścia do omawiania na kółku równania Pella ($x^2-2y^2=1$), ułamków łańcuchowych.

Następne, na które chciałbym zwrócić uwagę, to zadanie z V OM.

V OM, etap 1, zadanie 6. *Rozłożyć na czynniki wyrażenie*

$$W = x^4(y-z) + y^4(z-x) + z^4(x-y).$$

Nie jest ono bardzo trudne, wręcz chyba dosyć łatwe, ale to jedno z kilku zadań, które warto omawiać na kółkach. Zmusza do omówienia wielomianów symetrycznych, również jednorodnych, może więc być punktem początkowym do omówienia nieco poważniejszej szkolnej algebry. Niedawno ktoś z członków komisji zadaniowej KG OM proponował podobne zadanie, ale propozycję trzeba było odrzucić jako zbyt podobną do jednego z kilku podobnych zadań. Straszewicz w rozwiązaniu korzysta z symetrii i jednorodności. Podobnie, jak w rozwiązaniu poniższego zadania z XI OM.

XI OM, etap 1, zadanie 6. *Dowieść, że jeżeli liczby a, b, c, z których żadna nie jest zerem, spełniają zależność*

$$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = abc(a^3+b^3+c^3)$$

to można je ustawić w takim porządku, że utworzą postęp geometryczny.

Poniższe zadanie z V OM udaje planimetrię, ale w zasadzie to zadanie z trygonometrii. Nietrudne – dziś pewnie byłoby trudniejsze niż kiedyś, bo trygonometrii uczono kiedyś znacznie więcej niż teraz.

V OM, etap 1, zadanie 9. *Punkty $A, B, C, D, \ldots$ są kolejnymi wierzchołkami pewnego wielokąta foremnego, przy czym zachodzi związek*

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

Ile boków ma ten wielokąt?

Uważam je jednak za warte przypomnienia, m.in. dlatego, że mimo wszystko trygonometria ma pewien urok, więc w jakimś zakresie powinna pojawiać się na kółkach itp.

Na drugim stopniu V OM pojawiło się dosyć proste, stereometryczne, zadanie.

V OM, etap 2, zadanie 5. *Dane są punkty A, B, C i D nie leżące w jednej płaszczyźnie. Przeprowadzić przez punkt A taką płaszczyznę, żeby rzut prostokątny czworokąta $ABCD$ na tę płaszczyznę był równoległobokiem.*

Warto omawiać takie zadania, chociaż w wielu krajach rezygnuje się ze stereometrii jako tego fragmentu matematyki elementarnej, który jest kłopotliwy dla obu stron procesu dydaktycznego.

W trzecim stopniu V OM widzimy zadanie, znów stereometryczne. Dziś pewnie byłyby opory przed takim sformułowaniem – zbyt fizyczna zdaniem niektórych osób treść.

V OM, etap 3, zadanie 3. *Jednorodną tarczę kołową zawieszono w położeniu poziomym na sznurze uczepionym w jej środku O. W trzech różnych punktach A, B, C brzegu tarczy położono ciężary p_1, p_2, p_3, po czym tarcza pozostała w równowadze. Obliczyć kąty AOB, BOC i COA.*

W rozwiązaniu trzeba zresztą wykorzystać elementarne fakty znane z lekcji fizyki. Autor tego tekstu uważa to za zaletę tego zadania. Przez wiele lat nikt nie wiedział, gdzie kończy się matematyka, a zaczyna fizyka. W dalszym ciągu o różnych osobach można powiedzieć, że są fizykami lub matematykami z równym w zasadzie powodzeniem. Może to jest właściwe miejsce na zaznaczenie, że wiele twierdzeń geometrycznych ma fizyczne dowody i warto o tych fizycznych też mówić uczniom (twierdzenie Cevy, przecinanie się w jednym punkcie środkowych trójkąta w szczególności).

Nie był to koniec stereometrii w tym finale. Zadanie piąte z finału też do niej nawiązywało.

V OM, etap 3, zadanie 5. *Dowieść, że jeżeli w czworościanie $ABCD$ krawędzie przeciwległe są równe, tj. $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$, to proste przechodzące przez środki krawędzi przeciwległych są wzajemnie prostopadłe i są osiami symetrii czworościanu.*

Można je rozwiązać syntetycznie, ale można też użyć wektorów. Warto pokazać, że ich użycie w zasadzie sprowadza zadanie do technicznych obliczeń. Środek odcinka AB to $\frac{1}{2}(A+B)$, środek odcinka CD, to punkt $\frac{1}{2}(C+D)$. Wektor łączący te środki to $\frac{1}{2}(A + B - (C + D))$, a wektor łączący środki odcinków AC i BD, to $\frac{1}{2}(A + C - (B + D))$. Iloczyn skalarny[4] tych wektorów to

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}&(A + B - (C + D)) \cdot (A + C - (B + D))\\ &= \frac{1}{4}((A - D) + (B - C)) \cdot ((A - D) - (B - C))\\ &= \frac{1}{4}((A - D)^2 - (B - C)^2) = 0,\end{aligned}$$

bo kwadrat skalarny to kwadrat długości wektora, a przeciwległe krawędzie czworościanu mają te same długości. Analogicznie sprawdzamy prostopadłość pozostałych dwu par. Stąd wynika, że

$$(A-B)(A+B-C-D) = \tfrac{1}{2}((A+D)-(B+C)+(A+C)-(B+D))(A+B-C-D) = 0$$

i następnie, że punkty A i B są symetryczne względem prostej przechodzącej przez $\frac{1}{2}(A + B)$ i $\frac{1}{2}(C + D)$. Analogicznie C i D, a stąd wynika od razu, że prosta przechodząca przez $\frac{1}{2}(A + B)$ i $\frac{1}{2}(C + D)$ jest osią symetrii czworościanu $ABCD$. Podobnie sprawdzamy, że pozostałe dwie proste przechodzące przez środki krawędzi skośnych są osiami symetrii rozważanego czworościanu.

Następne zadanie pojawiło się na zawodach pierwszego stopnia VI OM.

VI OM, etap 1, zadanie 2. *Fabryka wysyła towar w paczkach po* 3 *kg i po* 5 *kg. Wykazać, że można w ten sposób wysłać każdą całkowitą ilość kilogramów większą niż* 7*. Czy można w tym zadaniu zastąpić dane liczby innymi liczbami?*

Pojawiło się ono znacznie później w nieco innej wersji na Olimpiadzie Matematycznej Gimnazjalistów. Podkreślam to, by zaznaczyć, że nie wymaga ono

[4] Mnożenie oznacza tu iloczyn skalarny wektorów, kwadrat w tym zdaniu to oczywiście iloczyn skalarny wektora przez siebie. Punktów od wektorów nie ma powodu odróżniać. W przestrzeni domyślnie dany jest układ współrzędnych kartezjańskich, punkty i wektory to trójki liczb rzeczywistych; dodawanie, odejmowanie to dodawanie lub odejmowanie współrzędnych, iloczyn skalarny to suma iloczynów współrzędnych.

w zasadzie żadnej wiedzy. Jednak jest to ważne zadanie. W tle jest twierdzenie orzekające, że największy wspólny dzielnik dwu liczb jest ich kombinacją liniową o całkowitych współczynnikach.

W VI OM w pierwszym stopniu znów pojawiła się stereometria.

VI OM, etap 1, zadanie 4. *Dowieść, że jeżeli istnieje kula styczna do wszystkich krawędzi czworościanu, to sumy krawędzi przeciwległych czworościanu są równe i że prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne.*

Znów zadanie z bardzo prostą treścią, krótkie. Dowód tego, że z istnienia sfery wynikają równości sum przeciwległych krawędzi jest powtórzeniem dowodu analogicznego twierdzenia dla czworokąta leżącego na płaszczyźnie. Dowód w drugą stronę jest odrobinę bardziej wymagający, ale po zauważeniu, że punkty styczności okręgów wpisanych w ściany czworościanu do krawędzi czworościanu pokrywają się, nie nastręcza już trudności.

A oto przykłady zadań z algebry, które z pewnością nadają się na kółko.

VII OM, etap 1, zadanie 9. *Dowieść, że z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 > \tfrac{1}{2}(a^4 + b^4 + c^4).$$

VIII OM, etap 1, zadanie 10. *Dowieść, że ze wszystkich czworokątów wpisanych w dane koło kwadrat ma największe pole.*

Rozwiązanie tego zadania opatrzył Stefan Straszewicz komentarzami i warto taką rzecz omówić na kółku. W szczególności zaakcentowana jest luka pojawiająca się w książeczkach popularnonukowych, których autorzy w rzeczywistości dowodzą jedynie, że jeśli istnieje taki czworokąt, to jest nim kwadrat, choć teoretycznie wcale nie wiadomo, dlaczego ma istnieć. Tę lukę zapełnia twierdzenie Weierstrassa o osiąganiu kresów przez funkcję ciągłą na zbiorze zwartym, ale to też wymagałoby pracy. Autor rozwiązania korzysta tu z trygonometrii. Pisze też, że podobnie jest w wypadku n-kątów wpisanych w okrąg. Też problem rozwiązuje za pomocą nierówności Jensena dla funkcji sinus na przedziale $[0, \pi]$. Rademacher i Toeplitz w książce *O liczbach i figurach* (Warszawa 1956, PWN) pokazują czysto geometryczny sposób dojścia od dowolnego n-kąta do foremnego w skończonej liczbie kroków i tak omijają kwestię istnienia maksimum. Pojawiło się też zadanie z n-kątem opisanym na okręgu. Dodajmy, że bywają naturalne zadania, w których kres bywa niezrealizowany: znaleźć kres górny pól pięciokątnych (albo sześciokątnych) przekrojów płaskich danego sześcianu – w tym wypadku kres jest osiągany po zdegenerowaniu wielokąta do czworokąta. I zadanie nie należy do najłatwiejszych. Pojawiło się w lidze zadaniowej *Delty*, a wcześniej na obozie przygotowawczym do Olimpiady Międzynarodowej w wersji – znaleźć przekrój płaski sześcianu o największym polu.

VIII OM, etap 1, zadanie 5. *Dany jest odcinek AB i prosta m równoległa do tego odcinka. Znaleźć środek odcinka AB używając samej linijki, tzn. rysując tylko linie proste.*

O konstrukcjach geometrycznych powoli zapominamy, a tu trzeba było coś zrobić samą linijką.

VIII OM, etap 3, zadanie 5. *Dana jest prosta m i odcinek AB do niej równoległy. Podzielić odcinek AB na trzy równe części przy użyciu samej linijki, tzn. rysując tylko proste.*

Widać, że przygotowywano uczniów do niego wcześniej. Dodajmy, że w rozwiązaniu jest też pokazane, jak znaleźć samą linijką $\frac{1}{n}$-tą odcinka AB. Znów to bardzo dobre ćwiczenie na kółko.

W VIII OM jako ostatnie zadanie w drugim stopniu pojawiło się twierdzenie do udowodnienia.

VIII OM, etap 2, zadanie 6. *Dowieść, że jeżeli czworokąt wypukły ma tę własność, że istnieje okrąg styczny do jego boków* (*tzn. okrąg wpisany*)*, a także okrąg styczny do przedłużeń jego boków* (*okrąg dopisany*)*, to przekątne czworokąta są do siebie prostopadłe.*

Dowodzimy je, korzystając kilka razy z twierdzenia o równej długości odcinków stycznych do okręgu poprowadzonych z jednego punktu. Najbardziej pracochłonna część rozwiązania to uzasadnienie tego, że nasuwający się obrazek rzeczywiście jest „jedyny". To dosyć częsta sytuacja w nietrudnych zadaniach geometrycznych. Obecnie często formułujemy je w taki sposób, by uniknąć zbyt długich, żmudnych, lecz nietrudnych analiz. Z tego, jak Stefan Straszewicz napisał rozwiązanie, widać, że sposób myślenia osób układających zadania teraz jest dosyć podobny do tego sprzed kilkudziesięciu lat – analizę możliwych konfiguracji ówczesny przewodniczący KG OM odłożył do uwagi, więc traktował to jako uzupełnienie rozwiązania.

IX OM, etap 1, zadanie 7. *Jaką figurą płaską jest przekrój sześcianu o krawędzi a płaszczyzną przechodzącą przez środki trzech krawędzi parami skośnych?*

Dziś wszyscy to wiedzą, kiedyś było inaczej, w szczególności piszący te słowa dowiedział się o istnieniu tego przekroju z drugiego tomu *Zadań z olimpiad matematycznych*.

I jeszcze coś z pierwszego stopnia IX OM.

IX OM, etap 1, zadanie 10. *Dowieść, że dla każdego naturalnego n*

$$\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \sin\frac{6\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{2n\pi}{n} = 0.$$

W *Sprawozdaniu Komitetu Głównego* jest kilka rozwiązań, w tym za pomocą liczb zespolonych, co jeszcze raz dowodzi, że pisano je z myślą o tym, że z książki uczyć się będą następni olimpijczycy. Jest w szczególności rozwiązanie polegające na zauważeniu, że suma wektorów

$$(\cos\tfrac{2\pi}{n}, \sin\tfrac{2\pi}{n}), (\cos\tfrac{4\pi}{n}, \sin\tfrac{4\pi}{n}), (\cos\tfrac{6\pi}{n}, \sin\tfrac{6\pi}{n}), \ldots, (\cos\tfrac{2n\pi}{n}, \sin\tfrac{2n\pi}{n})$$

jest wektorem, który nie zmienia się w wyniku obrócenia go o kąt $\frac{2\pi}{n}$, co wynika natychmiast z tego, że po obrocie mamy do czynienia z tymi samymi wektorami wypisanymi w nieco innej kolejności. To piękny argument. Powinien jeszcze znaleźć się argument fizyczny: ciągniemy coś z równymi siłami w n kierunkach, przy czym kąty między wektorami „sąsiednich" sił są równe $\frac{2\pi}{n}$. Nawet niezbyt mocni w matematyce ludzie widzą, że efekt działania tych sił jest zerowy. Argument z obracaniem wektora jest matematyczny, krótki i nie budzi wątpliwości. Część matematyków mogłaby nie polubić uzasadnienia fizycznego, moim zdaniem niesłusznie.

W X OM zadanie drugie z pierwszego stopnia przypominało nauczycielom wzór Cardano.

X OM, etap 1, zadanie 2. *Wykazać, że*

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4.$$

Zostało też rozwiązane tak, by ten wzór, a raczej jego wyprowadzenie przypomnieć. Ja jeszcze wtedy byłem za młody na udział w Olimpiadzie, ale dostałem je kiedyś jako dodatkowe zadanie na klasówce od mojej nauczycielki i udało mi się je rozwiązać, ale po prostu zauważyłem, że $(2 + \sqrt{2})^3 = 20 + 14\sqrt{2}$. Kolega z Krakowa, który rozwiązywał je startując w OM, zrobił to tak samo jak ja. Kilkadziesiąt lat później to zadanie w nieco innej wersji (zmiana liczb) pojawiło się na maturze. Po prostu zaczęto je umieszczać w zbiorach zadań, a autorzy matury nie rozumieli, że podzielą populację na tych, którym ktoś pokazał „sztuczkę" i tych, którzy nie zdążą samodzielnie rozwiązać tego w kilkanaście minut (tyle czasu jest na maturze na zadanie, więc za mało na świeże pomysły).

W pierwszym stopniu XV OM pojawiło się zadanie dziewiąte.

XV OM, etap 1, zadanie 9. *Dowieść, że iloraz sumy wszystkich dzielników naturalnych liczby całkowitej $n > 1$ przez liczbę tych dzielników jest większy od $\sqrt{n}$.*

A pierwsze zadanie tegorocznej, LXXI OM wyglądało tak.

LXXI OM, etap 1, zadanie 1. *Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Rozważmy wszystkie liczby postaci $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$, gdzie k jest dodatnią liczbą całkowitą. Wykazać, że takich liczb jest nie więcej niż $2\sqrt{n}+1$. Uwaga: Dla liczby rzeczywistej x przez $\lfloor x \rfloor$ oznaczamy największą liczbę całkowitą nie większą niż x.*

Niektórzy znani nauczyciele uznali je za zbyt trudne na pierwsze zadanie w całych zawodach, mówiąc głównie o ewentualnych uczniach z klas pierwszych LO lub z ostatnich klas szkół podstawowych. A ja myślę, że ono znalazło się we właściwym miejscu, podobnie jak 56 lat temu nieco inne.

W pierwszym stopniu XX OM zlecono uczestnikom dowód wypukłości funkcji $x \mapsto x^n$ na półprotej $(0, +\infty)$.

XX OM, etap 1, zadanie 5. *Dowieść, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b i naturalnego n*

$$\frac{a^n + b^n}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^n.$$

To zadanie całkowicie banalne, jeśli myślimy o rachunku różniczkowym, ale jeśli chcemy rozwiązać je za pomocą indukcji, to zmuszeni jesteśmy zastanowić się przez chwilę – to oczywiście jest subiektywna opinia.

Nie mogłem odmówić sobie przyjemności zaprezentowania zadania drugiego z finału LXI OM.

LXI OM, etap 3, zadanie 2. *Dodatnie liczby wymierne a i b spełniają równość*

$$a^3 + 4a^2b = 4a^2 + b^4.$$

Udowodnić, że liczba $\sqrt{a} - 1$ jest kwadratem liczby wymiernej.

Wymaga trochę pracy, jest raczej średniej trudności, ale nawet w takiej ogranej części szkolnej matematyki młodzi ludzie układający zadania są czasem w stanie pokazać coś ciekawego.

W pierwszych olimpiadach królowały oczywiście zadania z bardzo klasycznej matematyki elementarnej. W XX OM uczestnicy rozwiązywali sześć zadań ze stereometrii, a w XXI już tylko jedno. Teraz zadania stereometryczne pojawiają się rzadko. Powody są różne. W Olimpiadach międzynarodowych ich nie ma, bo w niektórych krajach stereometrii praktycznie nie ma w szkołach. Po drugie, w ciągu wielu lat wykorzystano wiele elementarnych idei. W rezultacie trudno teraz o proste, ale jednak wymagające pomyślenia, zadania. Nie oznacza to jednak, że wartościowe zadania to już tylko zamierzchła przeszłość.

W finale XX OM pojawiło się następujące zadanie.

XX OM, etap 3, zadanie 5. *Dla jakich wartości n istnieje wielościan mający n krawędzi?*

Zadanie nie jest trudne, ma krótką treść, rozwiązanie wymaga chwili zastanowienia, bo gdy już rozwiązujący zrozumie, że dla każdego $n \geqslant 6$ z wyjątkiem $n = 7$ wielościan o n krawędziach istnieje, to jeszcze trzeba podać dowód nieistnienia wielościanu o siedmiu krawędziach.

XX OM, etap 2, zadanie 6. *Dowieść, że każdy wielościan ma co najmniej dwie ściany o tej samej liczbie boków.*

Rozwiązanie jest krótkie i nietrudne, ale trzeba rzecz precyzyjnie udowodnić. Zresztą twierdzenie da się nieco wzmocnić, na co zwraca uwagę czytelników Stefan Straszewicz – w rzeczywistości w wielościanie co najmniej trzy różne ściany mają identyczne liczby boków.

XXV OM, etap 1, zadanie 8. *Dany jest wielościan wypukły i punkt A w jego wnętrzu. Udowodnić, że istnieje taka ściana S tego wielościanu, że rzut prostokątny punktu A na jej płaszczyznę należy do S.*

Nie pamiętam dokładnie, co robiliśmy z pracami, w których zamieszczono jedynie fizyczne rozwiązanie, które zresztą narzuca się od razu. Zapewne traktowaliśmy je źle, choć chyba niesłusznie.

XXVII OM, etap 2, zadanie 3. *Rozważamy czaszę kulistą nie zawierającą żadnego koła wielkiego. Odległość punktów A i B na takiej czaszy określamy jako długość tego łuku koła wielkiego kuli o końcach w punktach A i B, który jest zawarty w czaszy. Wykazać, że nie istnieje izometria odwzorowująca tę czaszę na podzbiór płaszczyzny. Uwaga. Czasza kulista jest to każda z dwóch części, na które dzieli powierzchnię kuli płaszczyzna przecinająca tę kulę.*

Moim zdaniem, zadanie to powinno być obowiązkowe we wszystkich szkołach ponadpodstawowych. Z niego wynika, że skala mapy, więc coś, o czym wszystkich nas uczono w szkołach, nie istnieje. Oczywiście dowód powinien być ścisły. Jednak warto wiedzieć, że często operujemy przybliżeniami i w rzeczywistości dokładne informacje nie są potrzebne lub wręcz nie mają sensu, więc skala mapy ma jednak sens. To dociera do bardzo niewielu uczniów, choć wiele osób pokrzykuje, że nauka w szkołach powinna być związana z rzeczywistością, nie rozumiejąc, że – jak powiedział John von Neumann – „jeśli ludzie nie wierzą w to, że matematyka jest prosta, to tylko dlatego, że nie zdają sobie sprawy z tego, jak złożone jest życie".

XXVIII OM, etap 1, zadanie 4. *Samolot leci bez zatrzymywania się po najkrótszej drodze z Oslo do miasta X leżącego na równiku w Ameryce Południowej. Z Oslo startuje dokładnie w kierunku zachodnim. Wiedząc, że współrzędne geograficzne Oslo są:* $59°55'$ *szerokości północnej i* $10°43'$ *długości wschodniej, obliczyć współrzędne geograficzne miasta X. Jakie to miasto? Obliczyć długość drogi samolotu z dokładnością do* 100 *km. Zakładamy, że Ziemia jest idealną kulą o długości równika* 40 000 *km oraz, że samolot leci na wysokości nie większej niż* 10 *km.*

Zadanie wskazuje na to, że nauka geografii może sprawiać trudności różnym osobom, przynajmniej w opinii KG OM – inaczej przecież takie zadanie byłoby bez sensu.

W rozwiązaniu zadania szóstego z finału XXIX OM zdecydowano użyć rachunku wektorowego.

XXIX OM, etap 3, zadanie 6. *Dowieść, że jeżeli w dowolnym czworościanie* h_1, h_2, h_3, h_4 *są długościami czterech wysokości,* d_1, d_2, d_3 *zaś odległościami trzech par prostych zawierających przeciwległe krawędzie, to*

$$\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2} + \frac{1}{h_4^2} = \frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_3^2}.$$

To zapewne bardzo słuszna decyzja, choć z pewnością wykorzystane własności iloczynu wektorowego nie mieściły się w programach liceów ogólnokształcących. Jednak zadanie z finału może nieco wykraczać poza program szkolny, zresztą można przepisać to rozwiązanie w taki sposób, że ten iloczyn wektorowy zostanie dostrzeżony tylko przez niektórych czytających rozwiązanie. Autor tego tekstu wiedział w szkole, co to jest iloczyn wektorowy, bo usiłował zrozumieć szkolną fizykę, więc takie rozwiązanie by go wtedy ucieszyło.

W rozwiązaniu zadania piątego z finału XXXI OM warto było posłużyć się równoległościanem, którego przekątne ścian równe są krawędziom danego czworościanu.

XXXI OM, etap 3, zadanie 5. *W czworościanie pola sześciu trójkątów, których bokami są krawędzie, a wierzchołkami środki przeciwległych krawędzi czworościanu, są równe. Udowodnić, że czworościan ten jest foremny.*

Znów zadanie propaguje jeden z najważniejszych sposobów patrzenia na czworościan. Treść krótka, zadanie kształcące.

Pojawiały się też zadania, w których w zasadzie żadnej wiedzy nie trzeba było użyć, ale wyobraźnia miała kluczowe znaczenie.

XXXVI OM, etap 1, zadanie 11. *Podać przykład wielościanu wypukłego mającego* 1985 *ścian, wśród których są takie* 993 *ściany, że żadne dwie z nich nie mają wspólnej krawędzi.*

Z ogłoszonego rozwiązania wynika, że można uzyskać wielościan, który ma 1985 ścian i 1332 z nich są parami rozłączne (tym bardziej nie mają wspólnej krawędzi).

Czasem chciano zwiększać liczbę uczestników OM, zamieszczając zadania, które mogły zainteresować więcej uczniów. Największy sukces tego rodzaju to zadanie pierwsze z pierwszego stopnia XXV OM.

XXV OM, etap 1, zadanie 1. *W czasie pierwszej wojny światowej toczyła się bitwa w pobliżu pewnego zamku. Jeden z pocisków rozbił stojącą u wejścia do zamku statuę rycerza z piką w ręku. Stało się to ostatniego dnia miesiąca. Iloczyn daty dnia, numeru miesiąca, wyrażonej w stopach długości piki, połowy wyrażonego w latach wieku dowódcy baterii strzelającej do zamku oraz połowy wyrażonego w latach czasu, jaki stała statua, równa się 451 066. W którym roku postawiono statuę?*

Do tej pory pamiętam, że w okręgu warszawskim nadesłano osiemset dziewięćdziesiąt rozwiązań tego zadania, podczas gdy następne w tej klasyfikacji to już tylko nieco ponad trzysta. W całej OM pojawiło się ponad pięć tysięcy rozwiązań tego zadania.

To jest autentyczny problem ludzi układających zadania olimpijskie. Z jednej strony trzeba myśleć o tych, którzy startują kolejny raz, mają pewne doświadczenie, sporo czytali, wiedzą różne rzeczy, o których w czasie lekcji w szkołach nigdy nikt nic nie mówił, a z drugiej są młodzi ludzie uczęszczający do „normalnych” klas, w których często wzór na pierwiastki równania kwadratowego podawany jest bez dowodu. Powinniśmy trafiać do jednych i do drugich, choć widać tu wyraźną sprzeczność.

Pewien wpływ na tematykę zadań miał program szkolny. W pewnym momencie w szkołach pojawił się rachunek różniczkowy. Zresztą osoby zainteresowane matematyką, uczęszczające do liceum lub technikum, zwykle dowiadywały się, co to jest pochodna, a przynajmniej, jak ją można obliczać. Obecność tego pojęcia w programach szkolnych, na maturach umożliwiała dawanie zadań również z tego zakresu nie tylko na zawodach finałowych.

XXI OM, etap 1, zadanie 2. *Dany jest ciąg* $\{c_n\}$ *określony wzorami* $c_1 = \frac{a}{2}$, $c_{n+1} = \frac{a+c_n^2}{2}$, *gdzie a jest daną liczbą spełniającą nierówność* $0 < a < 1$. *Dowieść, że dla każdego n zachodzi nierówność* $c_n < 1 - \sqrt{1-a}$. *Wykazać zbieżność ciągu* $\{c_n\}$ *i obliczyć jego granicę.*

To w zasadzie dosyć standardowe zadanie dla studentów pierwszego roku uniwersyteckiej matematyki.

XXXIX OM, etap 1, zadanie 10. *Wiedząc, że* $x \in [0; \frac{\pi}{4}]$ *rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:* $\operatorname{tg}\sin x$ *czy* $\sin\operatorname{tg} x$.

W zasadzie to samo zadanie pojawiło się na zawodach studenckich w 2006 roku. W tych zawodach uczestniczyło 241 studentów z różnych krajów. Zadanie uznano za niezbyt trudne i umieszczono na liście jako trzecie drugiego dnia (mania szeregowania zadań według trudności jest powszechna, pomimo tego, że często wyniki demokratycznych ustaleń różnią się istotnie od statystyk po zawodach, egzaminie itp.). Bezbłędnie rozwiązało je osiem osób (w tym jeden student z Polski), i drugie tyle z pewnymi zastrzeżeniami. Okazało się, że spośród dwunastu zadań było trzecim na liście najtrudniejszych. Na zawodach studenckich miało następującą treść: „[p]orównać $\operatorname{tg}\sin x$ i $\sin\operatorname{tg} x$ dla wszystkich $x \in (0, \frac{\pi}{2})$". Można sprawdzić (jeśli ktoś nic lepszego akurat do roboty nie ma) że pochodne funkcji $\operatorname{tg}\sin x$ i $\sin\operatorname{tg} x$ w punkcie 0 pokrywają się aż do szóstej włącznie, co trochę wyjaśnia kłopoty rozwiązujących. Podamy rozwiązanie. Niech $f(x) = \operatorname{tg}\sin x - \sin\operatorname{tg} x$. Wtedy

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\cos^2 \sin x} - \frac{\cos\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^3 x - \cos\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 \sin x}{\cos^2 x \cdot \cos^2 \operatorname{tg} x}.$$

Niech $0 < x < \operatorname{arc\,tg} \frac{\pi}{2}$. Z nierówności między średnimi i z wklęsłości funkcji kosinus na $(0, \frac{\pi}{2})$ wynika, że

$$\sqrt[3]{\cos\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 \sin x} < \frac{1}{3}\left(\cos\operatorname{tg} x + 2\cos\sin x\right) \leqslant \cos\frac{\operatorname{tg} x + 2\sin x}{3} < \cos x,$$

ostatnia nierówność zachodzi, gdyż

$$\left(\frac{\operatorname{tg} x + 2\sin x}{3}\right)' = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\cos^2 x} + 2\cos x\right) > \sqrt[3]{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos x \cdot \cos x} = 1,$$

więc $\operatorname{tg} x + 2\sin x > 3x$. Wobec tego $\cos^3 x - \cos\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 \sin x > 0$, więc $f'(x) > 0$, zatem f rośnie na przedziale $[0, \operatorname{arc\,tg}\frac{\pi}{2}]$. Kończymy stwierdzeniem (przypominamy, że $4 + \pi^2 < 16$)

$$\operatorname{tg}\sin\operatorname{arc\,tg}\frac{\pi}{2} = \operatorname{tg}\frac{\pi/2}{\sqrt{1+\pi^2/4}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}} > \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1.$$

Dla $x \in [\operatorname{arc\,tg}\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ mamy więc $\operatorname{tg}\sin x > 1$, zatem $f(x) > 0$. Jasne jest, że jeśli ktoś nie rozwiązywał zadania samodzielnie, a tylko szybko przeczytał rozwiązanie, w końcu krótkie i wykorzystujące jedynie dobrze znane fakciki, to rozumie, że jest to zadanie proste. Zaznaczam to, gdyż wiem od autora zadania, że KG OM włączył to zadanie do konkursu nieświadomie – autorskie rozwiązanie zaprezentowane na zebraniu nie było poprawne, choć było „proste". Dowiedziałem się o tym w czasie posiedzenia Rady Wydziału, zapytawszy siedzącego obok jego autora o rozwiązanie, bo miałem je sprawdzać, i wtedy autor dowiedział się, że nie umie go szybko rozwiązać.

Zadań z analizy matematycznej lub takich, które łatwo można było rozwiązać używając pochodnych, było wiele, ale nie sposób cytować wszystkich. W samym końcu lat sześćdziesiątych XX wielu w polskich szkołach pojawił się rachunek prawdopodobieństwa, choć w większości polskich uniwersytetów studenci sekcji nauczycielskiej nie mieli go w programach swych studiów. Co prawda przeprowadzono wiele szkoleń, ale... Niemniej, z tego powodu wśród zadań olimpijskich zaczęły pojawiać się zadania probabilistyczne. Jednym z pierwszych było zadanie drugie w finale XXIV OM.

XXIV OM, etap 3, zadanie 2. *Niech p_n będzie prawdopodobieństwem, że w ciągu n rzutów monetą pojawi się seria kolejnych stu orłów. Dowieść, że ciąg liczb p_n jest zbieżny i obliczyć jego granicę.*

Zadanie niezbyt trudne, ale pouczające.

XXV OM, etap 1, zadanie 11. *Niech X_n i Y_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o takim samym rozkładzie $\left(\left(\frac{k}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right): k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1\right)$. Oznaczmy przez p_n prawdopodobieństwo zdarzenia, że istnieje liczba rzeczywista t spełniająca równanie $t^2 + X_n \cdot t + Y_n = 0$. Obliczyć $\lim_{n\to\infty} p_n$.*

Widać wyraźnie, że wtedy znacznie więcej oczekiwano od uczniów. Mieli wiedzieć, czym jest zmienna losowa (dyskretna), co to jest niezależność zdarzeń i zmiennych losowych. Po pewnym czasie zrezygnowano z tego i rachunku prawdopodobieństwa w zasadzie w szkołach nie uczono, tzn. było prawdopodobieństwo, ale na poziomie całkowicie zerowym, w szczególności bez pojęcia zdarzeń niezależnych i z zadaniami typu: znaleźć prawdopodobieństwo pojawienia się dwóch orłów w siedmiu rzutach monetą.

XXVI OM, etap 2, zadanie 3. *W pewnej rodzinie mąż i żona zawarli następującą umowę: jeżeli któregoś dnia zmywa naczynia żona, to następnego dnia zmywa naczynia mąż. Jeżeli natomiast pewnego dnia zmywa naczynia mąż, to o tym, kto zmywa naczynia następnego dnia, decyduje losowanie za pomocą rzutu mo-*

netą. Niech p_n oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia, że n-tego dnia trwania umowy zmywa naczynia mąż. Dowieść, że istnieje granica $\lim_{n\to\infty} p_n$ i obliczyć ją. Przyjmujemy $p_1 = \frac{1}{2}$.

Zapewne dziś nie mogłoby się pojawić, bo OM zostałaby oskarżona o antyfeminizm.

Jeszcze kilka zadań probabilistycznych, które mi się spodobały.

XXVIII OM, etap 1, zadanie 11. *Spośród liczb $1, 2, \ldots, n$ wybieramy jedną, przy czym wybór każdej z nich jest jednakowo prawdopodobny. Niech p_n będzie prawdopodobieństwem takiego zdarzenia, że w zapisie dziesiętnym wybranej liczby występują wszystkie cyfry: $0, 1, \ldots, 9$. Obliczyć $\lim_{n\to\infty} p_n$.*

XXXIV OM, etap 2, zadanie 6. *Dla danej liczby n oznaczmy przez p_n prawdopodobieństwo tego, że przy losowym wyborze pary liczb całkowitych k, m spełniających warunki $0 \leqslant k \leqslant m \leqslant 2^n$ (wybór każdej pary jest jednakowo prawdopodobny) liczba $\binom{m}{k}$ będzie parzysta. Obliczyć $\lim_{n\to\infty} p_n$.*

XL OM, etap 2, zadanie 2. *Dla losowo wybranej permutacji $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ zbioru $\{1, \ldots, n\}$ oznaczmy przez $X(f)$ największą liczbę $k \leqslant n$ taką, że $f_i < f_{i+1}$ dla wszystkich numerów $i < k$. Udowodnić, że wartość oczekiwana zmiennej losowej X wynosi $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$.*

XLVIII OM, etap 2, zadanie 5. *Rzucamy k kostkami sześciennymi białymi i m czarnymi. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że reszta z dzielenia przez 7 łącznej liczby oczek wyrzuconych na kostkach białych jest równa reszcie z dzielenia przez 7 łącznej liczby oczek wyrzuconych na kostkach czarnych.*

XLV OM, etap 1, zadanie 10. *Liczby dodatnie p i q spełniają warunek $p + q = 1$. Wykazać, że dla dowolnych liczb naturalnych m i n zachodzi nierówność*

$$(1 - p^m)^n + (1 - q^n)^m \geqslant 1.$$

Jest to w swej istocie zadanie probabilistyczne, choć udaje nierówność i od biedy można udawać, że nic wspólnego z rachunkiem prawdopodobieństwa nie ma.

Z oczywistych powodów znacznie zwiększyła się liczba matematyków zajmujących się kombinatoryką, grafami i temu podobnymi rzeczami potrzebnymi informatykom. Pojawiło się więc w OM wraz z matematykami zajmującymi się takimi rzeczami sporo zadań z tej dziedziny. Kilka przykładów, tym razem z niedawnych olimpiad (ostatnie dziesięciolecie).

LXI OM, etap 1, zadanie 12. *Gracze K i F grają w c-fasolki, gdzie c jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Gracz K posiada na początku $n \geqslant 2$ pustych kubków. W każdej rundzie wskazuje dowolne dwa rozłączne, niepuste zbiory kubków. Następnie F wybiera jeden ze zbiorów wskazanych przez K i dokłada po jednej fasolce do każdego z kubków w tym zbiorze. Gra kończy się w momencie wybranym przez K, przy czym liczba rund nie może przekroczyć cn. Gracz K wygrywa, gdy po zakończeniu gry w każdym kubku znajduje się inna liczba fasolek, w przeciwnym razie wygrywa F. Wyznaczyć wszystkie liczby c o następującej własności: Dla każdego $n \geqslant 2$ gracz K ma strategię zapewniającą mu zwycięstwo w c-fasolki.*

Młodzież ponoć kocha gry.

LXI OM, etap 2, zadanie 6. *Dany jest n-elementowy zbiór liczb rzeczywistych, przy czym $n \geqslant 6$. Dowieść, że istnieje co najmniej $n-1$ dwuelementowych podzbiorów tego zbioru, w których średnia arytmetyczna elementów jest nie mniejsza niż średnia arytmetyczna elementów całego zbioru.*

LXIV OM, etap 3, zadanie 6. *Dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ wyznaczyć największą możliwą liczbę punktów w przestrzeni, tworzących zbiór A o następujących własnościach:*

(1) *współrzędne dowolnego punktu zbioru A są liczbami całkowitymi z przedziału $[0; n$;*
(2) *dla każdej pary różnych punktów (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) zbioru A spełniona jest co najmniej jedna z nierówności $x_1 < y_1$, $x_2 < y_2$, $x_3 < y_3$ oraz co najmniej jedna z nierówności $x_1 > y_1$, $x_2 > y_2$, $x_3 > y_3$.*

Od L OM począwszy, zmieniona została organizacja zawodów finałowych. Poprzednio po dwudniowych zawodach finaliści wracali do domów, prace były sprawdzane przez członków KG i kilka tygodni później odbywało się uroczyste zakończenie Olimpiady. Obecnie finał trwa o parę dni dłużej. Wszyscy mieszkają w tym samym ośrodku, przez dwa pierwsze dni zawodnicy rozwiązują zadania, prace oceniane są natychmiast po zawodach, a finaliści czekają na ogłoszenie wyników. Jednak sprawdzanie prac w bardzo ograniczonym czasie w przypadkach, gdy nie jest łatwo podążyć za myślą uczestnika, może spowodować niestandardowe kłopoty... Tak było właśnie w przypadku tego zadania. Nie sprawdzałem go, mnie przypadło inne, ale między pierwszą a drugą w nocy wszedł do pokoju, w którym mieszkałem, kolega, który to właśnie zadanie oceniał i poprosił o pomoc. Mnie się udało rozszyfrować rozumowanie uczestnika wyłącznie dlatego, że przed finałem czytałem rozwiązania napisane przez Kamila Duszenkę i akurat napisany przez zawodnika tekst pasował do czegoś, co pamiętałem. Otóż jakiś gryzmoł w pracy finalisty powinien być literą h, choć wyglądał na k i wiem, że zrozumiałem to tylko dzięki temu, że dokładnie zapoznałem się przed finałem z tekstem Kamila.

LXVIII OM, etap 1, zadanie 6. *W balu uczestniczyło* 20 *kawalerów i* 20 *dam. W każdym z* 99 *tańców tańczyła dokładnie jedna para, za każdym razem inna. W każdej parze tańczyła dama z kawalerem. Dowieść, że istnieje takich dwóch kawalerów i takie dwie damy, że każdy z tych dwóch kawalerów zatańczył z obiema tymi damami.*

Widać, że żadnego grafu w sformułowaniu zadania nie ma.

LXIX OM, etap 1, zadanie 12. *Zbiór A składa się z n liczb rzeczywistych. Dla podzbioru $X \subseteq A$ przez $S(X)$ oznaczamy sumę elementów zbioru X, przy czym $S(\varnothing) = 0$. Niech k będzie liczbą takich różnych liczb rzeczywistych x, że $x = S(X)$ dla pewnego $X \subseteq A$. Niech l będzie liczbą uporządkowanych par (X, Y) podzbiorów zbioru A spełniających równość $S(X) = S(Y)$. Dowieść, że $kl \leqslant 6^n$.*

Kolej na ostatnią OM.

LXX OM, etap 3, zadanie 3. *Na przyjęciu spotkało się $n \geqslant 3$ gości, wśród których niektórzy się znają. Okazało się, że na przyjęciu nie istnieje taka czwórka różnych gości a, b, c, d, że w parach $\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}$ goście się znają, ale w parach $\{a, c\}, \{b, d\}$ goście się nie znają.* Maksymalną kliką *na przyjęciu nazwiemy taki niepusty zbiór gości X (być może jednoelementowy), że goście z X się parami znają, ale nie istnieje gość spoza X znający wszystkich gości z X. Dowieść, że na przyjęciu jest co najwyżej $\frac{n(n-1)}{2}$ różnych maksymalnych klik. Uwaga: Jeśli gość a zna gościa b, to gość b zna gościa a.*

Tu o żadnych grafach przecież nikt nic nie mówi.

3. Uwagi końcowe

Myślę, że OM realizuje cele, dla których została stworzona. Jest najstarszą olimpiadą przedmiotową w Polsce. Jej organizatorzy, podobnie jak organizatorzy zdecydowanej większości olimpiad, walczą z różnego rodzaju trudnościami. Jedną z nich jest brak pieniędzy. Sprawdzanie zadań jest finansowo całkowicie nieopłacalne – można zarobić w tym samym czasie znacznie więcej, udzielając korepetycji. Praca w komisji zadaniowej jest w dużym stopniu niewynagradzana. Jeśli czyjeś zadanie zostaje wykorzystane w zawodach, to autor dostaje 200 zł brutto. Ale sprawdzanie poprawności rozwiązań, przygotowywanie się do dyskusji o zadaniach wymagające przecież samodzielnego ich rozwiązania, a przynajmniej próby nie jest opłacane. Osobom, które nie uczestniczą w pracach komisji, ale rozwiązują zadania przed kolejnymi etapami OM, co jest praktykowane od około dziesięciu lat, nie płacimy nic. Niby to jednorazowa praca i niezbyt długa, ale przecież praca. Zdaniem wielu osób jest konieczna.

Wiem o jednym nieprawdziwym twierdzeniu, które należało dowieść w czasie zawodów (XXV OM, finał, zadanie pierwsze – teza była prawdziwa jedynie w niektórych przypadkach). Wyżej wspomniałem o zadaniu konkursowym, którego rozwiązania nawet autor nie znał. Jedna doba dzieliła nas od podobnej wpadki w pierwszym stopniu LXXI OM – przewodniczący komisji zadaniowej w ostatniej chwili przed opublikowaniem zadań zauważył, że w pewnej nierówności do udowodnienia brakowało jedynki, a tematów zadań nie sprawdzono, bo były wakacje. Ogólnie jednak wszystko dokładnie, kilkakrotnie, sprawdzamy, bo chcemy, by OM dobrze działała – ale za to nikt nie płaci. Póki są ludzie (i to wielu), którzy robią to wszystko i wiele innych rzeczy bez pieniędzy, to OM jakoś działa. Jest jednak coraz trudniej. Młodzi ludzie wyjeżdżają na staże lub na dłużej za granicę. I bardzo dobrze, że okres, gdy było to niemożliwe lub bardzo trudne, skończył się. Jednak to oznacza, że jest ich mniej tutaj, więc w OM też. Angażowani są studenci, doktoranci. Musimy też pamiętać, że chodzi głównie o to, by w przyszłości byli oni tak dobrymi matematykami, jak to możliwe, a to oznacza, że nie można ich angażować bez ograniczeń. Piszę, bo nie wszyscy chcą o tym pamiętać. Czasem ktoś mówi, że przecież to dorośli ludzie.

Kilka razy przyszło nam szukać sponsorów, bo uważaliśmy, że trzeba wysłać uczniów na różne zawody międzynarodowe, a pieniędzy z dotacji nie wystarczało. Nie chodzi o wielkie kwoty, ale trudno oczekiwać od organizatorów OM, aby poza swą pracą dokładali jeszcze własne pieniądze. Ostatnio sytuacja nieco poprawiła się dzięki porozumieniu z PTM, w wyniku czego OM otrzymuje pieniądze z wpłat przekazywanych na nią w ramach przepisu pozwalającego przeznaczyć 1% podatku na organizację pożytku publicznego. Jednak autor tego artykułu jest przekonany o tym, że te wydatki powinny być finansowane z budżetu państwa. Być może za pięćdziesiąt lat znajdowanie sponsorów będzie prostsze. Myślę, że wydatki na rozwój zdolnych młodych ludzi powinny mieć pierwszeństwo przed wydatkami na propagandę, w tym zmiany nazw ulic, placów, a moim zdaniem tak nie jest. Z powodu braku pieniędzy musieliśmy zrezygnować z drukowania *Sprawozdań Komitetu Głównego* z kolejnych olimpiad. Główną częścią tych książeczek były zadania i ich rozwiązania. Publikujemy je teraz wyłącznie w internecie. Poprzednio były drukowane i rozsyłane bezpłatnie do szkół. Gdy byłem w liceum, nauczycieli laureatów i wyróżnionych w OM nagradzał minister – wiem o tym od swej nauczycielki z LO. Dyplomy wręczano zwykle w gmachu ministerstwa. Teraz minister nie przyznaje nauczycielom laureatów żadnych nagród, nawet tym z miejscowości, w których jest jedno liceum, albo dwa. Podobno to rola samorządów – to argumentacja ówczesnej szefowej MEN w 2008 roku. Szefostwo zmieniło się kilkakrotnie, ale pieniędzy na nagrody dla nauczycieli i inne wydatki związane z OM brakuje. Nie brakło ich na reformę systemu edukacji. Niektórzy wierzą, że ona coś poprawi. Podobnie jak poprzednie reformy. Ale jedyna rzecz pewna to zamieszanie, również z programami, a skutek tego jest zwykle jeden: średni i słabsi nauczyciele mają problemy z nauczaniem, więc ich uczniowie coraz mniej potrafią. Po pewnym czasie zrozumieją, albo zapamiętają, jak należy uczyć, ale wtedy ktoś znów znajdzie pieniądze na następną zmianę systemu... Zmieniać system edukacji czasem należy, to oczywiste. Jednak powinno to odbywać się wyłącznie wtedy, gdy jest to konieczne. Uzasadnienia różnych ludzi typu: „moje dzieci..." są zdecydowanie niewystarczające. Dobre przygotowanie zmian programów wymaga czasu, a tego zawsze jest za mało. W szczególności jest go za mało na porządne przygotowanie podręczników. Może więc jednak lepiej pieniądze wydać na zdolnych uczniów, rozszerzenie wiedzy nauczycieli, na zorganizowanie dla nich zajęć z matematyki (i innych przedmiotów). Wyniki nie pojawią się natychmiast. To może, a nawet musi potrwać kilka lat. Ciągłe zmiany nic nie dadzą.

Niedostatek pieniędzy nie jest jedynym problemem. Co jakiś czas ktoś z ministerstwa wymyśla coś nowego. Na przykład zbierane są dane, ilu uczestników i z ilu szkół z każdego powiatu uczestniczyło w olimpiadach. Musimy te dane dostarczać, choć w ogóle nie wiadomo, co ma z nich wynikać. Kiedyś mi odpowiedział dyrektor departamentu, że posłużą do *usuwania białych plam*. Jesteśmy proszeni o jakieś dane, które mają posłużyć komuś do czegoś, na przykład wyniki kilku krajów w zawodach międzynarodowych, bo ktoś ma je ochotę porównywać z naszymi. Zupełnie nie wiem, dlaczego urzędnicy nie znajdują tych danych dostępnych w internecie sami. OM nie ma biur, które mogą się tym zająć. Kilka lat temu urzędnik zajmujący się olimpiadami (wymysł minister Hall) usiłował ujednolicać regulaminy olimpiad. Potrafił pytać o to, co z uczniami, którzy będą chorzy w czasie zawodów. Po prostu wydawało mu się, że olimpiada (niekoniecznie matematyczna) to inna forma zdawania matury. Nie można tych żądań całkiem lekceważyć, bo to grozi obniżeniem dotacji w następnym rozdaniu. Zwalczyć udało się jedynie wstrzymywanie dotacji do czasu rozliczenia poprzedniej, choć nie istniała podstawa prawna do takich działań, a brak pieniędzy na początku roku powodował kłopoty z organizacją zawodów okręgowych oraz konieczność przekazywania kopii wszystkich rachunków do MEN-u (na przykład biletów uczestników za dojazd na zawody okręgowe lub finał), też oczywiście bez podstawy prawnej. Zrzędzę, ale ludzie w moim wieku często to robią, a poza tym chodzi mi o to, że urzędnikom MEN-u olimpiady są do niczego niepotrzebne w odróżnieniu od papierków. Pewne zrozumienie naszych problemów wykazuje podsekretarz stanu Maciej Kopeć, nauczyciel historii z XIII LO w Szczecinie i przyznać muszę, że pomógł w poszukiwaniu wsparcia finansowego. On te problemy rozumie, bo sam miał wielu uczniów, którzy startowali w olimpiadzie historycznej. Pojawił się też na zakończeniu LXIX OM oraz na zakończeniu odbytych ostatnio w Polsce Zawodów Państw Bałtyckich i nieco wcześniej – Środkowoeuropejskiej Olimpiady Matematycznej.

Z okazji sześćdziesięciolecia Olimpiady Matematycznej PTM stworzył *Archiwum OM*. To bardzo dobry pomysł. Można tam znajdować zadania i ich rozwiązania. Jednak zrobiono to nieco za szybko, w związku z czym pojawiły się tu i ówdzie błędy. Czasem głupie, na przykład zadanie piąte z finału XLV OM:

XLV OM, etap 3, zadanie 5. *Punkty $A_1, A_2, \ldots, A_8$ są wierzchołkami równoległościanu o środku O. Wykazać, że*

$$r \cdot \sum_{i=1}^{8} |OA_i|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{8} |OA_i| \right)^2 .$$

Otóż owo r to po prostu 4 i aby pojąć, co się stało, wystarczy popatrzeć na klawiaturę komputera. W wielu rozwiązaniach zadań geometrycznych są odsyłacze do rysunków, których nie skopiowano. W co najmniej jednym wypadku pojawił się rysunek do innego rozwiązania niż to, które skopiowano. Nie zmienia to tego, że to archiwum jest i będzie oglądane oraz że jego stworzenie zwłaszcza w dzisiejszych czasach, gdy już nie drukowane są książki z zadaniami z olimpiad, było bardzo dobrym pomysłem. Zostało rozsądnie zaprojektowane. W szczególności dostępne są różne opcje wyszukiwania zadań. Piszę, mając nadzieję na to, że jakoś uda się je poprawić, co zapewne wymaga pieniędzy. Być może nie jest to wielka praca, choć na pewno nie da się tego zrobić w ciągu pięciu minut. Potwierdza to też mało odkrywczą tezę sformułowaną wyżej, że każdy publikowany tekst wymaga porządnego sprawdzenia i że na to jest potrzebny czas. Nawet, jeśli solidne przygotowywanie różnych rzeczy, imprez jest niezgodne z tradycyjnym „jakoś to będzie". Dodam jeszcze, że moim zdaniem należałoby skopiować więcej rozwiązań. W *Sprawozdaniach Komitetu Głównego* wiele zadań zostało rozwiązanych kilkoma sposobami, więc warto je skopiować (na ogół wybierano jeden ze sposobów). Problemem na pewno nie jest miejsce na serwerze, te pliki nie są wcale duże. Natomiast uczniowie i nauczyciele często mogą się sporo dowiedzieć, poznając dwa lub więcej rozwiązań jednego zadania. Zdarza się przecież, że dopiero lektura innego rozwiązania uświadamia czytającemu trudności przewalczone w pierwszym. Dotyczy to zwłaszcza rozwiązań napisanych zręcznie i krótko, a takich jest sporo.

Michał Krych
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski
krych@mimuw.edu.pl

Wiad. Mat. 55 (2) 2019, 377–381

Andrzej Grzesik (Kraków)

Proste równokątne

Jedno z zadań finału LV Olimpiady Matematycznej w 2003 roku było następujące.

Zadanie. *Wyznaczyć największą liczbę takich prostych w przestrzeni, przechodzących przez ustalony punkt, że każde dwie przecinają się pod jednakowym kątem.*

Mimo że zadanie oznaczone było numerem 5, czyli przez Komitet Główny OM uznane zostało za łatwiejsze niż zadanie numer 6, na 114 uczestników finału tylko dwie osoby uzyskały za nie ocenę 6 punktów, a cztery – ocenę 5 punktów (maksymalna ocena to 6 punktów, a zadanie jest uznane za zrobione, gdy jest ocenione na co najmniej 5 punktów).

Proste występujące w tym zadaniu nazywamy *prostymi równokątnymi*. Problem wyznaczenia maksymalnego możliwego zbioru prostych równokątnych w wielowymiarowej przestrzeni wprowadzony został przez Haantjesa w pracy [7] już w 1948 roku i na przestrzeni ostatnich siedemdziesięciu lat był dość intesywnie rozważany, często z uwagi na istotne konsekwencje. Mimo długiej historii, najważniejsze wyniki ukazały się w ostatnim czasie.

Najpierw jednak przedstawmy oficjalne rozwiązanie zadania olimpijskiego. Weźmy n prostych równokątnych i niech O będzie ich punktem wspólnym, a $\alpha \leqslant 90^\circ$ kątem pomiędzy dowolnymi dwiema prostymi. Rozważmy sferę o środku w O i oznaczmy przez $A_1, A_2, \ldots, A_n$ takie punkty przecięcia kolejnych prostych ze sferą, że $|\sphericalangle A_1OA_i| = \alpha$ dla $i > 1$. Każdy z odcinków A_iA_j dla $i \neq j$ odpowiada kątowi α lub $180^\circ - \alpha$, więc odcinki te mają tylko co najwyżej dwie możliwe długości. Zauważmy, że wszystkie punkty $A_2, A_3, \ldots A_n$ leżą na okręgu o środku w A_1. Odcinki $A_2A_3, A_2A_4, \ldots, A_2A_n$ mają co najwyżej dwie możliwe długości, więc punkty $A_3, A_4, \ldots, A_n$ leżą na dwóch okręgach o środku w A_2. Każdy z tych okręgów może przecinać rozważany okrąg o środku w A_1 w co najwyżej dwóch punktach, co oznacza, że $n \leqslant 6$. Pozostaje wykazać, że możliwy jest układ sześciu prostych równokątnych. W tym celu wystarczy rozważyć dwudziestościan foremny i proste łączące naprzeciwległe wierzchołki. największą możliwą liczbą prostych równokątnych w przestrzeni trójwymiarowej jest zatem sześć.

Po rozwiązaniu takiego zadania matematykom nasuwa się pytanie, jak to wygląda w wyższych wymiarach. Wyznaczenie największej możliwej liczby prostych równokątnych w przestrzeni wymiaru d jest zadaniem trudnym i w ogólnym przypadku nierozwiązanym. Oznaczmy to maksimum przez $N(d)$. Wartości $N(d)$ dla początkowych kolejnych wymiarów przedstawione są w tabeli 1.

Tabela 1. Wartości największej możliwej liczby prostych równokątnych w $\mathbb{R}^d$

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$N(d)$	1	3	6	6	10	16	28	28	28	28	28	28	28

Znane ograniczenia dla wyższych wymiarów zebrane zostały w tabeli 2.

Tabela 2. Ograniczenia największej możliwej liczby prostych równokątnych w $\mathbb{R}^d$

d	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23–41
$N(d)$	28–29	36	40–41	48–50	48–61	72–76	90–96	126	176	276

Najlepsze znane uniwersalne ograniczenie górne przypisywane jest Gerzonowi i pochodzi z pracy [10] z 1973 roku.

Twierdzenie 1. *Dla każdego $d \geqslant 2$ zachodzi oszacowanie*

$$N(d) \leqslant \frac{d(d+1)}{2},$$

i jeśli zachodzi równość, to $d = 2, 3$ lub $d + 2$ jest kwadratem nieparzystej liczby całkowitej.

Równość w powyższym twierdzeniu zachodzi dla $d = 2, 3, 7$ oraz 23 i przez wiele lat uważano, że równość zachodzi zawsze, gdy $d + 2$ jest kwadratem liczby nieparzystej. Dopiero w 2002 roku Machnew w pracy [11] obalił tę hipotezę, udowodniając, że $N(47) < 24 \cdot 47$.

Zaskakujące jest, że przez wiele lat nie udawało się udowodnić, jaki jest rząd wielkości $N(d)$, a najlepsze dolne ograniczenia były rzędu $d^{3/2}$. Dopiero w 2000 roku de Caen w artykule [4] skonstruował zbiór $2(d+1)^2/9$ prostych równokątnych dla wymiaru d postaci $3 \cdot 2^{2t-1} - 1$ dla pewnego $t \in \mathbb{N}$. W kolejnych latach powstało wiele innych konstrukcji i ograniczeń górnych. Podsumowanie znanych wyników można znaleźć na przykład w artykule [3].

Zagadnienie prostych równokątnych nie dotyczy jedynie geometrii, ale ma też związki z wieloma innymi działami matematyki, m.in. przy konstrukcji tak zwanych kodów sferycznych czy w teorii projekcji minimalnych. Przybliżymy to drugie zagadnienie.

Dla dowolnej przestrzeni Banacha X i jej podprzestrzeni V *projekcją* nazywamy odwzorowanie liniowe i ciągłe z X w V, które jest stałe na V. Przyjmując jako $\lambda(V, \ell_\infty^N)$ najmniejszą możliwą normę projekcji z ℓ_∞^N w V, możemy zdefiniować

$$\lambda(d, N) := \max\left\{\lambda(V, \ell_\infty^N) : V \text{ jest przestrzenią wymiaru } d\right\}$$

oraz

$$\lambda(d) := \sup\left\{\lambda(d, N) : N \in \mathbb{N}\right\}.$$

Liczby $\lambda(d, N)$ nazywamy *absolutnymi stałymi projekcji*. Badanie projekcji minimalnych sięga badań Banacha (zob. [2]), a wyznaczenie absolutnych stałych projekcji dla ustalonych wymiarów d i N jest istotnym i często rozważanym zagadnieniem. Przykładowo, w 1960 roku Grünbaum w artykule [6] postawił hipotezę, że $\lambda(2) = 4/3$, która została wykazana dopiero w 2010 roku przez Chalmersa i Lewickiego w pracy [5]. Nie są znane wartości $\lambda(d)$ dla żadnego $d > 2$.

König, Lewis i Lin udowodnili w artykule [9] następujące twierdzenie łączące zagadnienia absolutnych stałych projekcji i prostych równokątnych.

Twierdzenie 2. *Dla dowolnych liczb naturalnych N i d spełniających nierówność $N \geqslant d$ zachodzi nierówność*

$$\lambda(d, N) \leqslant \frac{d + \sqrt{d(N-1)(N-d)}}{N}.$$

Co więcej, równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje N równokątnych prostych w $\mathbb{R}^d$.

W szczególności, z rozwiązania zadania olimpijskiego wynika nierówność

$$\lambda(3,6) \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Interesującym problemem, równocześnie istotnym z punktu widzenia zastosowań w tzw. kodach sferycznych, jest zagadnienie prostych równokątnych *przy ustalonym kącie*. Dla $x \in (0,1)$ przyjmijmy za $N_x(d)$ maksymalną możliwą liczbę takich prostych równokątnych w $\mathbb{R}^d$, że pomiędzy każdymi dwiema jest ustalony kąt $\arccos x$. Już w 1973 roku Lemmens i Seidel wykazali (zob. [10]), że dla odpowiednio dużego d zachodzi $N_{1/3}(d) = 2d - 2$. Neumann udowodnił (zob. [10]), że jeśli w $\mathbb{R}^d$ jest N prostych równokątnych z kątem $\arccos x$ i $N > 2d$, to $1/x$ musi być nieparzystą liczbą całkowitą.

Niezwykły przełom nastąpił w 2018 roku, gdy Balla, Dräxler, Keevash i Sudakov w pracy [1] rozwiązali problem prostych równokątnych przy ustalonym kącie, dowodząc poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 3. *Dla dowolnego $x \in (0,1)$ różnego od $1/3$ i odpowiednio dużego d zachodzi $N_x(d) < 1{,}93d$.*

W połączeniu z wcześniejszym wynikiem $N_{1/3}(d) = 2d - 2$ oznacza to, że asymptotycznie najwięcej prostych równokątnych jest, gdy kąt wynosi $\arccos \frac{1}{3} \approx 70{,}5°$. Niezwykły był też dowód powyższego twierdzenia, używający metod z teorii grafów (twierdzenia Ramseya i spektralnej teorii grafów).

Kilka miesięcy temu, na przełomie lipca i sierpnia 2019 roku, Jiang, Tidor, Yao, Zhang i Zhao ogłosili w pracy [8], że poprawili wynik Balli, Dräxlera, Keevasha i Sudakova. W poniższym twierdzeniu k to najmniejsza możliwa liczba wierzchołków w grafie, którego macierz sąsiedztwa ma promień spektralny równy $\frac{1-x}{2x}$. Jeśli taka liczba nie istnieje, to uznajemy, że $k = \infty$.

Twierdzenie 4. *Dla dowolnego $x \in (0,1)$, jeśli $k < \infty$, to*

$$N_x(d) = \left\lfloor \frac{k(d-1)}{k-1} \right\rfloor,$$

w przeciwnym przypadku $N_x(d) = d + o(d)$.

W szczególności, we wspomnianym wcześniej przypadku szczególnym, gdy $1/x$ jest liczbą nieparzystą, twierdzenie implikuje, że

$$N_{1/(2k-1)}(d) = \left\lfloor \frac{k(d-1)}{k-1} \right\rfloor$$

dla każdej liczby całkowitej $k \geqslant 2$ i odpowiednio dużego d. Dowód twierdzenia 4 również opiera się na metodach spektralnej teorii grafów.

Ciekawostką jest fakt, że dwóch spośród pięciu autorów twierdzenia 4 jest jeszcze na studiach – na drugim i trzecim roku studiów. Ponadto, w tej piątce jest trzech złotych medalistów Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej oraz trener kadry Chin. Tak więc problem prostych równokątnych znów znalazł się w rękach młodych ludzi związanych z olimpiadą matematyczną.

Bibliografia

[1] I. Balla, F. Dräxler, P. Keevash, B. Sudakov, *Equiangular lines and spherical codes in Euclidean space*, Invent. Math. 211 (2018), 179–212.

[2] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne, Warszawa 1932.

[3] A. Barg, W.-H. Yu, *New bounds for equiangular lines*, Contemp. Math. 625 (2014), 111–121.

[4] D. de Caen, *Large equiangular sets of lines in Euclidean space*, Electron. J. Combin. 7 (2000), #55.

[5] B. L. Chalmers, G. Lewicki, *A proof of the Grünbaum conjecture*, Studia Math. 200 (2010), 103–129.

[6] B. Grünbaum, *Projection constants*, Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), 451–465.

[7] J. Haantjes, *Equilateral point-sets in elliptic two- and three-dimensional spaces*, Nieuw Arch. Wisk. 22 (1948), 355–362.

[8] Z. Jiang, J. Tidor, Y. Yao, S. Zhang, Y. Zhao, *Equiangular lines with a fixed angle* (2019), dostępne pod adresem https://arxiv.org/abs/1907.12466.

[9] H. König, D. Lewis, P.-K. Lin, *Finite dimensional projection constants*, Studia Math. 3 (1983), 341–358.

[10] P. W. H. Lemmens, J. J. Seidel, *Equiangular Lines*, J. Algebra 24 (1973), 494–512.

[11] A. A. Makhnev, *On the nonexistence of strongly regular graphs with parameters (*486, 165, 36, 66*)*, Ukr. Math. J. 54 (2002), 1137–1146.

Andrzej Grzesik
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Jagielloński
Andrzej.Grzesik@uj.edu.pl

Rys. Maciej Denkowski (Instytut Matematyki UJ)

Wiad. Mat. 55 (2) 2019, 383–387

Bartłomiej Bzdęga (Poznań)

Zadania olimpijskie z drugim dnem

Jedną z podstawowych funkcji, jakie pełnią zadania, jest nauczanie matematyki. Uczeń próbujący rozwiązać zadanie – podobnie jak uczony pracujący nad problemem otwartym – poznaje lub tworzy narzędzia matematyczne, które pomagają w osiągnięciu celu. W odróżnieniu od otwartych problemów, zadania olimpijskie mają znane – przynajmniej członkom Komisji Zadaniowej – rozwiązania, więc korzystają one z narzędzi, które zostały już wcześniej wytworzone, często nawiązujących w jakiś sposób do osiągnięć uczonych z minionych lat. Bywa też tak, że zadanie jest szczególnym bądź uproszczonym przypadkiem pewnego otwartego problemu. W takich sytuacjach zadanie stanowi pretekst do tego, by oprócz poszerzenia swojego arsenału technik, nabyć nieco kultury matematycznej. W niniejszym artykule przedstawiam kilka takich zadań z Olimpiady Matematycznej.

LXVII OM, etap 1, zadanie 1.
Na tablicy napisano liczbę całkowitą dodatnią. W każdym kroku zmazujemy liczbę n napisaną na tablicy i piszemy nową liczbę. Jeśli liczba n jest parzysta, to piszemy na tablicy liczbę $\frac{n}{2}$. Jeśli liczba n jest nieparzysta, to wybieramy jedną z liczb $3n+1$, $3n-1$ i piszemy ją na tablicy. Czy – niezależnie od tego, jaką liczbę napisano na tablicy na początku – możemy, po skończenie wielu krokach, uzyskać na tablicy jedynkę?

Aby udowodnić, że uzyskanie jedynki zawsze jest możliwe, wystarczy wykazać, że dla każdego $n > 1$ można w skończonej liczbie kroków uzyskać liczbę mniejszą od n. Rozważamy przypadki $n = 2k$, $n = 4k + 1$ i $n = 4k - 1$ dla

k całkowitych dodatnich:

$$\begin{aligned} 2k &\to k, \\ 4k+1 &\to 12k+4 \to 6k+2 \to 3k+1, \\ 4k-1 &\to 12k-4 \to 6k-2 \to 3k-1. \end{aligned}$$

Interesujące i naturalne jest pytanie, co by się stało, gdyby użytkownika tablicy pozbawić możliwości dokonywania wyboru – czyli aby za każdym razem, gdy n jest nieparzyste, zastępować je liczbą, powiedzmy, $3n-1$. Wtedy odpowiedź nie jest twierdząca, gdyż wówczas mogą, choć nie muszą, pojawić się cykle:

$$5 \to 14 \to 7 \to 20 \to 10 \to 5 \to \dots$$

Można udowodnić, że jeśli liczba a występuje w cyklu o długości n, to $a < 2^n$ (LXVII OM, etap 1, zadanie 12). Pozostawiam to czytelnikowi.

Inaczej rzecz się przedstawia, jeśli rozważymy $3n+1$ zamiast $3n-1$. Wówczas otrzymamy słynny, nierozstrzygnięty jeszcze problem Colatza.

LXVIII OM, etap 1, zadanie 6.
W balu uczestniczyło 20 *kawalerów i* 20 *dam. W każdym z* 99 *tańców tańczyła dokładnie jedna para, za każdym razem inna. W każdej parze tańczyła dama z kawalerem. Dowieść, że istnieje takich dwóch kawalerów i takie dwie damy, że każdy z tych dwóch kawalerów zatańczył z obiema tymi damami.*

Nieco ogólniejsze i bardziej matematyczne sformułowanie tego problemu mogłoby brzmieć następująco: jaka jest największa liczba krawędzi grafu dwudzielnego o dwupodziale (n, n), który nie zawiera cyklu C_4? Jest to szczególny przypadek klasycznego problemu Zarankiewicza.

Niech A i B będą n-elementowymi zbiorami niezależnymi w tym grafie – czyli zbiorem dam i zbiorem kawalerów z zadania. Oznaczymy przez $d_1, \dots, d_n$ stopnie wierzchołków ze zbioru A. Wtedy i-ty wierzchołek sąsiaduje z $\binom{d_i}{2}$ parami wierzchołków zbioru B. Jeśli w tym grafie nie ma C_4, to

$$\binom{n}{2} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2} \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{k^2}{n} - k\right),$$

przy czym $k = d_1 + \dots + d_n$ to liczba krawędzi grafu. Jeżeli zatem zachodzi nierówność $k > \frac{n}{2}(\sqrt{4n-3}+1)$, to w grafie istnieje C_4. W szczególności dla $n = 20$ wystarcza już 98 krawędzi.

Powyższe zadanie jest bezpośrednio związane z otwartym zagadnieniem konstruowalności płaszczyzn rzutowych – biorąc graf Leviego płaszczyzny rzutowej rzędu m, otrzymamy graf dwudzielny bez C_4, w którym zbiory dwupodziału mają po $n = m^2 + m + 1$ wierzchołków, a liczba krawędzi wynosi $k = (m^2 + m + 1)(m + 1)$, co jest równe $\frac{n}{2}(\sqrt{4n-3}+1)$.

Sam problem można też wysłowić geometrycznie: ile można wziąć punktów o obu współrzędnych ze zbioru $\{1, \dots, n\}$, aby żadne cztery z nich nie były wierzchołkami prostokąta o bokach równoległych do osi układu współrzędnych? I jeszcze inaczej, w języku zbiorów: wyznaczyć największą możliwą wartość $\sum_{i=1}^{n} |A_i|$ dla $A_1, \dots, A_n \subseteq \{1, \dots, n\}$, przy czym $|A_i \cap A_j| \leqslant 1$, gdy $i \neq j$.

LXVIII OM, etap 1, zadanie 12.
Niech α będzie taką liczbą rzeczywistą, że $\operatorname{tg} \alpha\pi = \sqrt{2}$. Rozstrzygnąć, czy α może być liczbą wymierną.

Indukcyjnie dowodzimy, że $\operatorname{tg} n\alpha\pi$ istnieje oraz $\operatorname{tg} n\alpha\pi = \frac{p_n}{q_n}\sqrt{2}$ dla n całkowitych dodatnich, przy czym $p_1 = q_1 = 1$ oraz

$$p_{n+1} = p_n + q_n, \quad q_{n+1} = q_n - 2p_n.$$

Liczba q_n jest zatem zawsze nieparzysta oraz p_n jest tej samej parzystości co n. Przypuśćmy teraz, że $\alpha = \frac{M}{N}$ i jest to ułamek nieskracalny. Wówczas $\operatorname{tg} N\alpha\pi = 0$, z czego wynika, że $p_N = 0$, więc $N = 2k$ i $M = 2l + 1$ dla pewnych całkowitych dodatnich k i l. Jednak wtedy $\operatorname{tg} k\alpha\pi$ nie istnieje – sprzeczność.

Zadanie to daje znakomity pretekst do zapoznania się z pewnym materiałem z wyższej matematyki. Jeśli $\operatorname{tg} \alpha\pi = \sqrt{2}$, to liczba zespolona $z_0 = \cos \alpha\pi + i \sin \alpha\pi$ jest pierwiastkiem wielomianu $144z^4 - 72z^2 + 25$ nierozkładalnego nad $\mathbb{Z}$. Z drugiej strony, dla wymiernych α, liczba z_0 jest pierwiastkiem wielomianu $z^n - 1$ dla pewnego całkowitego dodatniego n, więc jest liczbą algebraiczną całkowitą – i mamy sprzeczność.

Inne rozwiązanie, które praktycznie nie wymaga wysiłku, korzysta z twierdzenia Nivena: jeśli r i $\cos r\pi$ są liczbami wymiernymi, to $\cos r\pi \in \left\{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\right\}$. Tu wystarczy zauważyć, że $\cos 2\alpha\pi = -\frac{1}{3}$.

LXVIII OM, etap 2, zadanie 3.
Dane są liczby rzeczywiste $x_1 \leqslant \dots \leqslant x_{2n-1}$, których średnia arytmetyczna jest równa A. Wykazać, że

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{2n-1} (x_i - A)^2 \geqslant \sum_{i=1}^{2n-1} (x_i - x_n)^2.$$

Nierówność, którą chcemy udowodnić, jest sumą nierówności

$$(2A - x_i - x_{n+i})^2 \geqslant 2(x_i - x_n)(x_{n+i} - x_n) \quad \text{dla } i = 1, \dots, n-1$$

oraz $2(x_n - A)^2 \geqslant (x_n - x_n)^2$.

To zadanie ma ciekawą interpretację probabilistyczną. Rozważmy zmienną losową X, która przyjmuje wartość x_i z prawdopodobieństwem $\frac{k_i}{n}$, przy czym k_i oznacza liczbę wystąpień liczby x_i w ciągu $(x_1, \ldots, x_{2n-1})$. Wówczas wartością oczekiwaną zmiennej losowej X jest $\mathrm{E}X = A$, a jej medianą jest $m = x_n$. Po obustronnym podzieleniu przez n nierówności z zadania otrzymamy

$$2\,\mathrm{Var}\,X \geqslant \mathrm{E}\left((m - X)^2\right) = (\mathrm{E}X - m)^2 + \mathrm{Var}\,X,$$

czyli $|\mathrm{E}X - m| \leqslant \sigma$ – mediana i wartość oczekiwana różnią się nie więcej niż o odchylenie standardowe.

Ten fakt nietrudno udowodnić dla dowolnego rozkładu o skończonej wariancji – wystarczy dwukrotnie zastosować nierówność Jensena:

$$|\mathrm{E}X - m| = |\mathrm{E}(X - m)| \leqslant \mathrm{E}|X - m| \leqslant \mathrm{E}|X - \mathrm{E}X| \leqslant \sqrt{\mathrm{E}\left(|X - EX|^2\right)} = \sigma.$$

LXIX OM, etap 1, zadanie 9.

Dana jest liczba całkowita $n > 3$. Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $x_1, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{1 + x_1^2}{x_2 + x_3} + \frac{1 + x_2^2}{x_3 + x_4} + \cdots + \frac{1 + x_{n-2}^2}{x_{n-1} + x_n} + \frac{1 + x_{n-1}^2}{x_n + x_1} + \frac{1 + x_n^2}{x_1 + x_2} \geqslant n.$$

Krótki dowód tej nierówności można otrzymać dzięki dwukrotnemu zastosowaniu nierówności Cauchy'ego–Schwarza w postaci Engela. Niech $S = x_1 + \cdots + x_n$ oraz $x_{n+i} = x_i$ dla i całkowitych. Dodając stronami nierówności

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1^2}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1} + x_{i+2})} = \frac{n^2}{2S},$$
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1} + x_{i+2})} = \frac{S^2}{2S},$$

otrzymamy

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1 + x_i^2}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geqslant \frac{n^2 + S^2}{2S} \geqslant n.$$

Rozwiązując to zadanie, warto wejść do pewnej – niestety ślepej – uliczki, choćby po to, by się czegoś dowiedzieć. Pierwszym odruchem przy dowodzeniu takich nierówności jest ich ujednorodnienie. Tutaj można to zrobić z wykorzystaniem nierówności $1 + x^2 \geqslant 2x$. Do udowodnienia pozostanie zatem nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geqslant \frac{n}{2}.$$

Jest to słynna nierówność Shapiro, która jest prawdziwa jedynie dla parzystych n mniejszych od 13 i nieparzystych n mniejszych od 24.

Na zakończenie jeszcze jedno zadanie z nierównością Shapiro w tle. Trzeba udowodnić, że dla dodatnich $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 3)$ zachodzi co najmniej jedna z nierówności

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geqslant \frac{n}{2}, \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i-1} + x_{i-2}} \geqslant \frac{n}{2},$$

przy czym przyjmujemy, że $x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$, $x_0 = x_n$, $x_{-1} = x_{n-1}$ (LIII OM, etap 3, zadanie 4). Pozostawiam je jako zadanie domowe.

Bartłomiej Bzdęga
nauczyciel wędrowny
exul@amu.edu.pl

Uczestnicy Zjazdu Stulecia PTM po ceremonii otwarcia (fot. Marek Welzel)

Wiad. Mat. 55 (2) 2019, 389–400

Krzysztof Ciesielski (Kraków)

Zadania olimpijskie niezwykłej urody

Jedna z czterech sesji specjalnych na Jubileuszowym Zjeździe Stulecia PTM (zob. [9]) zatytułowana była *Zadania olimpijskie niezwykłej urody*.

Liczni matematycy mieli związki z takimi konkursami, jak Olimpiada Matematyczna, Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna, inne międzynarodowe konkursy matematyczne dla uczniów oraz zawody matematyczne dla studentów matematyki. Tak uczestnicy zawodów, jak i inni zainteresowani tą tematyką matematycy stykali się z zadaniami, które uznawali za szczególnie atrakcyjne – związane z pomysłowymi, oryginalnymi, zaskakującymi, ale nie przesadnie długimi rozwiązaniami. Zdarzało się, że już sam temat zadania mógł okazać się fascynujący. Problemy tego rodzaju budzą zainteresowanie także tych matematyków, którzy z konkursami nie byli nigdy w żaden sposób związani. Takim właśnie zadaniom poświęcona była ta sesja.

Dziewięcioro z jedenastki prelegentów przedstawiło po jednym, bardzo ciekawym zadaniu. Sesję uświetnił wykład laureata Nagrody Głównej PTM im. S. Dicksteina za 2018 rok, Michała Krycha, który zaprezentował dwa zadania. Uczestnicy Zjazdu otrzymali w materiałach konferencyjnych treści wszystkich zadań, by chętni mogli nad nimi pomyśleć przed wysłuchaniem referatów. Pierwsze wystąpienie, przygotowane przez Danutę Ciesielską i Małgorzatę Terepetę, poświęcone było Stefanowi Straszewiczowi. W referacie wygłoszonym przez drugą autorkę zostały podane ważne informacje biograficzne oraz przedstawiona rola Straszewicza jako twórcy i wieloletniego organizatora Olimpiady Matematycznej, a jednocześnie pierwszego przewodniczącego Komitetu Głównego Olimpiady.

Poza Michałem Krychem zadania oraz ich rozwiązania zaprezentowali Dominik Burek, Bartłomiej Bzdęga, Andrzej Grzesik, Barbara Roszkowska-

-Lech, Ryszard Rudnicki, Grzegorz Świątek (obecny przewodniczący Komitetu Głównego Olimpiady Matematycznej), Edward Tutaj, Jakub Węgrecki i Michał Wojciechowski. Ponadto podczas dyskusji pojawiło się – przedstawione przez Krzysztofa Oleszkiewicza – jeszcze jedno zadanie niezwykłej urody.

Sesja wzbudziła duże zainteresowanie. Mimo odbywających się równolegle aż dwudziestu jeden sesji naukowych, promocji książki *X, Y, Z. Prawdziwa historia złamania szyfru Enigmy* z udziałem jej autora, Dermota Turinga, zorganizowanej w ramach sesji specjalnej *Pogromcy Enigmy* oraz panelu dyskusyjnego *O kształceniu nauczycieli oraz kluczowych problemach nauczania matematyki*, na sali zawsze było około 40–50 osób. Niektórzy uczestniczyli w całej sesji, inni wysłuchali wybranych referatów. Wśród słuchaczy byli przedstawiciele wszystkich pokoleń – od uczniów liceum do emerytów. Obok autorów znaczących wyników, profesorów nauk matematycznych, członków PAN, przybyli matematycy znacznie młodsi, w tym studenci, a także nauczyciele matematyki.

Poniżej podane są przedstawione 5 września 2019 roku zadania oraz szkice rozwiązań opracowane przez osoby, które je na sesji zaprezentowały. Od organizatora sesji dołączone zostaje jeszcze jedno zadanie podobnego charakteru. By umożliwić chętnym czytelnikom ewentualne samodzielne rozwiązywanie, najpierw podane są wszystkie teksty zadań.

Zadania

Zadanie 1 (Ryszard Rudnicki)**.** Dowieść, że jeżeli w wielościan wypukły można wpisać kulę i każdą ścianę tego wielościanu można tak pomalować na jeden z dwóch kolorów, że każde dwie ściany mające wspólną krawędź są różnych kolorów, to suma pól ścian jednego koloru jest równa sumie pól ścian drugiego koloru.

Zadanie 2 (Michał Wojciechowski)**.** Baron Münchhausen twierdzi, że w jego magicznym lesie rosną sosny i brzozy. W odległości równej jednemu kilometrowi od każdej sosny rośnie dokładnie dziesięć brzóz. W lesie jest więcej sosen niż brzóz. Czy baron Münchhausen może mówić prawdę?

Zadanie 3 (Edward Tutaj)**.** Ciąg $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ dany jest wzorem rekurencyjnym: $x_{n+3} = x_n + x_{n+1} \cdot x_{n+2}$ oraz warunkami początkowymi: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Wykazać, że w tym ciągu występuje wielokrotność każdej liczby naturalnej.

Zadanie 4 (Barbara Roszkowska-Lech)**.** Niech a i b będą takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że liczba $a^2 + b^2$ jest podzielna przez $ab + 1$. Udowodnić, że $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 5 (Jakub Węgrecki)**.** Każdą dodatnią liczbę całkowitą pomalowano na jeden z k kolorów. Wykazać, że istnieją cztery parami różne dodatnie liczby całkowite a, b, c, d jednego koloru spełniające następujące warunki:

$$ad = bc, \quad \frac{c}{a} = 2019^n, \quad \frac{b}{a} = 2020^m$$

dla pewnych dodatnich liczb całkowitych m, n.

Zadanie 6 (Michał Krych)**.** Udowodnić, że jeśli liczby całkowite a, b spełniają równanie $2a^2 + a = 3b^2 + b$, to liczby $a - b$ i $2a + 2b + 1$ są kwadratami liczb całkowitych.

Zadanie 7 (Michał Krych)**.** Na krawędziach czworościanu $A_1A_2A_3A_4$ wybrano sześć punktów, po jednym na każdej krawędzi. Przez każdy wierzchołek czworościanu i te trzy punkty z obranych punktów, które leżą na krawędziach z niego wychodzących, poprowadzono sferę. Dowieść, że cztery tak powstałe sfery mają punkt wspólny.

Zadanie 8 (Bartłomiej Bzdęga)**.** W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ zachodzą następujące równości:

$$|AB| = |BC| = |CD|, \quad |AE| = |EB| = |BD|, \quad |AC| = |CE| = |ED|.$$

Wyznaczyć miary kątów tego pięciokąta.

Zadanie 9 (Dominik Burek)**.** Liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniają nierówności

$$1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < 2a_1.$$

Udowodnić, że jeśli m jest liczbą różnych dzielników pierwszych iloczynu $a_1a_2 \ldots a_n$, to

$$(a_1a_2 \ldots a_n)^{m-1} \geqslant (n!)^m.$$

Zadanie 10 (Andrzej Grzesik)**.** Wyznaczyć największą liczbę takich prostych w przestrzeni, przechodzących przez ustalony punkt, że każde dwie przecinają się pod jednakowym kątem.

Zadanie 11 (Grzegorz Świątek)**.** Wewnątrz obszaru na płaszczyźnie ograniczonego przez dodatnią część osi odciętych i parabolę, tj. $\{(x, y) : 0 < x, 0 < y < x^2\}$ porusza się swobodnie punkt materialny, odbijając się od brzegu według zasady, że kąt padania na styczną w punkcie odbicia jest równy kątowi odbicia. Wykazać, że bez względu na początkowy kierunek i położenie punkt odbije się tylko skończenie wiele razy.

Zadanie 12 (Krzysztof Oleszkiewicz)**.** Niech r będzie liczbą naturalną. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_r$ spełniona jest nierówność

$$\sum_{m=1}^{r}\left(\sum_{n=1}^{r}\frac{a_m a_n}{m+n}\right) \geqslant 0.$$

Rozstrzygnąć, dla jakich liczb $a_1, a_2, \ldots, a_r$ nierówność ta staje się równością.

Zadanie 13 (Krzysztof Ciesielski)**.** Na płaszczyźnie umieszczono sześć punktów w ten sposób, że każde trzy spośród nich są wierzchołkami trójkąta o bokach różnej długości. Udowodnić, że najkrótszy bok pewnego z tych trójkątów jest zarazem najdłuższym bokiem innego z nich.

Szkice rozwiązań

Zadanie 1. Na każdej ścianie połączmy punkt styczności kuli z tą ścianą ze wszystkimi wierzchołkami należącymi do tej ściany; powstaną trójkąty o wspólnym wierzchołku. Dwa trójkąty położone na różnych ścianach wielościanu, których wspólnym bokiem jest krawędź wielościanu, są pomalowane różnymi kolorami. Rozważmy taką parę trójkątów ABM i ABN o wspólnej podstawie AB. Płaszczyzna przechodząca przez środek kuli i punkty styczności jest prostopadła do płaszczyzn zawierających te trójkąty, jest więc prostopadła do prostej AB. Niech C będzie punktem przecięcia tej płaszczyzny i prostej AB. Z twierdzenia o odcinkach stycznych i określenia punktu C wynika, że odcinki CP i CQ są równe i są wysokościami trójkątów ABM i ABN, wobec czego te trójkąty mają równe pola.

Wszystkie ściany wielościanu zostały przedstawione w postaci sum trójkątów, przy czym trójkąty te można połączyć w pary; w każdej parze są trójkąty o równych polach pomalowane różnymi kolorami, a stąd wynika równość sum pól odpowiednich ścian. □

Zadanie 2. Zauważmy, że $65^2 + 0^2 = 65^2$, $39^2 + 52^2 = 65^2$ oraz $25^2 + 60^2 = 65^2$ i oczywiście także $(\pm 65)^2 + 0^2 = 65^2$, $(\pm 39)^2 + (\pm 52)^2 = 65^2$ oraz $(\pm 25)^2 + (\pm 60)^2 = 65^2$. Z tych związków wynika, że na każdym okręgu o promieniu 65 i o środku w punkcie $(2k+1, 2n)$, przy czym k i n są liczbami całkowitymi, leży dokładnie dziesięć punktów o obu współrzędnych całkowitych. Analogiczny fakt zachodzi dla okręgów o środkach w punktach $(2n, 2k+1)$.

Jeśli posadzimy brzozy w punktach $(2k+1, 2n)$ i $(2n, 2k+1)$ dla $k = 1, 2, \ldots, N$, $n = 0, 1, \ldots, N+1$, a sosny w punktach $(2k, 2m)$, przy czym $-4 \leqslant k \leqslant N+4$, $-4 \leqslant m \leqslant N+4$, to dla odpowiednio dużych N powstanie (po odpowiednim przeskalowaniu) magiczny las. □

Zadanie 3. Ustalmy $p \in \mathbb{N}$. Chcemy wykazać, że istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że p dzieli x_n. Dla $p = 1$ twierdzenie jest oczywiste. Możemy więc założyć, że $p > 1$. Niech r_n będzie resztą z dzielenia x_n przez p. Innymi słowy, $r_n \equiv x_n \pmod{p}$ i $0 \leqslant r_n < p$. Z własności kongruencji wynika, że ciąg $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia równanie $r_{n+3} = r_n + r_{n+1} \cdot r_{n+2}$ (w tym równaniu dodawanie rozumiemy jako dodawanie w zbiorze reszt) oraz, wobec nierówności $p > 1$, warunek $r_1 = r_2 = r_3 = 1$. Naszym celem jest teraz udowodnienie, iż istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $r_n = 0$.

Ze wzoru $r_n = r_{n+3} - r_{n+1} \cdot r_{n+2}$ wynika, że ciąg $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ daje się jednoznacznie przedłużyć z $\mathbb{N}$ na $\mathbb{Z}$. Ponadto, wykorzystując zasadę szufladkową Dirichleta, zauważamy, że ciąg $(r_n)_{-\infty}^{+\infty}$ jest okresowy. Istotnie, jeżeli znamy trzy kolejne wyrazy r_s, r_{s+1}, r_{s+2} tego ciągu, to potrafimy jednoznacznie wyznaczyć pozostałe wyrazy. Ale zbiór trójek (u_1, u_2, u_3), dla których $0 \leqslant u_i < p$ jest skończony, a trójek postaci $T_s = (r_s, r_{s+1}, r_{s+2})$ jest nieskończenie wiele, więc istnieją takie $k, l \in \mathbb{N}$, że $T_k = T_l$. Dla zakończenia dowodu wystarczy zaobserwować, że $r_0 = 0$.

Rozważana w tym zadaniu własność ciągów zadawanych specjalnego typu równaniami rekurencyjnymi została prawdopodobnie zaobserwowana po raz pierwszy dla ciągu Fibonacciego. □

Zadanie 4. Rozważmy równanie dwóch zmiennych $x^2+y^2 = k(xy+1)$. Jeśli para (x, y) jest rozwiązaniem tego równania, to jest nim również para (y, x). Niech teraz x będzie najmniejszą dodatnią liczbą całkowitą, dla której istnieje rozwiązanie całkowite y równania $x^2 + y^2 = k(xy + 1)$. Oczywiście $x \leqslant y$. Powyższe równanie możemy zapisać w postaci równania kwadratowego z niewiadomą t

$$t^2 - kxt + x^2 - k = 0.$$

Niech z będzie drugim całkowitym pierwiastkiem tego równania (pierwszym jest y). Rozważmy dwa przypadki:

(i) $z > 0$. Ze związków $yz = x^2 - k$ oraz $x \leqslant y$ wynika, że $xz \leqslant yz = x^2 - k < x^2$, czyli $z < x$. Uzyskaliśmy sprzeczność.

(ii) $z \leqslant 0$. Wtedy, korzystając z wzorów Viète'a ($yz = x^2 - k$, $y + z = kx$), otrzymujemy

$$(y+1)(z+1) = x^2 - k + kx + 1 = x^2 + (x-1)k + 1 \geqslant 1.$$

Jeżeli liczby całkowite y, z spełniają warunki $z \leqslant 0 < y$, to nierówność $(y+1)(z+1) \geqslant 1$ implikuje, że $z = 0$. Oznacza to, że $x^2 - k = 0$, czyli k jest kwadratem liczby całkowitej, co kończy dowód.

Zauważmy, że takie liczby całkowite a i b, że liczba $k = \frac{a^2+b^2}{ab+1}$ jest całkowita, istnieją. Dla dowolnej liczby całkowitej a wystarczy przyjąć $b = a^3$ i wówczas $k = a^2$.

Jeśli para (a, b) dla $a < b$ spełnia warunki zadania, to spełnia je też para $(kb - a, b)$. Po uwzględnieniu symetrii możemy w ten sposób konstruować nieskończony ciąg par spełniających warunki zadania. $\square$

Zadanie 5. Przywołajmy najpierw inne powszechnie znane zadanie. *Rozpatrzmy układ współrzędnych, w którym każdy punkt kratowy o obu współrzędnych dodatnich pomalowano na jeden z k kolorów. Wówczas istnieje prostokąt o wierzchołkach tego samego koloru i bokach równoległych do osi układu.*

Załóżmy, że mamy pewne kolorowanie dodatnich liczb całkowitych na k kolorów. Rozpatrzmy układ współrzędnych, w którym każdy punkt kratowy o współrzędnych dodatnich (x, y) ma taki sam kolor, jak liczba $2019^x \cdot 2020^y$.

Na mocy wspomnianego zadania istnieje prostokąt o wierzchołkach jednokolorowych. Niech $(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_2)$ będą jego wierzchołkami. Wówczas liczby: $a = 2019^{x_1} \cdot 2020^{y_1}$, $c = 2019^{x_2} \cdot 2020^{y_1}$, $b = 2019^{x_1} \cdot 2020^{y_2}$, $d = 2019^{x_2} \cdot 2020^{y_2}$ spełniają warunki zadania. $\square$

Zadanie 6. Z założenia wynika, że $b^2 = 2a^2 + a - 2b^2 - b = (a - b)(2a + 2b + 1)$. Gdyby liczba pierwsza p dzieliła liczby $a - b$ oraz $2a + 2b + 1$, to dzieliłaby też liczbę b^2, więc dzieliłaby b oraz liczbę $\big(2a+2b+1-2(a-b)\big)-4b = 4b+1-4b = 1$, a to jest niemożliwe. Stąd i z równości $b^2 = (a-b)(2a+2b+1)$ wynika, że każdy czynnik pierwszy liczby $a - b$ pojawia się w jej rozkładzie na czynniki pierwsze tyle samo razy, ile w rozkładzie liczby b^2 na czynniki pierwsze, więc w parzystej potędze. To samo można powiedzieć o czynnikach pierwszych liczby $2a + 2b + 1$. Skończyliśmy dowód?

Ależ skąd! I właśnie na tym polega uroda tego zadania. Trzeba jeszcze dowieść, że $a - b$ jest nieujemna! Koniecznie należy skorzystać z tego, że liczby a i b są całkowite, bo bez trudu można znaleźć liczby rzeczywiste a, b, dla których $a < b$ i spełniona jest równość $2a^2 + a = 3b^2 + b$, np. $b = 1$, $a = -\frac{1}{4}(1 + \sqrt{33})$. Można to zrobić analizując podzielność, ale tego już tu nie zrobimy.

Można pytać o liczbę rozwiązań w liczbach całkowitych tego równania. Jest ich nieskończenie wiele. Dowód można sprowadzić do równania Pella. $\square$

Zadanie 7. To zadanie pochodzi z zawodów finałowych Olimpiady Matematycznej. Na zawodach drugiego stopnia tej samej olimpiady pojawiło się analogiczne zadanie dla trójkąta na płaszczyźnie:

Na bokach AB, BC, CA trójkąta ABC obrano odpowiednio punkty P, M, N, różne od wierzchołków trójkąta. Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach ANP, BPM, CMN mają punkt wspólny.

Ta dwuwymiarowa wersja zadania finałowego nie jest trudna, jednak konieczne jest rozważenie wielu konfiguracji, co wielu uczestnikom zawodów sprawiło spore kłopoty.

Zadanie przestrzenne sprowadza się łatwo do zadania płaskiego. Pominiemy przypadki szczególne. Przyjmijmy, że punkty wybrane na krawędziach czworościanu nie są jego wierzchołkami oraz każde dwie rozpatrywane sfery przecinają się wzdłuż pewnego okręgu. Niech B_{ik} oznacza punkt wybrany na krawędzi A_iA_k $(i, k \in \{1, 2, 3, 4\},\ i < k)$, S_i zaś sferę przechodzącą przez A_i i punkty B_{ij} lub B_{ji}, $j \in \{1, 2, 3, 4\},\ i \neq j$. Niech C_i będzie punktem wspólnym płaszczyzny $A_jA_kA_\ell$ $(\{j, k, \ell\} = \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{i\})$ i sfer S_j, S_k, S_ℓ – istnienie C_i wynika z twierdzenia dla trójkąta. Teraz rzutujemy stereograficznie sferę S_1 z punktu A_1 na płaszczyznę, która nie zawiera punktu A_1. Okręgi – części wspólne płaszczyzn $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$ i $A_1A_4A_2$ zostają przekształcone na proste, a okręgi $S_1 \cap S_i$ na okręgi, co pozwala na sprowadzenie dowodzonej tezy do przypadku płaskiego. □

Zadanie 8. Równości podane w temacie zadania zachodzą, gdy A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami dwunastokąta foremnego o środku E.

Przyjmijmy oznaczenia: $x = |AB|$, $y = |AE|$, $z = |AC|$ oraz $\varphi = |\sphericalangle BAC|$, $\psi = |\sphericalangle CAE|$. Z równości $\cos(\varphi + \psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi$ otrzymamy po przekształceniach $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} = 5$, analogicznie $\frac{x^2}{z^2} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = 5$. Te równości prowadzą do wniosku, że pewne dwie z liczb x, y, z są równe, a dzięki założeniu o wypukłości pięciokąta mamy $y = z$. Dalszą część rozwiązania stanowią proste rachunki na kątach.

Inny sposób rozwiązania pokazał niedawno autorowi zadania Tomasz Cieśla. Na zewnątrz danego pięciokąta budujemy trójkąty ABF i CDG, przystające do trójkąta BCE. Wówczas trójkąty równoramienne ABC i EAF są podobne, analogicznie trójkąty BCD i EDG. Z odpowiednich proporcji otrzymujemy $|EF| = |EG|$, więc trójkąty EBF i GCE są przystające. Reszta ponownie pozostaje kwestią rachunku na kątach[1]. □

Zadanie 9. Liczby a_i można przedstawić w postaci $a_i = p^{k_i} \cdot b_i$, przy czym p nie dzieli b_i dla dowolnego dzielnika pierwszego p liczby $a_1a_2\ldots a_n$. Wówczas

[1] Redakcja z żalem zauważa, że matematycy zazwyczaj częściej rachują na kątach niż na kontach.

z warunku $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < 2a_1$ dostajemy, że b_i są parami różne. Istotnie, jeśli $b_i = b_j$ dla pewnych $i < j$, to

$$\frac{a_j}{a_i} = \frac{p^{k_j} \cdot b_i}{p^{k_i} \cdot b_i} = p^{k_j - k_i} \geqslant 2,$$

co jest niemożliwe. Wobec tego

$$b_1 b_2 \dots b_n \geqslant n!.$$

Po przemnożeniu powyższych nierówności dla każdej liczby pierwszej p, która dzieli iloczyn $a_1 a_2 \dots a_n$, dostajemy tezę. □

Zadanie 10. Załóżmy, że jedna z prostych jest pionowa oraz rozważmy sferę o środku w punkcie przecięcia prostych i dowolnym promieniu. Skoro pozostałe proste leżą pod tym samym kątem do prostej pionowej, muszą przecinać rozważaną sferę na pewnych dwóch równoleżnikowych okręgach antypodycznych. Skupiając teraz uwagę na dowolnej innej prostej, zauważamy, że punkty przecięcia ze sferą prostych leżących do niej pod tym samym kątem też muszą leżeć na takich okręgach. Dwie pary okręgów antypodycznych mogą przecinać się tylko w czterech parach punktów antypodycznych, co oznacza, że poza dwiema rozważanymi prostymi mogą istnieć jeszcze tylko co najwyżej cztery inne spełniające warunki zadania. Daje nam to ograniczenie górne – sześć prostych równokątnych. Aby zobaczyć, że to ograniczenie jest osiągane, wystarczy rozważyć dwudziestościan foremny i połączyć jego sześć par wierzchołków antypodycznych. □

Zadanie 11. Wystarczy rozważyć dodatnią półtrajektorię poruszającego się punktu, gdyż w rozważaniach można odwrócić kierunek ruchu.

Obszar nad parabolą jest wypukły, więc punkt odbija się na przemian od półosi odciętych i od paraboli. Oznaczmy przez (x_n) odcięte punktów odbicia na paraboli ponumerowane w kolejności, w której występują; przez $(\hat{x}_n)$ oznaczmy, na takiej samej zasadzie, odcięte punktów odbicia od osi OX. Bez straty ogólności możemy opisać ruch jako $\hat{x}_1 \to x_1 \to \hat{x}_2 \to \cdots$. Niech α_n oznacza miarę kąta $x_n \hat{x}_n 0$. Zauważmy, że $x_n \geqslant \hat{x}_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha_n \geqslant \frac{\pi}{2}$.

Z nierówności

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_{n+1}}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha_n}{2} > 2x_n \tag{1}$$

wynika, że (α_n) jest ciągiem rosnącym. Gdyby dla pewnego n zachodziła nierówność $\alpha_n \geqslant \frac{\pi}{2}$, to od tego n ciąg (x_n) byłby silne rosnący, (α_n) zmierzałby do π, czyli po skończenie wielu krokach przestałby się odbijać od paraboli. Jeśli zatem trajektoria ma się odbijać od brzegu nieskończenie wiele razy, to $\alpha_n < \frac{\pi}{2}$ dla wszystkich n i ciągi (x_n) oraz $(\hat{x}_n)$ są silnie rosnące.

Zauważmy też, że

$$\text{jeśli} \quad C = \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha_1} > 0 \text{ i } x_n > x_{n+1}, \quad \text{to} \quad x_n - x_{n+1} < \frac{2x_n^2}{\operatorname{tg} \alpha_{n+1}} \leqslant Cx_n^2. \tag{2}$$

Przypuśćmy, że teza nie zachodzi. Wówczas albo otrzymamy silnie rosnący ciąg (x_n) dążący do 0, albo – zgodnie z nierównością (1) – ciąg (α_n) dążący do $+\infty$.

Kluczowa dla dalszych rozważań jest obserwacja, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \infty. \tag{3}$$

Gdyby tak nie było, to dla odpowiednio dużych N otrzymalibyśmy

$$1 > \sum_{n=N}^{\infty} \left(1 - \frac{x_n}{x_{n+1}}\right) > \sum_{n=N}^{\infty} \frac{x_n}{x_N} \left(1 - \frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = x_N \sum_{n=N}^{\infty} (x_n - x_{n+1}) = \frac{x_N}{x_N} = 1.$$

Ze związków (2) i (3) wnioskujemy, że $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \infty$, z kolei z nierówności (1) wynika, że ciąg $(\operatorname{tg} \frac{\alpha_n}{2})$ zmierza do $+\infty$ i (α_n) zmierza do π, a stąd otrzymujemy tezę.

Interesujące jest pytanie, czy teza twierdzenia zachodzi, jeśli będziemy rozważać obszar U ograniczony od góry nie przez połowę paraboli, a przez wykres dowolnej gładkiej funkcji wypukłej o wartościach dodatnich dla $x > 0$ i przyjmującej wartość 0 dla $x = 0$. □

Zadanie 12. Rozważmy funkcje wielomianowe określone wzorami $P(x) = a_1 + \sum_{m=2}^{r} a_m x^{m-1}$ i $Q(x) = \sum_{m=1}^{r} \left(\sum_{n=1}^{r} \frac{a_m a_n}{m+n} x^{m+n}\right)$. Zauważmy, że $Q'(x) = xP(x)^2$, skąd $Q'(x) \geqslant 0$ dla $x \in [0,1]$. Funkcja Q jest zatem rosnąca na przedziale $[0,1]$ i

$$0 = Q(0) \leqslant Q(1) = \sum_{m=1}^{r} \left(\sum_{n=1}^{r} \frac{a_m a_n}{m+n}\right),$$

co kończy dowód nierówności z tematu zadania.

Nierówność ta stanowi elementarną wersję znanego faktu z dziedziny analizy funkcjonalnej i harmonicznej – transformata Hilberta jest operatorem dodatnio półokreślonym na przestrzeni ciągów sumowalnych z kwadratem.

Jeśli zachodzi równość, to dla $x \in [0,1]$ mamy $0 = Q(0) \leqslant Q(x) \leqslant Q(1) = 0$, czyli $Q \equiv 0$ na $[0,1]$. Stąd $Q' \equiv 0$ na $[0,1]$, toteż $P \equiv 0$ na $(0,1]$. Gdyby P był wielomianem stopnia dodatniego, miałby co najwyżej skończenie wiele rzeczywistych miejsc zerowych. Wielomian P musi więc być zerowy: $a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 0$. Oczywiście dla ciągu zerowego zachodzi równość. □

Zadanie 13. Zacznijmy od innego zadania.

Na płaszczyźnie obrano sześć punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Każdy z odcinków łączący parę tych punktów pomalowano albo na czerwono, albo na niebiesko. Dowieść, że któreś trzy z danych punktów są wierzchołkami trójkąta o bokach jednego koloru.

By to wykazać, wybierzmy jeden z sześciu danych punktów, oznaczmy go przez A; jest on końcem pięciu rozważanych odcinków. Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że przynajmniej trzy z nich są tego samego koloru. Przyjmijmy, że są to odcinki AB, AC i AD i że są czerwone. Jeśli któryś z odcinków BC, CD i BD jest czerwony, to mamy trójkąt o bokach czerwonych; jeśli wszystkie są zielone, to trójkąt BCD ma boki zielone.

Przejdźmy teraz do zadania wyjściowego.

Pomalujmy kolorem czerwonym wszystkie odcinki, dla których istnieje trójkąt o wierzchołkach w zadanych punktach, w którym ten odcinek jest najkrótszym bokiem. Pozostałe odcinki pomalujmy na zielono.

Z poprzedniego zadania wynika, że istnieje trójkąt o bokach pomalowanych tym samym kolorem. Nie może to być trójkąt zielony, bo w każdym trójkącie któryś bok jest najkrótszy. Jest to zatem trójkąt czerwony – jego najdłuższy bok jest jednocześnie najkrótszym bokiem innego trójkąta. □

Źródła

Zadanie 1 pochodzi z drugiego dnia zawodów II stopnia XXVI Olimpiady Matematycznej (zob. [3]). Autorem zadania 2 jest Fiodor Nazarow, a pochodzi ono z finału 54 Leningradzkiej Olimpiady Matematycznej w 1988 roku. Zadanie 3 zarekomendował wiele lat temu Edwardowi Tutajowi, jako bardzo atrakcyjne zadanie olimpijskie, Andrzej Mąkowski[2]. Zadanie 4 pochodzi z XXIX

[2] Andrzej Mąkowski (1937–2007) był legendarną postacią zarówno w historii Olimpiady Matematycznej, jak i w polskim środowisku matematycznym. Laureat IV Olimpiady Matematycznej, wkrótce po ukończeniu studiów matematycznych na UW wszedł w skład Komitetu Głównego Olimpiady Matematycznej (od XI OM), którego członkiem był aż do śmierci, do LVIII OM. Od 2007 roku Komitet Główny przyznaje nagrodę jego imienia za najlepiej zredagowane na finale rozwiązanie zadania. Mąkowski był też, między innymi, członkiem Komitetu Redakcyjnego miesięcznika *Delta* (od powstania czasopisma w 1974 roku do śmierci) oraz od 1962 roku członkiem Komitetu Redakcyjnego *Wiadomości Matematycznych*, przy czym w latach 1965–1974 pełnił funkcję sekretarza redakcji, a w latach 1975–1979 i od 1995 roku do śmierci funkcję zastępcy redaktora.

Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej (zob. [5]). Z zadaniem 5 zapoznał Jakuba Węgreckiego w jego czasach szkolnych Marcin Radwański, przy czym dane liczbowe prezentowanego na sesji zadania zostały, zgodnie z tradycją olimpijską, uaktualnione do dat bieżących. Zadania 6 i 7 pochodzą z finału XVI Olimpiady Matematycznej (zob. [1]), przy czym zadanie 7 było ostatnim zadaniem drugiego dnia zawodów i rozwiązał je tylko jeden uczestnik. Autorem zadania 8 jest prezentujący je na sesji Bartłomiej Bzdęga, zadanie pojawiło się na VII Wielkopolskiej Lidze Matematycznej. Również w przypadku zadania 9 prezentował je na sesji autor, Dominik Burek; było ono jednym z sześciu zadań finału LXVIII Olimpiady Matematycznej w 2017 roku. Zadanie 10 pochodzi z finału LV Olimpiady Matematycznej (zob. [7]). Więcej o tym zadaniu i jego interesujących kontynuacjach można przeczytać w artykule Andrzeja Grzesika [11]. Szczegółowe pochodzenie zadania 11 nie jest znane, prawdopodobnie pochodzi z którejś z międzynarodowych olimpiad matematycznych z lat siedemdziesiątych XX wieku. Zadanie 12 było jednym z zadań finałowych XLIII Olimpiady Matematycznej (zob. [6]), jego autorem jest Krzysztof Oleszkiewicz. Zadanie 13 było ostatnim zadaniem drugiego dnia zawodów XXVII Olimpiady Matematycznej[3] (zob. [4]), natomiast zadanie o kolorowaniu odcinków łączących sześć punktów pojawiło się na finale XVII Olimpiady Matematycznej (zob. [2]). W przypadku zadania z kolorami można powiedzieć więcej. Otóż po raz pierwszy na matematycznych zawodach pojawiło się ono na W. L. Putnam Mathematical Competition (szczegółowe informacje o tych zawodach można przeczytać w artykule [10]) w 1953 roku, a zaproponował je wówczas Frank Harary (zob. [12]). Harary nie był jednak autorem tego zadania; jak twierdził, istniało ono wtedy w tak zwanym matematycznym folklorze.

Bibliografia

[1] *XVI Olimpiada Matematyczna (1964–1965). Sprawozdanie Komitetu Głównego*, WSiP, Warszawa 1966.

[2] *XVII Olimpiada Matematyczna (1965–1966). Sprawozdanie Komitetu Głównego*, WSiP, Warszawa 1967.

[3] *XXVI Olimpiada Matematyczna (1974–1975). Sprawozdanie Komitetu Głównego*, WSiP, Warszawa 1976.

[3] Warto dodać, że o zadaniu 13 była też mowa na 8 Kongresie World Federation of National Mathematics Competitions w 2018 roku (zob. [8]) i okazało się, że Alexandrowi Soiferowi, inicjatorowi i organizatorowi Colorado Mathematical Olympiad oraz wybitnemu ekspertowi w tematyce zadań związanych z kolorowaniem (zob. książkę [12]) nie było ono wcześniej znane, a bardzo mu się spodobało.

[4] *XXVII Olimpiada Matematyczna (1975/76). Sprawozdanie Komitetu Głównego*, WSiP, Warszawa 1977.
[5] *XXXVIII Olimpiada Matematyczna. Sprawozdanie Komitetu Głównego*, WSiP, Warszawa 1988.
[6] *XLIII Olimpiada Matematyczna 1991/92. Sprawozdanie Komitetu Głównego*, Olimpiada Matematyczna, Warszawa 1994.
[7] *LV Olimpiada Matematyczna 2003/2004. Sprawozdanie Komitetu Głównego*, Olimpiada Matematyczna, Warszawa 2006.
[8] K. Ciesielski, *University Mathematics in the Polish Mathematical Olympiad*, [w:] *Engaging Young Students in Mathematics Through Competitions – World Perspectives and Practices* (R. Geretschläger, red.), t. 2, World Scientific, Singapore 2020, 35–50.
[9] D. Gabor, G. Gabor, *Jubileuszowy Zjazd Matematyków Polskich w stulecie PTM. Kraków, 3–7 wrzesnia 2019*, Wiad. Mat 55 (2019), nr 2, 271–280.
[10] J. A. Gallian, *Seventy-five years of the Putnam Mathematical Competition*, Amer. Math. Monthly 124 (2017), nr 1, 54–59.
[11] A. Grzesik, *Proste równokątne*, Wiad. Mat 55 (2019), nr 2, 377–381.
[12] A. Soifer, *The Mathematical Coloring Book. Mathematics of Coloring and the Coloring Life of Its Creators*, Springer, New York 2009.

Krzysztof Ciesielski
Uniwersytet Jagielloński
Instytut Matematyki
krzysztof.ciesielski@im.uj.edu.pl

Wiad. Mat. 55 (2) 2019, 401–416

Matematyk nie powinien być zbyt nieśmiały – rozmowa z Jeanem-Pierrem Bourguignonem

W marcu 2016 roku na Uniwersytecie im. Adama Mickiewicza w Poznaniu gościł Jean-Pierre Bourguignon. Jest on francuskim matematykiem, specjalistą z geometrii różniczkowej. W latach 1995–1998 był prezesem Europejskiego Towarzystwa Matematycznego, a w latach 2014–2019 przewodniczącym Europejskiej Rady ds. Badań Naukowych. W dniu 3 marca wygłosił na Wydziale Matematyki i Informatyki UAM wykład *Modern geometry*: *from local to global, from smooth to rough, from static to dynamic*. Po tym wykładzie przeprowadziliśmy z nim wywiad.

Jaka była Pana droga do matematyki? Kiedy doznał Pan w matematyce efektu olśnienia, „eureki" po raz pierwszy?

Moja droga do matematyki była może trochę odmienna od standardowej. Chociaż, rozmawiając ze współpracownikami, zrozumiałem, że droga niejednego z nich była także nietypowa. W młodości niezbyt interesowałem się matematyką, ale też nie miałem z nią w szkole kłopotów. Przez wiele lat miałem wspaniałego nauczyciela, który „wykorzystywał" dobrych uczniów, by pomagali tym, którzy mieli problemy. Później zrozumiałem, że ta metoda jest skuteczna. Po pierwsze, aby wytłumaczyć coś, musisz najpierw to zrozumieć. To ugruntowało moją wiedzę matematyczną, choć – jak już wspomniałem – matematyka wówczas nie wydawała mi się fascynująca. Pociągała mnie literatura, filozofia, to było naprawdę ekscytujące, czytałem wiele książek... Nie ćwiczyłem zbyt dużo rozwiązywania zadań z matematyki, choć dla zabawy spędzałem czas rozwiązując łamigłówki matematyczne. W ostatniej klasie w liceum pojawił się nowy nauczyciel. To była szkoła, do której chodziłem od początku szkoły podstawowej do końca liceum. W tamtych czasach to było jeszcze możliwe, co bardzo mi odpowiadało, ponieważ dobrze wszystkich znaliśmy – zarówno nauczycieli, jak i dyrektora.

Następnie uczęszczałem do innej szkoły i spotkałem nauczyciela, który był wspaniałym matematykiem, ale słabym nauczycielem. Nagle miałem przed sobą kogoś, kto opowiadał rzeczy, które były dla mnie fascynujące, nie rozumiałem ich, ale po raz pierwszy zacząłem pracować, ponieważ chciałem zrozumieć, co on mówił. Ale nie potrafiłem... I moją pierwszą – nadal to pamiętam – oceną z matematyki u tego nauczyciela było pół punktu na dwadzieścia. Byłem przyzwyczajony do osiemnastu, dziewiętnastu, dwudziestu – dla mnie była to porażka. Choć nie byłem najgorszy w klasie, niektórzy mieli ćwierć punktu, niektórzy zero.

Najważniejsze jest jednak to, że ta sytuacja zmusiła mnie do samodzielnego myślenia nad problemami, które nie były proste, były nieco ponad standardowym poziomem. Zazwyczaj była to algebra liniowa, ale nauczyciel tłumaczył to w sposób, którego nie mogłem właściwie pojąć. Nie było żadnych podręczników, z których mógłbym korzystać, musiałem zrozumieć to samodzielnie.

Rok później, gdy francuski system edukacji się zmienił, trafiłem na wspaniałego nauczyciela. Choć mój wynik egzaminu z matematyki nie był zachwycający, a w mojej klasie były osoby z lepszymi ocenami, to miałem nad nimi przewagę. Nauczyłem się, jak myśleć samodzielnie i wkrótce zorientowałem się, że – z tego punktu widzenia – byłem najlepszy w klasie. Nauczyciel, który był bardzo dobry, miał pewien zwyczaj, który zmusił mnie do myślenia. Rozpoczynał bowiem każdą lekcję, pytając uczniów, czy mają jakieś pytania. Oczywiście stało się dla nas wyzwaniem, by zadać mu trudne pytanie. Uznaję to za dobry sposób, jeśli masz do czynienia z dziećmi skłonnymi do wyzwań – każdy z nas starał się zadać jak najlepsze pytanie – tak, aby przymusić nauczyciela do powiedzenia: „przepraszam, ale nie wiem". Oczywiście następnego dnia udzielał odpowiedzi. Tak więc, myślę, że to była droga, którą dotarłem do matematyki.

Następnie bardzo się wahałem, gdyż kolejnego roku miałem całkowicie innego nauczyciela, który – z grubsza mówiąc – oceniał uczniów zgodnie z jego oczekiwaniami w stosunku do nich. Jeśli oczekiwał od ciebie wiele – twoje oceny były okropne, gdyż zawsze go rozczarowywałeś. Jeżeli zaś nie spodziewał się po tobie wiele – miałeś dobre oceny. Było więc bardzo ciężko ocenić samego siebie. I kiedy poszedłem do École Polytechnique, miałem na początku bardzo dobre oceny z matematyki, ale miałem wrażenie, że nie jestem wystarczająco dobry, by zajmować się matematyką. Zacząłem więc studiować mechanikę, ponieważ widziałem, że rówieśnicy w École Normale mają w tym samym czasie o wiele więcej matematyki... Studiowanie mechaniki szło mi bardzo opornie, głównie z tego powodu, że wykładowcy byli bardzo słabi. W tej sytuacji, my – studenci – skrzyknęliśmy się i zorganizowaliśmy lekcje dla siebie. To było wyzwanie, które sami sobie postawiliśmy, bo czuliśmy, że wykładowcy nie spełnią naszych oczekiwań. Dzięki temu też nauczyłem się czytać podręczniki do mechaniki. Było to, jak sądzę, w istocie, świetnym przygotowaniem do działalności badawczej.

Moja droga do matematyki pozostawała dziwna, bo chciałem zrobić doktorat z mechaniki. Szukałem profesora w Paryżu, który mógłby być moim promotorem. Miałem głowę zaprzątniętą zagadnieniem, które chciałem rozwiązać – problem równania opisującego ruch cieczy w złożach roponośnych. I wtedy usłyszałem, że tak to nie działa – to my dajemy ci problem do rozwiązania. Ale ja tak nie chciałem... Wtedy wróciłem do matematyków, bo matematycy są bardziej uczynni dla ludzi takich jak ja. Jak widzicie, moja droga do matematyki jest trochę skomplikowana, związana z niepewnością czy jestem dość dobry, żeby uprawiać matematykę.

A co do efektu olśnienia... Mam na myśli jedną małą rzecz, konkurs. Nie mogę sobie przypomnieć, jaka to była gazeta, ale to był taki głupkowaty konkurs typu „jak dodawać i odejmować od sobie liczby od 1 do 10 tak, aby w najmniejszej liczbie kroków otrzymać 1000". Coś w tym stylu. Pamiętam, męczyłem się z tym przez całe letnie wakacje i znalazłem rozwiązanie, które uznałem za najlepsze. Byłem bardzo zaskoczony, że ludzie znajdowali lepsze rozwiązania od ręki, choć ja używałem matematycznych metod i matematycznego podejścia.

Myślę, że bardziej interesująca będzie sprawa artykułu, który chyba jest najlepszą rzeczą, jaką napisałem z matematyki. W pewnym momencie część mojej pracy była związana z fizyczną teorią Yanga–Millsa. To było w 1979 roku, kiedy Blaine Lawson przebywał w IHES. Rozmawialiśmy dużo, bo był zainteresowany podobnymi zagadnieniami. Ale nigdy mu nie wspomniałem, że również byłem zaintrygowany teorią Yanga–Millsa. A on też nawet nie napomknął o swoim zainteresowaniu tą teorią. W tym czasie miałem wygłosić odczyt dla fizyków, więc chciałem sprawdzić, co sądzi o programie mojego wykładu. Kiedy mu opowiedziałem o planach, zdziwił się, że interesuje mnie teoria Yanga–Millsa. Widzieliśmy się cały rok, ale nigdy mu o tym nie wspomniałem... Wtedy zapytał: „znasz hipotezę postawioną przez fizyków? Jestem w stanie w połowie ją zweryfikować". A ja odpowiedziałem, że wiem, jak zrobić pozostałą część. I tak właściwie w rozmowie o czymś innym – wykładzie – okazało się, że znamy odpowiedź na pytanie, którą wielu ludzi wtedy naprawdę chciało poznać. Właściwie w dwa dni napisaliśmy artykuł – to było wspaniałe.

Ta sytuacja pokazuje również, że nigdy nie można być zbyt nieśmiałym w rozmowie o tym, co robisz. Szczególnie jeśli jesteś wśród ludzi, co do których

Jean-Pierre Bourguignon

masz zaufanie, powinieneś mówić, czym naprawdę się zajmujesz. Nie zrobiłem tego, a powinienem był. Każdemu z nas brakowało istotnej części rozwiązania. Tak czy owak, to była eureka – zorientowaliśmy się, że mamy dwa kawałki układanki. Przepraszam, to było długie...

Czy pamięta Pan tytuł matematycznej książki, która po raz pierwszy przyciągnęła Pana uwagę?

Matematyczna książka... Właściwie czytałem wiele... Pamiętam artykuł rozszerzający materiał z matematyki w szkole... z encyklopedii. To nie była matematyczna książka, tylko opracowanie w encyklopedii dotyczące pojęcia krzywej stożkowej.

A więc geometria od początku?

To było tylko coś, co czytałem, co byłem w stanie przeczytać...

Jaka jest Pańska opinia na temat roli krajowych towarzystw matematycznych, szczególnie w Europie?

Myślę o trzech różnych rzeczach. Po pierwsze, jest dla mnie niezwykle istotne, że uczeni spotykają się i bronią swoich tradycji, wspólnych zwyczajów. Dlatego rola towarzystw naukowych jest bardzo istotna – to jest naturalne miejsce, gdzie naprawdę można dzielić się odczuciami i upewniać się, że tradycja, wiedza, jest utrzymywana, nie jest zagubiona. Może matematycy nie są dobrym tego wzorcem? Na przykład zauważyłem jedną rzecz o dwóch sławnych ludziach – Laurencie Schwartzu i Shiing-shen Chernie. Właściwie o obu zachowało się bardzo mało dokumentacji filmowej. Jeśli jesteś człowiekiem tego kalibru, spodziewasz się, że będziesz często pytany. Schwartz, jak wiemy, napisał autobiografię. Dzięki temu wiemy o jego prawdziwym życiu, o nim jako osobie. Z Chernem było tak samo. Kiedy zmarł, chiński rząd wyprodukował oficjalny film, który był bardzo formalny i nie mówił za wiele. W Los Angeles w 1990 roku wraz z Tonym Phillipsem przeprowadziliśmy z nim całkowicie amatorski wywiad. Tak się złożyło, że to jedno z niewielu nagrań z Chernem, na którym są zadawane konkretne pytania na temat tego, co sądzi o matematyce, a Chern prezentuje taki wykład, jaki ja wygłosiłem dzisiaj. Spisałem ten wywiad dla Instytutu Cherna. Pokazałem również fragmenty nagrania, na których komentuje temat omawiany także dzisiaj na moim wykładzie. Byłem poruszony, widząc wrażenie, jakie robi na odbiorcach.

Druga rzecz to fakt, że jako uczeni musimy siebie bronić. Myślę, że nie wszystkim wychodzi to najlepiej. W Europejskiej Radzie ds. Badań Naukowych[1] widzę u polityków niezrozumienie roli badań naukowych, sposobu ich funkcjonowania itd. Zacytuję pewną osobę, nie będę mówił kogo, tylko skomentuję słowa. Pewna grupa ludzi podeszła do tej osoby w Komisji, żeby powiedzieć, jak ważne jest przeznaczenie większych pieniędzy na badania naukowe. Reakcją natychmiastową były słowa: „[n]ie ma problemu. Możemy przeznaczyć więcej pieniędzy, ale wtedy będziemy mówić, co mają robić". Dla mnie to katastrofa. Jako uczeni musieliśmy wytłumaczyć, że przykro, ale nie ma on pojęcia czym są i na czym polegają badania naukowe. To prawdziwa tragedia – musimy wciąż to samo powtarzać i tłumaczyć to ludziom. Dlatego też, na przykład, towarzystwa są bardzo ważne, są przestrzenią, gdzie możemy zbierać ważne argumenty za bronieniem naszej wizji badań.

A zatem dlaczego towarzystwa krajowe kontra towarzystwo europejskie? Jak zapewne wiecie, Europejskie Towarzystwo Matematyczne powstało tutaj, w Polsce, w Mądralinie. To był bardzo ważny moment, myślę, że to był istotny krok. Wydaje się, że towarzystwa krajowe mają najlepszą pozycję, aby utrzymać przy życiu tradycję, zapewnić odpowiednie przechowywanie i archiwizowanie dokumentów, umożliwić dostęp do nich młodzieży. Towarzystwa krajowe gwarantują bardzo dużo przestrzeni zarówno do wspólnego omawiania polityki, jak i obrony poglądów, a w końcu faktycznego śledzenia, co działo się w przeszło-

[1] *European Research Council*, ERC, jest działającą w ramach Unii Europejskiej niezależną instytucją wspierającą badania naukowe.

ści. Jako matematycy wiemy, jak znaczące jest odnoszenie się do przeszłości – patrzeć w przyszłość, ale wciąż odnosić się do przeszłości.

W swoim wykładzie wyraźnie to Pan pokazał...

Mam nadzieję, starałem się, nie jestem pewien, czy mi się to udało.

Udało się.

Tak...

Tak więc, uważa Pan, że jest przestrzeń dla Europejskiego Towarzystwa Matematycznego?

Och, uważam, że tak, nawet więcej, jestem o tym mocno przekonany. Wspólna historia Europy dotycząca nauki, w szczególności matematyki – to są dzieje fantastyczne. Miałem wygłosić odczyt w Edynburgu – europejski wykład nazywany McCormick Lecture – wybrałem temat o różnorodności. Tytuł brzmiał *Różnorodność i wzajemne powiązania w nauce w Europie*, czyli i w Europie, i w nauce. Typowe uwzględnione przykłady ukazywały, że naprawdę to była scena europejska, dla matematyków zwłaszcza. W Edynburgu wspomniałem, jako przykład, *Księgę szkocką* – notatnik, z którym (jestem pewien) jesteście bardzo dobrze zaznajomieni. Mam na myśli przykład miejsca z tak wieloma różnorodnymi ludźmi przybywającymi razem i omawiającymi problemy. Europa odgrywa bardzo ważną rolę w rozwoju matematyki, lecz nie jesteś w stanie wyróżnić jednego kraju ani jakieś grupy osób. Ludzie dużo podróżowali. Descartes udał się do Szwecji, Euler był w Sankt Petersburgu itd. Więc wydaje mi się, że naturalną sceną była zawsze Europa. Dla mnie jest bardzo ważne, iż młodzi ludzie poruszają się po Europie tak swobodnie. Istnieje zatem przestrzeń dla Europejskiego Towarzystwa Matematycznego, lecz nie przeciwko towarzystwom krajowym, ale w połączeniu, z właściwym między nimi podziałem ról.

Był Pan prezesem Europejskiego Towarzystwa Matematycznego. Czy zrealizował Pan cele, które sobie założył? Jak porównałby Pan EMS z czasów założycielskich z okresem, w którym był Pan prezesem oraz dniem obecnym? Jakie mogłyby być zadania na przyszłość?

Zostałem wybrany drugim prezesem Europejskiego Towarzystwa Matematycznego, co było dla mnie dużym zaskoczeniem. Nie byłem przekonany, czy jestem właściwą osobą. Jak wiadomo, pierwszym prezesem był Friedrich Hirzebruch – niezwykła postać w matematyce. Nie byłem pewien, czy spełniam takie standardy. Ale stało się. To były inne czasy, okres pewnych ustaleń. W czasie mojej kadencji – dzięki pomocy Petera Michora i innych – było możliwe rozstrzygnięcie kilku spraw. Jedną uważam za szczególnie istotną ze względu na wsparcie Petera Michora. Założyliśmy stronę internetową EMS, nazywaną EMS service – European Mathematical Information Service, która fantastycznie się rozwinęła. Pomysł był autorstwa Petera Michora, jako prezes ideę wspierałem i wspólnie wprowadziliśmy ją w życie. Założenie czasopisma EMS było kolejnym zadaniem. To był właściwie pomysł Hirzebrucha, a prace były finalizowane, kiedy kończyłem kadencję. Pracowałem nad tym ciężko – dla matematyków wysokiej klasy czasopismo o formacie europejskim jest bardzo ważne. Wśród mnóstwa spraw, wielu grup roboczych, dylematem za moich czasów – który myślę, że udało się ostatecznie rozwiązać – była możliwość powstania europejskiego stowarzyszenia zajmującego się zastosowaniami matematyki. Uważałem, że to zły pomysł. Według mnie wszystkie rozbieżności między matematyką czystą a stosowaną w gruncie rzeczy nie są znaczące. Oczywiście istnieją różne sposoby uprawiania matematyki, ale bardzo istotne jest zachowanie związku pomiędzy nimi. Obserwowałem, jak we Francji powstawało oddzielne stowarzyszenie, trochę ze względu na nieumiejętne zachowanie Société Mathématique de France, które niewystarczająco się otworzyło. Dlatego toczyłem prawdziwy bój o zyskanie pewności, że nie stanie się to na poziomie europejskim. Bardzo byłem zadowolony, że moim następcą został Rolf Jeltsch, który zajmuje się zastosowaniami matematyki. Włożyłem wysiłek w tworzenie przestrzeni dla innych podejść...

Próbowałem również rozpropagować Matematyczne Forum Diderota. Nie przetrwało jednak zbyt długo po moim odejściu. Pomysł opierał się na pokazaniu europejskiego wymiaru zjawiska, w którym kluczową rolę odgrywała matematyka i... coś jeszcze. Na przykład zestawiliśmy matematykę i muzykę, innym razem – matematykę i wodę, a jeszcze innym – matematykę i filozofię. W trzech różnych miejscach w Europie organizowaliśmy małe spotkania, w czasie których uczestnicy dzielili się fragmentami swoich wykładów. Oczywiście jest to bardzo łatwe do wykonania z użyciem dzisiejszych środków. Dawniej przygotowanie takiego przedsięwzięcia było raczej skomplikowane. Pomysł polegał na organizowaniu lokalnym, z wykorzystaniem niedużych środków, zwykle z udziałem czterdziestu lub pięćdziesięciu osób. Jednoczesne trzy tak przygotowane konferencje kreują już grupę stupięćdziesięcioosobową, co tworzy bardzo interesującą platformę wymiany zdań. Kolejną zaletą takiego podejścia jest „uruchomienie" w różnych miejscach ekspertów z bardzo różnymi umiejętnościami. Na przykład dla muzyki[2] wybraliśmy Wiedeń – całkiem dobra przestrzeń pod tym

[2] Było to 4 Forum Diderota, w grudniu 1999.

Od lewej: Jerzy Kaczorowski, Jean-Pierre Bourguignon, Krzysztof M. Pawałowski

względem, Lizbonę wyróżniało bardzo dobre wsparcie prywatnej fundacji, a w Paryżu mieścił się IRCAM[3]. Byłem bardzo zadowolony, że później IRCAM otworzył specjalną grupę badawczą zajmującą się matematyką w muzyce (która zresztą istnieje nadal przy wsparciu Pierre'a Bouleza). To naprawdę wspaniała rzecz, byłem bardzo wzruszony, gdy ludzie z IRCAM traktowali mnie jak swojego założyciela – nie powinno tak być. Jednakże jest faktem, że te spotkania tam się odbyły, a Pierre Boulez mógł tam przybyć i zobaczyć, że wśród matematyków było duże zainteresowanie. Ostatecznie Forum Diderota istniało po moim odejściu, ale – czego żałuję – nie rozwinęło się. Sądzę, że jego format był dobry. Na przykład bardzo interesujące okazało się nawiązania do tematu wody, realizowane pomiędzy Wenecją, Amsterdamem i Barceloną[4] (być może, nie mogę sobie przypomnieć). Myślę, że rozumiecie ten pomysł. Tak czy inaczej, wtedy takie były moje priorytety: różnie grupy, o takich funkcjach, o jakich mówiłem. Widziałem to jako zadania pilne. Oczywiście teraz EMS jest tego potwierdzeniem – działa, jest wpływowe i dostrzegalne, na europejskim poziomie i we współpracy z innymi.

Na przyszłość, jak wspomniałem, jest bardzo ważne, aby matematycy byli widoczni. Uświadomiłem sobie jedną zwłaszcza rzecz, udzielając wywiadu dla

[3] IRCAM – Institut de Recherche et Coordination Acoustique/Musique, Centrum Badawczo-Koordynacyjne Akustyki i Muzyki.

[4] Było to 2 Forum Diderota – w Wenecji, Amsterdamie i Madrycie, w grudniu 1997.

telewizji tutejszego Uniwersytetu. Mało kto wie, że matematyka odgrywa bardzo ważną rolę w dzisiejszej ekonomii. Dlatego, jeżeli zaczniesz studiować matematykę na uniwersytecie, możliwości zatrudnienia są niezwykle różnorodne. Oczywiście musisz uwzględnić własny gust, swoje zainteresowania, ale poniekąd studiowanie matematyki jest swego rodzaju „strefą ochronną", używając terminów zatrudnienia, ponieważ umożliwia przeróżne wybory. Wielu studentów przedstawia się, mówiąc: „chciałbym zostać nauczycielem" – to jest dobre, ale istnieje tyle innych możliwości. Może EMS powinno odegrać jakąś rolę, czyniąc to bardziej widocznym i jasnym dla większej liczby studentów w różnych częściach Europy. Ostatnio zostałem skonfrontowany z młodą damą. Znałem jej ojca, ponieważ pracuje w UNESCO. Byłem z nim zaangażowany w pracę w jednej z komisji. Powiedział mi: „córka studiuje inżynierię, ale pragnie zająć się matematyką. Nie mogę jej powstrzymać, więc proszę, porozmawiaj z nią". Powiedziałem: „ostrzegam, nie zamierzam jej powiedzieć, żeby zrezygnowała". Jeśli jest zainteresowana matematyką, powinna studiować matematykę. I jasne, że ta młoda dama powiedziała: „chcę zająć się matematyką, bo jestem podekscytowana matematyką, ale nie chciałabym być nauczycielką". To nie problem, naprawdę. Jeżeli będziesz odpowiednio nad sobą pracować, znajdziesz wiele sposobności do wykorzystania zainteresowań matematycznych do mnóstwa innych rzeczy.

Czy EMS powinno tworzyć powiązania z biznesem?

Sądzę, że to zależy od tego, co nazywać biznesem, który byłby robiony pod szyldem EMS. Jeden z podzespołów zajmujący się matematyką stosowaną miał na celu opracowanie historii udanych powiązań między matematykami a pracującymi w przedsiębiorstwach. Spójrz na dostępny w sieci dokument. Zobacz tę różnorodność, to jest absolutnie niewiarygodne. Wiele, wiele różnych rzeczy i nawet takich, o których nigdy nie pomyślałbyś, że istnieją. Myślę więc, że to zależy od tego, co określisz jako bycie połączonym z biznesem. Uważam, że EMS powinno być bardziej otwarte na doświadczenie ludzi korzystających z matematyki w bardzo różnorodny sposób. I czynić to dostępnym dla ogółu społeczeństwa. Nie wiem dokładnie, o czym myślisz, mówiąc „być zaangażowanym w biznes". Dziś jednak znaczenie matematyki w ekonomii jest naprawdę bardzo, bardzo ważne. I jest niedoceniane zarówno przez matematyków, jak i oczywiście przez innych, a na dodatek niewiele osób jest świadomych tej ważności. Wydaje się, że w Polsce nie ma takiego problemu. W wielu państwach zmniejsza się gwałtownie liczba studentów matematyki, jak we Francji. I to jest absurdalne, patrząc z perspektywy tego, co powiedziałem.

Niedawno został Pan przewodniczącym Europejskiej Rady ds. Badań Naukowych. Czy mógłby Pan opowiedzieć, czym zajmuje się ERC oraz jakie są plany na przyszłość? Jak widzi Pan rolę matematyki, ogólnie, w nauce?

Zacznijmy od ERC. Dla mnie jest jedyną w swoim rodzaju przygodą. Zostało utworzone, ponieważ środowiska naukowe generalnie były bardzo niezadowolone z programów europejskich. Mieliśmy wiele naprawdę poważnych obiekcji. Niektórych rzeczy nie mogliśmy zrealizować ze względu na obowiązujące prawo, uwarunkowane różnymi traktatami. Komisja Europejska nawet w części nie była odpowiedzialna za badania naukowe. Zostawały więc dwie drogi uzyskania nakładów finansowych na badania naukowe (tzw. programy ramowe): albo w kategoriach wsparcia spójności (tu ważna była sieć powiązań i kontaktów), albo bezpośrednio od przedsiębiorstw prywatnych.

W celu stworzenia programu, będącego wsparciem indywidualnej pracy badaczy, należało wprowadzić zmiany w traktatach. I to nastąpiło właśnie w traktacie lizbońskim z 2009 roku. Właściwie był gotowy już w 2007 roku, po naszych – bez wątpienia długich – zmaganiach. Miałem udział w jego powstaniu – pierwsze wysiłki podjęliśmy, kiedy byłem prezydentem EMS, później prace kontynuowano. Powstała *Initiative for Science in Europe*, zwana ISE. Okazała się świetnie lobbującą – kluczową rolę odegrali w niej biolodzy. Z kolei w powołaniu do życia ERC miały bardzo istotny udział dwie osoby. Jedną z nich jest José Mariano Rebelo Pires Gago (niestety niedawno zmarł), polityk z Portugalii, zajmował się fizyką cząstek, a oprócz tego był dwukrotnie ministrem nauki w Portugalii. Drugą osobą był Philippe Busquin, belgijski minister edukacji, następnie członek Komisji Europejskiej. Niezwykle zabiegał o utworzenie ERC, ale ERC nie udało się powołać do życia w czasie jego kadencji. Później, już jako członek Parlamentu Europejskiego, dalej wspierał inicjatywę.

Tak czy inaczej, ERC należy do programów wyjątkowych. Decydują o tym zwłaszcza dwa czynniki: wspieramy badaczy indywidualnych tylko i wyłącznie na podstawie jakości ich pracy naukowej, a członkowie wchodzący w skład komisji odpowiedzialnej za program są uczonymi (co zwykle nie zdarza się w takich komisjach). Jako Komisja, bez interwencji kogokolwiek z zewnątrz, odpowiadamy za przedstawianie, na co wydajemy pieniądze i kto zajmuje się ewaluacją. To leży w gestii tylko naszej odpowiedzialności i niektórzy w Komisji nie są z tego zbyt zadowoleni. Borykamy się z tym cały czas, ponieważ są osoby usiłujące ograniczyć naszą inicjatywę. Moja praca przewodniczącego polega na nieustannym byciu czujnym, by zauważać rodzącą się presję i stawiać jej opór. Staram się o to najlepiej, jak potrafię. Rzecz jasna nie można wszystkiego zrobić samemu, stąd potrzeba wsparcia środowisk naukowych. Dlatego tak istotne okazują się częste spotkania z uczonymi, nie tylko z matematykami. Oczywiście zawsze miło porozmawiać z matematykiem, ale ważna jest różnorodność.

Uważam – jak powiedziałem w czasie wykładu – że dzisiaj jest fantastyczny moment dla matematyki, ponieważ widać jej związki z innymi dziedzinami, czasami bardzo konkretnymi, jak modelowanie czy zagadnienia dużej ilości danych. Tutaj nie uda się osiągnąć czegokolwiek, nie mając dobrych podstaw matematycznych. Może najtrudniej to zobaczyć wśród samych matematyków. Na przykład, przynajmniej we Francji (nie wiem, jak to wygląda w Polsce), statystyka znajdowała się poza głównym nurtem badań, co uważam za błąd. Myślę, że odgrywa ona znacznie większą rolę i jej połączenie z matematyką w różnych dziedzinach staje się coraz bardziej i bardziej istotne (na przykład uczenie maszynowe). Myślę, że to bardzo ważne, by matematycy dołączyli do innych uczonych – tak jak do tej pory, tradycyjnie, współpracowali z fizykami. Bardzo dobrą drogą rozwoju matematyki jest biologia i medycyna – dające wiele wspaniałych możliwości zaangażowania matematyków. Aby to się stało, matematyk nie tylko musi znać się na matematyce, ale powinien także być zdolny do słuchania, być cierpliwy i rozumiejący problemy. Czasami ktoś z zewnątrz ma inny punkt widzenia – może całkowicie niepoprawny, ale na zaawansowanym poziomie dedukcji. Myślę, że te cechy stwarzają dobrą możliwość słuchania i szansę interakcji, która jest bardzo istotna.

Już częściowo odpowiedział Pan na to pytanie, ale chcielibyśmy usłyszeć odpowiedź wprost: jaką ma Pan opinię na temat numerycznych metod ewaluacji w dziełach naukowych? Co sądzi Pan o wskaźnikach cytowań i indeksie Hirscha?

Jako szef ERC toczę nieustanną walkę, by zaprzestać ich wykorzystywania. Uważam ich użycie za katastrofalne – ocenianie w ten sposób jest bardzo mylące. Tego typu miary można użyć do oceny kraju albo nawet całych obszarów... Kiedy łączysz te sprawy, możesz otrzymać jakąś wskazówkę, która ewentualnie pomoże ci ocenić poszczególnych ludzi. Natomiast uważam za niestosowne, by oceniać nimi bezpośrednio indywidualne osoby. Matematycy znaleźli się w sytuacji jeszcze dziwniejszej z jednego konkretnego powodu – ISI. To pewien rodzaj certyfikowanej informacji, która modyfikuje wskaźniki, wykorzystując cytowania z ostatnich trzech lat. Zdajecie sobie sprawę ze średniego okresu cytowania w artykułach naukowych – w matematycznych wynosi osiem, może dziewięć lat. Uwzględnienie jedynie ostatnich trzech lat oznacza informacje, które nic nie niosą, nie mają znaczenia, kompletnie żadnego znaczenia. Kolejna rzecz – sytuacja, z którą miałem styczność. Jeden z francuskich ministrów pokazał mi listę dwustu najczęściej cytowanych matematyków.

Od lewej: Paweł Mleczko, Jean-Pierre Bourguignon, Jerzy Kaczorowski

Numerem jeden był laureat medalu Fieldsa. Myślę – okej. Kolejnych dwunastu nazwisk w życiu nie słyszałem! Nie twierdzę, że wiem o wszystkich matematykach, ale tych dwunastu na pewno nie znam. Na liście nie znalazł się Gromow, którego darzę ogromnym szacunkiem za niewiarygodną kreatywność. Na trzynaście nazwisk nic mi nie mówią nazwiska umieszczone na pozycjach od 2 do 13, natomiast Gromow w ogóle nie występuje wśród wymienianych dwustu?! Bez przesady!

...to oznacza, że metoda jest nieodpowiednia.

Tak, zwłaszcza do oceniania ludzi. Przepraszam za moją szczerość, ale...

W naszych kręgach także nie jesteśmy zadowoleni z tego systemu.

Tak, to absurdalne. Źle jest w ten sposób oceniać indywidualne osoby.

Ale nasze ministerstwo jest bardzo szczęśliwe, używając tej miary do rozdzielania pieniędzy.

Nie, to niesprawiedliwe! Też przykro mi z tego powodu. Walczę z tym problemem w ERC, ponieważ to jest coś, co w środowisku biologicznym znani ludzie wykorzystywali... i wciąż są przyzwyczajeni do podejmowania decyzji, bazując na tym podejściu. Rozumiem – w ich przypadku okres życia publikacji jest mniejszy bądź równy trzy lata, więc w tej sytuacji, przeglądając czyjeś publikacje sprzed pięciu lat, możemy nieraz stwierdzić, że tam zawarte tezy są już nieaktualne.. By zmierzyć, czy dany artykuł miał jakieś znaczenie, trzeba odtworzyć ówczesny stan wiedzy w danej dziedzinie. Jak wiesz, sprawy mają się zupełnie inaczej u matematyków, wśród których można wciąż wykorzystywać publikacje sprzed trzydziestu i więcej lat...

...wciąż są aktualne...

Tak. Rozumiem więc, dlaczego oni – skoro nie mogą w rzeczywistości przeczytać tych wszystkich publikacji i sprawdzić, jaki tak naprawdę miały wpływ – wykorzystują automatyczne miary. Niestety uważam, że to zupełnie zła droga. To iluzja, całkowita iluzja.

W matematyce, z uwagi na ogrom nowych pomysłów oraz metod, obserwowane jest zawężanie specjalizacji. Czy uważa Pan, że zwiększa to ryzyko rozpadu matematycznej społeczności? Co za tym idzie, czy nie obawia się Pan wzrostu wyobcowania matematyki w społeczeństwie?

To trudne pytania. Uważam, że wspomniany proces specjalizacji – to znaczy fakt, że pojawia się coraz więcej informacji – jest rzeczą konieczną. Jednocześnie cały czas zamazują się granice między poddziedzinami i jest to reorganizacja dynamiczna. To znaczy jestem zdania, iż ryzyko konieczności wydzielenia specjalizacji ma taką konsekwencję, że różne fragmenty matematyki zbliżają się do siebie. Myślę jednak, wybiegając trochę naprzód, że mamy wiele przykładów, w których rozwiązania pojawiły się z zewnątrz. Uważam, że skoro mamy tutaj dwie siły, które oczywiście walczą ze sobą i jeżeli spojrzymy indywidualnie na jedną osobę, jasne, że możesz zostać wezwany w trakcie pracy w momencie, kiedy zmniejszysz swoje skupienie, ale zazwyczaj szybko można się zorientować, że w celu rozwiązania problemu należy spojrzeć z zupełnie innej perspektywy, zatem... skoro są te dwie siły, nie jestem zbyt zaniepokojony.

Ludzie podchodzą poważnie do rozwiązywania problemów, nie tylko w celu przygotowania nowej publikacji. Jeżeli umieścisz siebie w tej logice posiadania kolejnego dodatkowego artykułu, możesz być oszukany przez tę gigantyczną specjalizację. Ale kiedy patrzysz poważnie na znaczący i naukowy problem, myślę, że nie ryzykujesz tak dużo.

Teraz chciałbym się skupić na kolejnych pytaniach o wyobcowaniu, ale nie jestem pewien czy dobrze to zrozumiałem. Nie wiem, co macie na myśli, ale na wykładzie podkreślałem, co moim zdaniem dzieje się odnośnie znaczenia matematyki w społeczeństwie. Oczywiście niektórzy mogą patrzeć następująco – matematyki należy uczyć tak, żeby przygotować ludzi do jej stosowania w sposób, w jaki jest używana obecnie. To znaczy, żeby nauczyć tego w zakresie wąskim, w praktyce, zapominając o podstawach itd. Ale myślę, że istnieje wiele argumentów przeciw takiemu podejściu. Nawet ludzie pracujący w biznesie często widzą, jak można rozwiązać niektóre problemy dla nich bardzo istotne. Wielu zdawało sobie sprawę (z tych, z którymi rozmawiałem), że w rzeczywistości jest ważne, aby mieć w swoich szeregach osoby z umysłami otwartymi. To ma pozytywny wpływ na firmę. W zasadzie nie mówię tylko o matematykach, ale szerzej, o ERC, że przy tworzeniu czegoś, co można nazwać grupą do pionierskich badań i pomysłów, będzie się gromadzić ludzi z sektora prywatnego: filantropów i właścicieli firm. W firmie potrzebują badań na najwyższym poziomie, badań pionierskich, niejako bardzo zawężonych. Dla zobrazowania tego, co mam na myśli o mówiących „ok, powiedzmy im, co mają robić..." dodam, że w ostatnim tygodniu odwiedzałem ludzi z Solvay – firmy chemicznej, bardzo dobrej w dziedzinie badań. Dla nich to, co mówię jest oczywiste – potrzebują otwartych umysłów z odpowiednim treningiem itd. Dla nich jest zrozumiałe, że będą zadawać bardzo konkretne pytania z chemii. Ale wiedzą, że rozwiązanie można otrzymać w zupełnie inny sposób. Uważam więc, że jeśli spyta się właściwych ludzi, którzy naprawdę myślą o przyszłości, to ryzyko popełnienia błędu jest znikome. Mówiłem, że matematyka ma duże znaczenie w ekonomii. Przychodzą ludzie i mówią: „ok, musisz nauczyć się tego i tamtego, ponieważ chcę zatrudnić ludzi takich a takich". Widzisz, że ekonomia rozwija się bardzo szybko. Spójrz na wszystko, co związane jest z telefonami komórkowymi. Nie jest pewne, co będzie ważne za dziesięć lat. Dlatego jedynym wyjściem jest kształcenie ludzi w zakresie wystarczająco szerokim, umożliwiającym uporanie się ze wszystkim.

Jeżeli więc wyobcowanie jest tym, co opisałem, nie martwię się, bo uważam, że traktujący to poważnie pracodawcy, rozwiązujący prawdziwe problemy, będą się starać, by pracownicy rozwijali się wystarczająco szeroko. Pracodawcom bowiem zależy na pracownikach, którzy rozwiązują problemy. Nie obchodzi ich zatrudnianie i zwalnianie po trzech latach. Muszą wtedy szukać kogoś nowego, nie tego oczekują.

I na koniec, czy mógłby Pan proszę podzielić się z nami jakąś anegdotą, oryginalnym zajściem związanym z Pana pracą?

O mój Boże, już opowiedziałem jedną anegdotę o odkryciu z Blainem Lawsonem artykułu, który każdy z nas napisał w połowie. To był bardzo szczęśliwy przypadek, a to doświadczenie umocniło naszą przyjaźń. Zależy, co macie na myśli, mówiąc „związanym z pracą". Czy chodzi o moje zaangażowanie w ERC?

Tak.

A więc… odkryłem jedną rzecz. W zeszłym roku powstał projekt Komisji Europejskiej, by mieć Europejski Fundusz Inwestycji Strategicznych[5] – tak zwany EFSI. Głównym celem Komisji było zdobycie prywatnych funduszy – z pewnego rodzaju publiczną gwarancją – w celu zachęcenia do inwestowania w ryzykowne projekty. Gdyby odzyskanie pieniędzy nie było możliwe, publiczna gwarancja zapewniłaby zwrot funduszy. I oczywiście Komisja Europejska nie dysponowała tymi pieniędzmi. Fundusz publiczny, wyłożony na stół, składał się z 16 mld euro: 8 mld Europejskiego Banku Inwestycji oraz 8 mld Komisji Europejskiej. Rzecz jasna, budżet Komisji w wysokości 8 mld nie istniał, więc należało go znaleźć. Pierwotnie zakładano zabranie 2,7 mld z projektu Horyzontu 2020. Taka kwota nie była wielką częścią budżetu Horyzontu, wynoszącego w sumie około 80 mld, stanowiła jednak znaczącą ilość pieniędzy. European Research Council miało być opodatkowane kwotą 221 mln euro. Naturalnie nie byliśmy zachwyceni, więc zaczęliśmy walczyć. Bez wątpienia Komisja nie była zbyt szczęśliwa, że się wzbraniamy – gdyby nie zdobyłaby pieniędzy od nas, musiałaby uzyskać od kogoś innego, przez co sprawa się komplikowała. Chcąc zmienić wysokość opodatkowania, nie mogliśmy się odwołać do Komisji, która już stwierdziła – to jest nasza propozycja. Pozostały rządy lub Parlament Europejski. Rozpocząłem od Parlamentu. Muszę przyznać, że spotkałem paru bardzo, ale to bardzo interesujących ludzi, będących członkami Parlamentu Europejskiego. Bardzo rozmaitych – ich poglądy polityczne nie miały znaczenia – mam na myśli, działających na najróżniejszych polach. Wykluczam sceptyków Unii Europejskiej, gdyż dyskusja z nimi na ten temat była bezcelowa. Ale poznałem ludzi naprawdę fascynujących, zachwycających w tym sensie, że podjęli się wyzwania, o którym im opowiedziałem. Byli przekonani o istocie badań, o tym, że nie powinny być opodatkowane. Opowiedzieli mi nieco o swoich krajach. Niektórzy pochodzili z państw, których polityki nie znałem, nie wiedziałem, jakie było na przykład ich podejście do rządu. To było bardzo ciekawe doświadczenie, trochę pochłaniające czas, gdyż należało wyznaczać spotkania, przeprowadzać rozmowy, wysłuchiwać i wymieniać się materiałami. Bardzo często te materiały były bardzo wysokiej jakości, bardzo nam się przydały. Spotkałem prezydenta Buzka i odbyłem z nimi dobrą rozmowę. Był prezydentem tzw. komisji wszechstronnej, która zajmowała się badaniami. Znacie go i jego osobistą historię. Był świadomy problematyki związanej z badaniami i od pierwszego dnia zaoferował wsparcie. Oczywiście nastąpiło wiele kolejnych zdarzeń: w środowisku naukowym wypowiadano się w tej sprawie, powstawały artykuły… W różnych czasopismach wypowiadali się różni działacze, pojawiło

[5] European Fund of Strategic Investment.

się łącznie około dwustu pięćdziesięciu artykułów na ten temat. Nie ulega wątpliwości, jedyną metodą prowadzącą ku zwycięstwu było pokazywanie i bardzo przejrzyste wyjaśnianie działaczom z Komisji, że zapłacą sporą cenę za upór. Niedługo po tym w Komisji zrozumiano, że trzeba będzie tę cenę zapłacić, więc natychmiast przyjęto postawę – możliwe, że da się zrobić coś innego. I tak się to wydarzyło. To część mojej pracy, bez dwóch zdań. Miałem wiele ciekawych spotkań z członkami bądź byłymi członkami Parlamentu Europejskiego. Na przykład z jednym, muszę przyznać, przeprowadziłem imponującą rozmowę. Mowa o Danielu Cohn-Benditcie, bardzo aktywnym działaczu Parlamentu Europejskiego ze strony zielonych. Miałem bardzo realistyczny pogląd na te sprawy, ale muszę przyznać, że bardzo interesująca z nim rozmowa stała się dla mnie okazją do rewizji wykazu sugestii, które zamierzałem przedłożyć. Było to dla mnie terytorium nowe; jestem uczonym, tym się nie zajmuję. Byłem pod wrażeniem zarówno zaangażowania, jak i liczby osób potrafiących myśleć oraz okazujących zaangażowanie i wytrwałość po złożeniu obietnicy. To doświadczenie bardzo pozytywne.

Dziękujemy Panu bardzo za rozmowę.

Przepraszam, być może trochę przedłużyłem.

Nie, nie, im dłużej, tym lepiej. Najmocniej dziękujemy.

Rozmowę przeprowadzili: Jerzy Kaczorowski (kjerzy@amu.edu.pl), Paweł Mleczko (pml@amu.edu.pl) i Krzysztof M. Pawałowski (kpa@amu.edu.pl).

Wiad. Mat. 55 (2) 2019, 417–422

Krystyna Jaworska (Warszawa)

Władze Polskiego Towarzystwa Matematycznego w kadencji 2020–2022

Zgodnie ze Statutem Polskiego Towarzystwa Matematycznego kadencja wszystkich władz PTM trwa trzy lata, obecna od 1 stycznia 2020 roku do 31 grudnia 2022 roku. Wybory władz naczelnych odbyły się 23 listopada 2019 roku na posiedzeniu Zgromadzenia Delegatów PTM w Warszawie, a wybory w oddziałach – na Walnych Zebraniach Oddziałów w okresie od 21 października 2019 roku do 14 lutego 2020 roku.

W dniu 31 grudnia 2019 roku Polskie Towarzystwo Matematyczne liczyło 1407 osób zrzeszonych w osiemnastu oddziałach.

Władze naczelne PTM

Zgromadzenie Delegatów jest najwyższą władzą PTM, a składa się z delegatów wybranych w oddziałach oraz członków Zarządu Głównego. Z głosem doradczym mają prawo uczestniczyć w nim członkowie honorowi oraz członkowie pozostałych władz naczelnych.

Liczba delegatów oddziału zależy od liczby członków oddziału niezalegających w płatności składek według stanu na ostatni dzień roku kalendarzowego poprzedzającego rok wyborczy.

Zarząd Główny. Jacek Miękisz (prezes, UW), Tomasz Downarowicz (wiceprezes, PWr), Klaudiusz Wójcik (wiceprezes, UJ), Krystyna Jaworska (sekretarz, WAT), Piotr Kowalczyk (skarbnik, UW), członkowie: Leokadia Białas-Cież (UJ), Małgorzata Makiewicz (USz), Dorota Mozyrska (PB), Jan Poleszczuk (IBIB PAN oraz NIO-PIB).

Komisja Rewizyjna. Krystyna Białek (UZ), Karol Gajda (PP), Jacek Jakubowski (UW), Jacek Rogowski (PŁ), Anna Szpila (URz).

Sąd Koleżeński. Stefan Jackowski (UW), Jerzy Jaworski (UAM), Stanisława Kanas (URz), Leszek Plaskota (UW), Krzysztof Szajowski (PWr), Aleksy Tralle (UWM), Paweł Walczak (UŁ).

Władze oddziałów oraz delegaci na Zgromadzenie Delegatów

Oddział Białostocki

– Zarząd: Małgorzata Hryniewicka (prezes), Zbigniew Bartosiewicz (wiceprezes), Agnieszka Stocka (sekretarz), Dorota Mozyrska (skarbnik), członkowie: Tomasz Czyżycki, Piotr Grzeszczuk.
– Komisja Rewizyjna: Anna Gomolińska, Anna Poskrobko (przewodnicząca), Rajmund Stasiewicz.
– Delegaci (3): Zbigniew Bartosiewicz, Małgorzata Hryniewicka, Ewa Schmeidel.
– Zastępcy delegatów: Tomasz Czyżycki, Anna Poskrobko, Rajmund Stasiewicz.

Oddział Częstochowski

– Zarząd: Tomasz Błaszczyk (prezes), Grzegorz Biernat (wiceprezes), Urszula Siedlecka (wiceprezes), Jarosław Siedlecki (sekretarz), Katarzyna Szota (skarbnik), członkowie: Andrzej Bogusławski, Andrzej Grzybowski, Jerzy Pisarek
– Komisja Rewizyjna: Anita Ciekot (przewodnicząca), Sylwia Lara-Dziembek, Edyta Pawlak-Kazior.
– Delegaci (2): Tomasz Błaszczyk, Katarzyna Szota.
– Zastępcy delegatów: Grzegorz Biernat, Jerzy Pisarek, Urszula Siedlecka, Jerzy Siedlecki.

Oddział Gdański

– Zarząd: Piotr Bartłomiejczyk (prezes), Andrzej Szczepański (wiceprezes), Agnieszka Bartłomiejczyk (sekretarz), Justyna Signerska-Rynkowska (skarbnik)
– Komisja Rewizyjna: Zdzisław Dzedzej, Grzegorz Graff, Zbigniew Szafraniec (przewodniczący).
– Delegaci (2): Agnieszka Bartłomiejczyk, Piotr Bartłomiejczyk.
– Zastępcy delegatów: Zdzisław Dzedzej.

Oddział Górnośląski

- Zarząd: Maciej Sablik (prezes); Michał Baczyński, Roman Ger, Waldemar Hołubowski, Tadeusz Trzaskalik (wiceprezesi), Łukasz Dawidowski (sekretarz), Wojciech Bielas (zastępca sekretarza), Dariusz Sokołowski (skarbnik), członkowie: Aleksander Błaszczyk, Józef Siwy, Katarzyna Stąpor, Tomasz Zgraja.
- Komisja Rewizyjna: Krzysztof Kozioł, Renata Suchanek, Joanna Zwierzyńska.
- Delegaci (4): Wojciech Bielas, Aleksander Błaszczyk, Roman Ger, Maciej Sablik.
- Zastępcy delegatów: Michał Baczyński, Dariusz Sokołowski, Katarzyna Stąpor, Tomasz Zgraja.

Oddział Kielecki

- Zarząd: Szymon Walczak (prezes), Elżbieta Zając (wiceprezes), Andrzej Lenarcik (skarbnik), członek: Zdzisław Piasta.
- Komisja Rewizyjna: Andrzej Chrzęszczyk, Sylwia Hożejowska, Mateusz Masternak.
- Delegaci (1): Szymon Walczak
- Zastępcy delegatów: nie wybrano.

Oddział Krakowski

- Zarząd: Marta Kornafel (prezes), Marcin Dumnicki (wiceprezes), Agnieszka Kowalska (sekretarz), Zofia Rożen (skarbnik), członkowie: Mariusz Jużyniec, Konrad Nosek, Agnieszka Rutkowska, Grzegorz Szulik.
- Komisja Rewizyjna: Antoni Leon Dawidowicz (przewodniczący), Jan Koroński, Marek Ptak.
- Delegaci (9): Krzysztof Ciesielski, Maciej Denkowski, Marcin Dumnicki, Marta Kornafel, Agnieszka Kowalska, Wojciech Mitkowski, Piotr Oprocha, Wojciech Słomczyński, Włodzimierz Zwonek.
- Zastępcy delegatów: Antoni Leon Dawidowicz, Anna Pelczar-Barwacz, Stanisław Domoradzki, Jacek Chmieliński, Agnieszka Rygiel, Mariusz Jużyniec, Grzegorz Kapustka, Piotr Kalita, Łukasz Struski, Rafał Czyż.

Oddział Lubelski

- Zarząd: Witold Mozgawa (prezes), Mariusz Bieniek (wiceprezes), Agnieszka Kozak-Prus (sekretarz), Beata Rodzik (skarbnik), członkowie: Piotr Kowalski, Łukasz Piasecki.

- Komisja Rewizyjna: Monika Budzyńska, Kazimierz Goebel, Zdzisław Rychlik.
- Delegaci (2): Witold Mozgawa, Zdzisław Rychlik.
- Zastępcy delegatów: Monika Budzyńska, Łukasz Piasecki, Piotr Kowalski.

Oddział Łódzki

- Zarząd: Maciej Czarnecki (prezes), Filip Strobin (wiceprezes), Marek Majewski (sekretarz/skarbnik), członkowie: Szymon Głąb, Grażyna Horbaczewska.
- Komisja Rewizyjna: Marek Badura (przewodniczący), Andrzej Rychlewicz, Zofia Walczak.
- Delegaci (3): Maciej Czarnecki, Marek Majewski, Jacek Rogowski.
- Zastępcy delegatów: Zofia Walczak, Filip Strobin, Adam Paszkiewicz.

Oddział Olsztyński

- Zarząd: Adam Doliwa (prezes), Artur Siemaszko (wiceprezes), Anna Szczepkowska (sekretarz), Jarosław Kosiorek (skarbnik), członek: Aleksy Tralle.
- Komisja Rewizyjna: Agnieszka Bojarska-Sokołowska, Marek Golasiński, Aleksandra Kiślak-Malinowska.
- Delegaci (1): Artur Woike.
- Zastępcy delegatów: Irena Morocka-Tralle.

Oddział Opolski

- Zarząd: Tadeusz Nadzieja (prezes), Janusz Czelakowski (wiceprezes), Alicja Dembczak-Kołodziejczyk (sekretarz/skarbnik).
- Komisja Rewizyjna: Maciej P. Wojtkowski (przewodniczący), Anna Lytova, Andrzej Spakowski.
- Delegaci (1): Tadeusz Nadzieja.
- Zastępcy delegatów: Alicja Dembczak-Kołodziejczyk, Anna Lytova.

Oddział Poznański

- Zarząd: Mieczysław Cichoń (prezes), Daria Bugajewska (wiceprezes), Alina Gleska (sekretarz), Marcin Anholcer (skarbnik), członkowie: Małgorzata Bednarska-Bzdęga, Karol Gajda, Mirosława Kołowska-Gawiejnowicz, Augustyn Markiewicz
- Komisja Rewizyjna: Jerzy Jaworski, Albert Kubzdela, Małgorzata Migda.
- Delegaci (9): Marcin Anholcer, Małgorzata Bednarska-Bzdęga, Daria Bu-

gajewska, Mieczysław Cichoń, Karol Gajda, Alina Gleska, Jerzy Jaworski, Wacław Marzantowicz, Paweł Mleczko.
- Zastępcy delegatów: Marcin Borkowski, Edyta Juskowiak, Piotr Maćkowiak, Augustyn Markiewicz, Janusz Migda, Małgorzata Migda, Piotr Kasprzak, Bartosz Naskręcki, Ryszard Urbański

Oddział Rzeszowski
- Zarząd: Stanisława Kanas (prezes), Barbara Pękala (wiceprezes), Edyta Trybucka (sekretarz/skarbnik).
- Komisja Rewizyjna: Renata Jurasińska (przewodnicząca), Svetlana Mincheva-Kamińska, Krzysztof Piejko.
- Delegaci (2): Stanisława Kanas, Edyta Trybucka.
- Zastępcy delegatów: Barbara Pękala, Anna Szpila.

Oddział Sądecki
- Zarząd: Anna Kochanek (prezes), Maria Potoniec (wiceprezes), Stanisława Zając (sekretarz), Katarzyna Chyclak (skarbnik), członkowie: Małgorzata Janisz, Grażyna Trojan.
- Komisja Rewizyjna: Krystyna Legutko, Marta Prusak, Paweł Wilczyński.
- Delegaci (1): Maria Potoniec.
- Zastępcy delegatów: Anna Kochanek, Małgorzata Janisz, Grażyna Trojan.

Oddział Szczeciński
- Zarząd: Andrzej Dąbrowski (prezes), Lucjan Szymaszkiewicz (wiceprezes), Monika Perl (sekretarz), Alicja Szymaszkiewicz (skarbnik), członkowie: Tomasz Jędrzejak, Małgorzata Makiewicz.
- Komisja Rewizyjna: Barbara Glanc (przewodnicząca), Zbigniew Szych, Arkadiusz Telesiński.
- Delegaci (2): Andrzej Dąbrowski, Małgorzata Makiewicz.
- Zastępcy delegatów: Monika Perl, Teresa Bury.

Oddział Toruński
- Zarząd: Sławomir Rybicki (prezes), Stanisław Kasjan (wiceprezes), Marta Kowalczyk (sekretarz/skarbnik), członkowie: Andrzej Rozkosz, Daniel Simson.
- Komisja Rewizyjna: Witold Kraśkiewicz (przewodniczący), Brunon Kamiński, Zygmunt Pogorzały.
- Delegaci (1): Sławomir Rybicki.
- Zastępcy delegatów: Krzysztof Frączek.

Oddział Warszawski

- Zarząd: Urszula Foryś (prezes), Barbara Roszkowska-Lech (wiceprezes), Adrian Łydka (skarbnik), członkowie: Piotr Achinger, Radosław Adamczak, Paweł Goldstein, Beata Jackowska-Zduniak, Janina Kotus, Paweł Strzelecki.
- Komisja Rewizyjna: Piotr Jaworski, Joanna Napiórkowska, Jan Rempała.
- Delegaci (8): Piotr Achinger, Danuta Ciesielska, Stefan Jackowski, Danuta Kołodziejczyk, Monika Piotrowska, Feliks Przytycki, Barbara Roszkowska-Lech, Paweł Strzelecki.
- Zastępcy delegatów: Piotr Jaworski, Agnieszka Kałamajska, Adrian Łydka, Zbigniew Peradzyński, Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel.

Oddział Wrocławski

- Zarząd: Maciej Paluszyński (prezes), Tomasz Grzywny (wiceprezes), Małgorzata Głogowska (sekretarz), Jakub Gismatullin (skarbnik), członkowie: Piotr Borodulin-Nadzieja, Dariusz Buraczewski, Jan Goncerzewicz, Grzegorz Karch, Paweł Krupski, Marcin Magdziarz.
- Komisja Rewizyjna: Krzysztof Burnecki, Ryszard Deszcz, Bogusław Hajduk, Krzysztof Szajowski.
- Delegaci (3): Tomasz Grzywny, Maciej Paluszyński, Krzysztof Szajowski.
- Zastępcy delegatów: Jan Goncerzewicz, Ryszard Deszcz, Bogusław Hajduk.

Oddział Zielonogórski

- Zarząd: Anna Karczewska (prezes), Krystyna Białek (wiceprezes), Ewa Sylwestrzak-Maślanka (sekretarz), Izabela Kurzydło (skarbnik), członkowie: Bogdan Szal.
- Komisja Rewizyjna: Jacek Bojarski, Andrzej Cegielski (przewodniczący), Zbigniew Świtalski.
- Delegaci (2): Krystyna Białek, Anna Karczewska.
- Zastępcy delegatów: Andrzej Cegielski, Ewa Synówka-Bejenka.

Krystyna Jaworska
Sekretarz Polskiego Towarzystwa Matematycznego
kjaworskaster@gmail.com

Wiad. Mat. 55 (2) 2019, 423–447

Laureaci nagród

Wojciech Kucharz

laureat Nagrody Głównej PTM im. Stefana Banacha za 2018 rok

Wojciech Kucharz pracuje naukowo od ponad czterdziestu pięciu lat. Studia matematyczne na Uniwersytecie Jagiellońskim ukończył z wyróżnieniem w 1974 roku. Tamże uzyskał w 1977 roku stopień doktora nauk matematycznych na podstawie rozprawy *Jety wystarczające i kiełki skończenie determinowalne*. Zajmuje się głównie teorią osobliwości oraz rzeczywistą geometrią algebraiczną i analityczną.

Jego początkowe artykuły (łącznie z opublikowaną pracą magisterską i doktorską) dotyczyły lokalnej teorii osobliwości odwzorowań różniczkowalnych i analitycznych. Na szczególną uwagę zasługuje (wspólna z Koikem) praca o różnych realizacjach dżetów niewystarczających, w której przedstawia kontrprzykład do hipotezy Thoma. Rezultat ten zaskoczył licznych matematyków, w tym samego Thoma.

W pracach napisanych samodzielnie i wspólnie z Jackiem Bochnakiem z lat siedemdziesiątych i osiemdziesiątych XX wieku, publikowanych m.in. w *Inventiones Mathematicae*, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* czy *Transactions of the American Mathematical Society* uzyskał wiele ważnych wyników o lokalnych i globalnych własnościach zbiorów i funkcji analitycznych, w tym o lokalnej analitycznej równoważności kiełków zbiorów algebraicznych i kiełków Nasha. Obecnie są one wykorzystywane w dowodach lokalnej topologicznej równoważności kiełków funkcji analitycznych i wielomianowych. Jego dwie prace, napisane wspólnie z Bochnakiem i Shiotą (i opublikowane w *Inventiones Mathematicae*), dostarczyły nowych technik dla badania globalnej analitycznej równoważności zbiorów analitycznych z izolowanymi osobliwościami i funkcji analitycznych z izolowanymi punktami krytycznymi. Metody te były następnie wykorzystywane przez licznych matematyków, zarówno w globalnej teorii osobliwości, jak i w innych badaniach, na przykład poświęconych siedemnastemu problemowi Hilberta dla rzeczywistych funkcji analitycznych.

Badania Kucharza skupiły się głównie na studiowaniu topologii rzeczywistych rozmaitości algebraicznych, w ramach nowo wówczas powstającej dziedziny – rzeczywistej geometrii algebraicznej. Przed pięćdziesięciu laty ten obszar badawczy w zasadzie nie istniał. Poza kilkoma rzadkimi i izolowanymi wynikami nie było wiadomo nic o rozmaitościach algebraicznych w $\mathbb{R}^n$ zdefiniowanych przez wielomiany o współczynnikach rzeczywistych (w przeciwieństwie do doskonale rozwiniętej geometrii algebraicznej zespolonej). Z początkiem lat siedemdziesiątych XX wieku mała grupa matematyków rozpoczęła intensywne badania rzeczywistej geometrii algebraicznej. Wiąże się to z szerokim programem rozwijania topologii algebraicznej i różniczkowej w szerokim kontekście geometrii algebraicznej. Program ten sięga wstecz do słynnej pracy Nasha o rzeczywistych rozmaitościach algebraicznych, która była inspiracją dla wielu matematyków – zarówno jej wyniki, jak i hipotezy w niej stawiane. Próby potwierdzenia tych hipotez czynione przez wybitnych matematyków były bezskuteczne aż do 1973 roku. Wtedy to Tognoli udowodnił jedną z nich. Wykazał, że każda zwarta rozmaitość gładka M jest dyfeomorficzna z pewnym nieosobliwym zbiorem algebraicznym, zwanym modelem algebraicznym dla M. Następnie Bochnak i Kucharz rozszerzyli ten wynik, wykazując istnienie (dla dowolnej rozmaitości różniczkowej dodatniego wymiaru) nieprzeliczalnej rodziny nieizomorficznych modeli. Powstał więc naturalny problem badania własności topologicznych i geometrycznych różnych modeli algebraicznych. Można wymienić kilka typowych aspektów tych badań:

– kwestia realizowania klas homologii przez podrozmaitości algebraiczne,
– studia nad strukturą zbioru odwzorowań regularnych między rozmaitościami algebraicznymi (zwłaszcza o wartościach w sferach),
– studia nad istnieniem struktury algebraicznej na wiązkach topologicznych,
– aproksymacja podrozmaitości różniczkowych przez podrozmaitości algebraiczne oraz kwestie aproksymacji i homotopii odwzorowań regularnych.

Kluczowe problemy dotyczące istnienia modelu algebraicznego zwartej rozmaitości gładkiej M, na którym różnego typu obiekty topologiczne mają opis algebraiczny, zostały podjęte i kontynuowane w następnych dekadach przez trzy pary badaczy: Benedettiego i Tognolego, Abkuluta i Kinga oraz Bochnaka i Kucharza. Otrzymali oni szereg fundamentalnych i spektakularnych wyników. Można śmiało pokusić się o stwierdzenie, że bez ich udziału trudno byłoby sobie wyobrazić topologię rzeczywistych rozmaitości algebraicznych jako samodzielną gałąź geometrii algebraicznej. Poniżej przybliżymy w zwięzły sposób osiągnięcia Wojciecha Kucharza związane z powyższymi zagadnieniami badawczymi, które uzyskał samodzielnie lub we współpracy z Jackiem Bochnakiem.

Bochnak i Kucharz rozwinęli nowe, kluczowe metody pracy z cyklami algebraicznymi i analitycznymi na rzeczywistych rozmaitościach algebraicznych i analitycznych. Połączyli oni techniki teorii bordyzmu w topologii różniczkowej z głębokimi rezultatami zespolonej geometrii algebraicznej. Ich prace przyczyniły się do dobrego zrozumienia funktora rzeczywistych cykli algebraicznych na rzeczywistych rozmaitościach algebraicznych. W serii swoich prac Kucharz przedstawił szczegółową analizę przeszkód dla algebraiczności cykli na rozmaitościach gładkich. Zajmował się także klasami homologii reprezentowanymi przez łukowo-symetryczne zbiory semialgebraiczne.

Bochnak i Kucharz w pracy opublikowanej w *Annals of Mathematics* w 1988 roku wprowadzili także funktor zespolonych cykli algebraicznych na rzeczywistych rozmaitościach algebraicznych, odgrywający ważną rolę w rzeczywistej geometrii algebraicznej. Został on użyty w 2005 roku przez Abkuluta i Kinga w ich dowodzie istnienia rozmaitości transcendentnych (tzn. gładkich podrozmaitości rzeczywistej przestrzeni rzutowej, które nie są izomorficzne ze zbiórem punktów rzeczywistych nieosobliwej zespolonej rzutowej rozmaitości algebraicznej). Ich istnienie nie jest oczywiste, a nawet dość długo sądzono, że takowe nie istnieją. Oryginalny dowód Abkuluta–Kinga był niekonstruktywny i działał tylko w wysokich wymiarach. Konstruktywny i znacznie uproszczony dowód został podany w dwóch pracach: przez Kucharza w 2009 roku oraz przez Kucharza i Simancę w 2010 roku. W istocie Kucharz znalazł rozmaitości transcendentne, podając *explicite* ich równania, a jego konstruktywny dowód obejmuje wszystkie wymiary większe niż trzy.

W serii prac z lat osiemdziesiątych i dziewięćdziesiątych XX wieku (w tym opublikowanych w *Annals of Mathematics* i *Publications Mathématiques de l'IHÉS*) Bochnak i Kucharz rozwinęli teorię rzeczywistych morfizmów algebraicznych i algebraicznych wiązek wektorowych na rzeczywistych rozmaitościach algebraicznych. Znaleźli też zaskakujące związki z teorią liczb i teorią moduli rzeczywistych rozmaitości abelowych.

Podkreślić należy również, że w swoich badaniach Bochnak i Kucharz wprowadzili szereg metod i technik, które umożliwiły im i innym matematykom rozwiązanie przedstawianych tu fundamentalnych problemów dotyczących topologii rzeczywistych rozmaitości algebraicznych. Wcześniej nie istniały techniki pozwalające odpowiedzieć na następujące kluczowe pytania, które Wojciech Kucharz podjął w swoim programie badawczym.

– Które odwzorowania ciągłe są homotopijne z rzeczywistymi morfizmami algebraicznymi?
– Które odwzorowania ciągłe można aproksymować rzeczywistymi morfizmami algebraicznymi?
– Które topologiczne wiązki wektorowe dopuszczają strukturę algebraiczną?

Liczne prace Kucharza podejmowały również inne tematy, jak na przykład klasy homologii reprezentowane przez rzeczywiste zbiory analityczne, przecięcia zupełne, rzeczywiste pierścienie holomorficzności, aproksymacja typu Rungego odwzorowań holomorficznych pomiędzy zespolonymi rozmaitościami algebraicznymi, formy kwadratowe itd. W każdym z tych obszarów Kucharz rozwinął oryginalne idee.

W ostatnich dziesięciu latach laureat rozwija nowy kierunek badań poświęcony nowej klasie obiektów rzeczywistej geometrii algebraicznej, w których konstrukcji istotną rolę odgrywają funkcje wymierne ciągłe lub klasy C^k, czyli tzw. funkcje *regulous* lub *k-regulous*. Są to funkcje dosyć bliskie funkcjom regularnym, powszechnie używanym w geometrii algebraicznej, ale które mają znacznie bardziej „giętkie" własności topologiczne. Na przykład udowodnił on, że zbiór ciągłych funkcji wymiernych między standardowymi sferami jest gęsty w zbiorze funkcji ciągłych. Analogiczny wynik dla funkcji regularnych jest znany tylko dla przypadku funkcji o wartościach w sferach wymiaru jeden, dwa i cztery. Inny jego wynik dowodzi gęstości zbioru ciągłych funkcji wymiernych z n-wymiarowej zwartej rozmaitości algebraicznej o wartościach w n-sferze, w zbiorze złożonym z wszystkich funkcji ciągłych. Analogiczne zdanie dla funkcji regularnych jest na ogół fałszywe.

Badanie takich funkcji doprowadziło do nowych pytań i zaskakujących rezultatów, które rzucają nowe światło na związki pomiędzy topologicznymi i algebro-geometrycznymi własnościami rzeczywistych rozmaitości algebraicznych. Kucharz był pierwszym matematykiem, który zdefiniował i badał tę klasę funkcji w tak ogólnym zakresie. Odtąd wielu uczonych zwróciło się ku temu nowemu kierunkowi, publikując liczne prace w najlepszych czasopismach matematycznych. Daje to podstawy do wyodrębnienia się tzw. *regulous geometry* jako odrębnej gałęzi rzeczywistej geometrii algebraicznej, a Wojciech Kucharz plasuje się na jej czele. Do tego nurtu należą jego liczne najnowsze prace. Wymieńmy cztery z nich: artykuł z *Journal of the European Mathematical Society* z 2014 roku poświęcony aproksymacji ciągłych funkcji wymiernych w sfery, wspólna praca z Kurdyką i Kollárem z *Mathematische Annalen* z 2018 roku poświęcona funkcjom wymiernym na krzywych oraz wspólna z Kurdyką z *Journal für die* *reine und angewandte Mathematik* z 2018 roku dotycząca stratyfikowanych algebraicznych wiązek wektorowych. W czwartej z nich, z *Mathematische Annalen* z 2018 roku, Kucharz zdefiniował jeszcze jedną, bardziej „giętką" klasę funkcji wymiernych, tzw. funkcji kawałkami regularnych.

Reasumując, Wojciech Kucharz pracuje nad problemami i zagadnieniami o fundamentalnym znaczeniu dla rozwoju rzeczywistej geometrii algebraicznej, a jego rozwiązania tych problemów stale cechuje oryginalność podejścia. Publikował swoje artykuły w czasopismach reprezentujących najwyższy poziom. Były one przedstawiane na posiedzeniach Paryskiej Akademii Nauk przez matematyków tej klasy, co Cartan, Thom czy Schwartz.

Wkład Wojciecha Kucharza do rozwoju badań nad topologią rzeczywistych rozmaitości algebraicznych jest istotny i trwały. W czasie ostatnich czterdziestu kilku lat rzeczywista geometria algebraiczna rozwinęła się w sposób imponujący. *Mathematical Reviews* uznał ten rozwój, tworząc w spisie dziedzin matematyki osobną sekcję Real Algebraic Geometry. Wojciech Kucharz był w ścisłym gronie twórców tego sukcesu.

Wspomnijmy też na koniec, że Kucharz został zaproszony (wspólnie z Krzysztofem Kurdyką) do przedstawienia wyników swoich prac na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w 2018 roku w Rio de Janeiro. Kongresy takie odbywają się co cztery lata i zaproszenie do wygłoszenia odczytu jest szczególnym wyróżnieniem.

Krzysztof Jan Nowak (Kraków)

Maksym Radziwiłł

laureat Nagrody Głównej PTM im. Stefana Banacha za 2018 rok

Maksym Radziwiłł urodził się 24 lutego 1988 roku w Moskwie. Rodzina przeniosła się do Polski w 1991 roku i zamieszkała w Warszawie, gdzie Maksym ukończył najpierw szkołę podstawową, a następnie, w 2006 roku, średnią – Liceum Francuskie w Warszawie. To właśnie w okresie licealnym, w wieku szesnastu lat, zainteresował się teorią liczb. Przeczytał wówczas książkę Władysława Narkiewicza *Teoria liczb* i duże wrażenie zrobiło na nim stwierdzenie, że teoria liczb jest głęboko powiązana z całą matematyką. W 2006 roku rozpoczął studia na Uniwersytecie McGilla w Montrealu, które ukończył z wyróżnieniem w 2009 roku. Jak sam mówi, w okresie studiów w Montrealu wiele miał do zawdzięczenia Andrew Granville'owi, który wprowadził go w tajniki teorii liczb. Po czteroletnich studiach doktoranckich na Uniwersytecie Stanforda pod kierunkiem Kannana Soundararajana uzyskał tamże stopień doktora w 2013 roku. Jego praca doktorska *Zero distribution and size of the Riemannn zeta-function* dotyczyła oszacowań momentów funkcji dzeta Riemanna. Uzyskał między innymi pierwsze najlepsze oszacowanie górne dla pewnego $p > 4$ (opublikowane w artykule [10]) i wspólnie z promotorem najlepsze dolne oszacowania dla wszystkich $p > 1$ w pracach [2, 6].

Staż podoktorski odbył w tak prestiżowym ośrodku, jak Institute for Advanced Studies w Princeton oraz na Rutgers University. W latach 2016–2018 pracował jako *assistant professor* na Uniwersytecie McGilla w Montrealu, a od 2018 roku pracuje na stanowisku profesora w Caltechu w Pasadenie. Maksym Radziwiłł jest wybitnym matematykiem, którego głównym (ale nie jedynym) obszarem działalności naukowej jest analityczna teoria liczb (z użyciem technik analizy harmonicznej, probabilistyki i teorii spektralnej). Mimo bardzo młodego wieku jest on już autorem ponad czterdziestu prac (wszystkie dostępne w serwisie arXiv.org) – z tego niemal trzydzieści ma status opublikowanych bądź przyjętych do druku. W zasadzie wszystkie jego prace publikowane są w najlepszych czasopismach matematycznych, wymieńmy kilka najznamienitszych: *Advances in Mathematics*, *Annals of Mathematics*, *Annals Scientifiques École Normale Supérieure*, *Duke Mathematical Journal*, *Geometric And Functional Analysis*, *Inventiones mathematicae*, *Journal of the European Mathematical Society*, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, czy *Proceedings of the London Mathematical Society*.

Przełomowe osiągnięcia Maksyma Radziwiłła są ważne zarówno z punktu widzenia teorii liczb jak i teorii ergodycznej. Doskonałym przykładem jest wybitna wspólna praca Radziwiłła i Kaisy Matomäki [7] o zachowaniu się funkcji multiplikatywnych na (typowych) krótkich przedziałach. Spróbujmy najpierw krótko opowiedzieć, jakie było (i jest) jej przełomowe znaczenie z punktu widzenia teorii ergodycznej.

Hipoteza Sarnaka z 2010 roku stanowi, że (μ poniżej oznacza klasyczną, arytmetyczną funkcję Möbiusa[1])

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(T^n x)\mu(n) = 0 \tag{1}$$

dla dowolnego homeomorfizmu T deterministycznego (tzn. o zerowej entropii) zwartej przestrzeni metrycznej X, dowolnej funcji ciągłej $f \in C(X)$ i dowolnego $x \in X$. Intuicja tej hipotezy jest w miarę oczywista – o funkcji μ myśli się jako o ciągu losowym (więcej o losowości za chwilę), więc ciąg ten nie może korelować z ciągiem deterministycznym. W latach 2010–2015 ukazało się wiele, często wybitnych, prac potwierdzających hipotezę Sarnaka w różnych klasach układów dynamicznych o zerowej entropii. Jednak ci ergodycy, którzy byli rzeczywiście blisko hipotezy Sarnaka, w 2015 roku zdali sobie sprawę, że w zasadzie sprawa jest beznadziejna, gdyż teoria ergodyczna nie będzie w stanie rozstrzygnąć prawdziwości hipotezy Sarnaka w tzw. modelach monoergodycznych układów skończonych o co najmniej dwóch elementach. Wtedy to właśnie na arXiv.org pokazała się wspomniana sensacyjna praca [7] (z „czystej" teorii liczb) o tym, że zachowanie „dobrej" (poniżej pojawi się termin „niepretensjonalnej") funkcji multiplikatywnej na typowym krótkim przedziale, zob. (4), jest takie, jakie jej zachowanie globalne. Dla ergodyków ważne było to, że praca rozstrzygała o prawdziwości hipotezy Sarnaka w modelach układów skończonych. Nie będzie przesadą stwierdzenie, że po 2015 roku wszystkie prace teorio-ergodyczne w mniej lub bardziej bezpośredni sposób używały twierdzenia Matomäki–Radziwiłła. Czy hipoteza Sarnaka jest jednak ważnym problemem z punktu widzenia matematyki? Według autora artykułu wyniki ostatnich lat pokazują, że zdecydowanie tak. Oryginalną motywacją Sarnaka było to, że słynna hipoteza Chowli

[1] Przypomnijmy, że $\mu(p_1 \dots p_k) = (-1)^k$ dla iloczynu różnych liczb pierwszych, $\mu(1) = 1$ oraz $\mu(n) = 0$ dla wszystkich liczb, które nie są bezkwadratowe. Inna klasyczna funkcja, która pojawi się w tym artykule, to funkcja Liouville'a $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$, przy czym $\Omega(n)$ jest liczbą dzielników pierwszych liczby n (liczoną wraz z krotnościami). Oczywiście $\mu(n) = \lambda(n)\mu^2(n)$. Hipotezy Sarnaka z μ i λ są równoważne.

z 1965 roku[2] – dla dowolnego $r \geqslant 0, 1 \leqslant a_1 < \dots < a_r$, $i_j \in \{1,2\}$ nie wszystkich równych dwa, zachodzi równość

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mu^{i_0}(n)\mu^{i_1}(n+a_1)\dots\mu^{i_r}(n+a_r) = 0 \tag{3}$$

– implikuje jego hipotezę. Z probabilistycznego punktu widzenia, w żądaniu (3) odnajdujemy zachowanie się podobne do ciągu zmiennych losowych niezależnych i rzeczywiście można w miarę łatwo wykazać, że hipoteza Chowli jest równoważna stwierdzeniu, że μ, jako punkt w przestrzeni shiftowej $(\{-1,0,1\}^{\mathbb{N}}, S)$, jest generujący dla miary, która jest relatywnie miarą Bernoulliego nad (naturalną) miarą wyznaczoną przez μ^2 (ta ostatnia funkcja to po prostu funkcja charakterystyczna zbioru liczb bezkwadratowych). Co może dziwić na pierwszy rzut oka, hipoteza Chowli jest stwierdzeniem „czysto" ergodycznym, a implikacja „Chowla $\Rightarrow$ Sarnak" ma dowód ergodyczny! Oczywiście sama powyższa implikacja nie stanowi jeszcze o wadze hipotezy Sarnaka. Lecz w tym samym 2015 roku Tao wykazał (kolejny sensacyjny rezultat), że jeśli zwykłe średniowanie w (3) oraz (1) zastąpić średniowaniem typu logarytmicznego, to (logarytmiczne) hipotezy Chowli i Sarnaka stają się równoważne. Dalsze badania wykazały, że z twierdzenia Tao wynika, ze hipoteza Sarnaka niemal implikuje hipotezę Chowli, a dokładniej implikuje hipotezę Chowli wzdłuż podciągu N-ów o pełnej gęstości (logarytmicznej).

Wróćmy teraz do krótkich przedziałów i spójrzmy na pracę [7] bardziej z punktu widzenia teorii liczb. Problematyka szacowania średniego wzrostu funkcji arytmetycznych należy do klasyki analitycznej teorii liczb. Nietrudno wskazać ważne motywacje. Dla przykładu, hipoteza Riemanna jest równoważna stwierdzeniu, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ zachodzi równość

$$\sum_{n=1}^{N} \mu(n) = \mathrm{O}_\varepsilon\big(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\big).$$

[2] Hipoteza Chowli, w wersji oryginalnej sformułowana dla funkcji Liouville'a, jest związana z ilościową hipotezą o nieskończoności par zbioru liczb pierwszych bliźniaczych, tzn. może być sformułowana jako zbieżność do odpowiedniej stałej z zadaną prędkością średnich korelacji funkcji von Mongoldta Λ, a dokładniej chodzi o relację

$$\sum_{n=1}^{N} \Lambda(n)\Lambda(n+2) = (2\Pi_2)\,N + o(N), \tag{2}$$

przy czym $\Pi_2 = \prod_{p\geqslant 3}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) = 0{,}66016\dots$ oznacza tzw. stałą liczb pierwszych bliźniaczych.

Na marginesie, gdybyśmy wymagali „tylko", że $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} \mu(n) = 0$, to otrzymalibyśmy warunek równoważny (!) twierdzeniu o rozmieszczeniu liczb pierwszych. Ważne jest również badanie „krótkich" sum postaci

$$\sum_{x<n\leqslant x+h} \mu(n) \tag{4}$$

dla $h = h(x) < x$. Z hipotezy Riemanna wynika, że sumy tego typu są równe $o(h)$ dla $h > x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ przy dowolnym $\varepsilon > 0$. Interesujące jest również badanie zachowania się powyższych sum dla „typowych"[3] przedziałów o długości h, co w istocie sprowadza się do badania średnich względem $x \in [X, 2X]$. Przykładowo Gao (w nieopublikowanej pracy) udowodnił – zakładając prawdziwość hipotezy Riemanna – że

$$\int_X^{2X} \Big| \sum_{x<n\leqslant x+h} \mu(n) \Big|^2 \mathrm{d}x = o(Xh^2)$$

przy $X \to \infty$, o ile $h \geqslant (\log X)^A$ dla pewnej dostatecznie dużej stałej A. Bez zakładania żadnych nieudowodnionych hipotez do niedawna wiadomo było jedynie, że powyższy wzór zachodzi dla $h > X^{1/6+\varepsilon}$. Podobne wyniki są prawdziwe dla reszty $\psi(x) - x$ w twierdzeniu o liczbach pierwszych, między innymi dzięki pracom Huxleya i Selberga. Od dłuższego czasu nie było istotnego postępu w tym zakresie. Dzięki przełomowej technice i rezultatom ze wspomnianej pracy [7] Radziwiłła i Matomäki, która (bardzo z grubsza) polega na rozwinięciu głębokiej analizy fourierowskiej wielomianów Dirichleta, tzn. funkcji postaci $\sum_{n\leqslant N} a_n n^{iy}$, wiele się jednak zmieniło. Przede wszystkim Matomäki i Radziwiłł rozwiązali problem zachowania się niepretensjonalnych funkcji multiplikatywnych (klasyczne funkcje arytmetyczne, jak funkcja Möbiusa, czy funkcja Liouville'a są takimi funkcjami) w tzw. typowych krótkich przedziałach, dowodząc, że jej „lokalne" zachowanie jest odbiciem zachowania „globalnego". Wykazali w szczególności, że dla obszernej klasy funkcji multiplikatywnych f, do której należą między innymi funkcje Möbiusa i Liouville'a, mamy

$$\int_X^{2X} \Big| \sum_{x<n\leqslant x+h} f(n) \Big|^2 \mathrm{d}x \leqslant \varepsilon X h^2$$

[3] Nie można oczywiście rozpatrywać wszystkich „krótkich" przedziałów: funkcja μ^2 zawiera dowolnie długie ciągi zer – co więcej, jeśli zgodzimy się, że funkcja ta wygląda jak ciąg losowy, to muszą się na niej pojawiać dowolne (dowolnie długie) ciągi o wartościach w zbiorze $\{-1, 0, 1\}$, przy czym „obowiązkowe" zera pochodzą z μ^2.

dla dowolnego $\varepsilon > 0$ oraz dla wszystkich takich h, że $H(\varepsilon) < h \leqslant X$, przy czym $H(\varepsilon)$ jest pewną stałą zależną wyłącznie od ε. Rzecz jasna najważniejszy jest tu bardzo duży dopuszczalny zakres zmienności h oraz fakt, że oszacowanie jest bezwarunkowe, to znaczy zostało udowodnione bez zakładania żadnych nieudowodnionych hipotez. Dla ilustracji postępu, który się tutaj dokonał, wystarczy zauważyć, że wynik Matomäki i Radziwiłła daje oszacowanie silniejsze od tego, które wykazał Gao przy założeniu hipotezy Riemanna! Powyższe twierdzenie (sformułowane dla ogólnej klasy funkcji f), jak i metoda dowodu, ma wiele ciekawych konsekwencji. Dla przykładu przytoczmy trzy z nich (dla ustalenia uwagi w przypadku funkcji Liouville'a).

- (Matomäki, Radziwiłł, Tao [8]) Dla dowolnego wyboru wartości $\varepsilon_j = \pm 1$, $j = 1, 2, 3$ mamy

  $$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\left|\{n \leqslant N : \lambda(n+j) = \varepsilon_j, j = 1,2,3\}\right| > 0$$

  (z pewnym zainteresowaniem należy odnotować, że w powyższej pracy używa się ponadto technik granic Banacha oraz grafów losowych). Wynik z tej pracy doczekał się sukcesywnych wzmocnień, aż do ostatnio anonsowanego twierdzenia, że złożoność funkcji Liouville'a jest superwielomianowa.
- (Matomäki, Radziwiłł, Tao [1]) Dla dowolnej liczby naturalnej k i dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $h(k, \varepsilon)$, że dla wszystkich $x \geqslant h \geqslant h(k, \varepsilon)$ zachodzi „uśredniona" hipoteza Chowli

  $$\sum_{1\leqslant h_1,\ldots,h_k\leqslant h} \left|\sum_{n\leqslant x} \lambda(n+h_1)\ldots\lambda(n+h_k)\right| \leqslant \varepsilon h^k x.$$

- (Matomäki, Radziwiłł [7]) Dla dowolnej dodatniej liczby ε istnieje taka stała $C = C(\varepsilon)$, że dla wszystkich dostatecznie dużych N przedział $[N, N + C\sqrt{N}]$ zawiera liczbę całkowitą, której wszystkie dzielniki pierwsze są mniejsze bądź równe N^ε.

We wspomnianej pracy [7] Matomäki i Radziwiłła dokonano też przełomu w rozumieniu hipotezy Chowli. Autorzy wykazali mianowicie, że

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \lambda(n)\lambda(n+1) < 1,$$

co jest pierwszym istotnym postępem od lat. Metoda Matomäki i Radziwiłła pojawia się wielu pracach, które kontynuują tematykę własności funkcji multiplikatywnych. We wspólnej pracy z Matomäki i Tao [1] na przykład rozstrzygnięto negatywnie hipotezę Elliotta – pewne uogólnienie hipotezy Chowli (a tak naprawdę sformułowano jej „właściwą" wersję – chodzi o subtelności w rozumieniu niepretensjonalności funkcji multiplikatywnych)[4].

Idee średniowania (hipoteza Chowli i hipoteza Elliota) z powyżej opisanych prac można też zauważyć w najnowszych badaniach Matomäki, Radziwiłła i Tao dotyczących korelacji rzędu dwa dla funkcji von Mangoldta (dwie obszerne prace [3, 4]). Przypuszczenie (2) jest szczególnym przypadkiem hipotezy Hardy'ego–Littlewooda, która (w uproszczonej formie) stanowi, że

$$\sum_{n=N}^{2N} \Lambda(n)\Lambda(n+h) = C(h)N + \mathrm{O}(N), \tag{5}$$

przy czym $C(h) = 2\Pi_2 \prod_{p|h,p>2} \frac{p-1}{p-2}$ dla h parzystych ($C(h) = 0$ dla h nieparzystych). Używając metody sit, można wykazać, że $\sum_{n=N}^{2N} \Lambda(n)\Lambda(n+h) = \mathrm{O}(C(h)N)$ jednostajnie względem $h \in [N, 2N]$. To spowodowało istotne zainteresowanie problemem, czy da się udowodnić równość (5) dla „wielu" h, a najlepszy wynik, należący do Mikawy i udowodniony w 1991 roku, dawał przedział $[N^{1/3}, N^{1-\varepsilon}]$, w którym „większość" h jest „dobrych". Jeden z głównych wyników pracy [3] daje oszacowania zarówno na błąd, który jest rzędu $\mathrm{O}(N \log^{-A} N)$, jak i obniża wykładnik $1/3$ do liczby $8/33$.

Wybitną pracą jest również niedawny artykuł [5], w którym wykazano bardzo silny brak korelacji funkcji Möbiusa (Liouville'a) z fazą wielomianową. Jest to piękny rezultat o niezależności struktur addytywnej i multiplikatywnej liczb całkowitych.

Na koniec wspomnijmy, że w dorobku Radziwiłła jest również praca dotycząca bilardów, a dokładniej, bilardów prostokątnych $D \subset \mathbb{R}^2$, w których stosunek boków wynosi $\sqrt{\alpha}$. Wiadomo, że w takim wypadku laplasjan Δ (działający na $C^2(D)$) ma czysto dyskretne widmo, a jego wartości własne λ_j są postaci $\alpha m^2 + n^2$, przy czym $m, n \geqslant 1$, co w przypadku α niewymiernego daje widmo proste: $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$. Znany jest też rozkład wartości własnych, a głębokie twierdzenie Eskina, Margulisa i Mozesa (z 2005 roku) orzeka, że w przypadku diofantycznym rozkład łączny $\{i, j : \max(\lambda_i, \lambda_j) \leqslant T, a \leqslant \lambda_i - \lambda_j \leqslant b\}$ jest poissonowski. W pracy [9] udowodniono jeszcze jeden aspekt poissonowski rozkładu wartości własnych, dowodząc, że funkcja

$$N \mapsto \min(\lambda_{i+1} - \lambda_i : 1 \leqslant i \leqslant N)$$

ma – na zbiorze pełnej miary zawierającym wszystkie liczby algebraiczne stopnia dwa – wartość w przybliżeniu równą $1/N$.

[4] W pracy tej, z punktu widzenia teorii ergodycznej, wykazano, że funkcja Möbiusa (w odpowiednim układzie dynamicznym) generuje widmo ciągłe.

W uznaniu zasług dla rozwoju teorii liczb Radziwiłł (wraz z Matomäki) otrzymał nagrodę Ramanujana za 2016 rok. Jest on również laureatem Sloan Fellowship (lata 2017–2019) oraz został *invited session speaker* na Kongresie Matematycznym w Rio de Janeiro w 2018 roku. Otrzymał również Nagrodę Coxetera–Jamesa Kanadyjskiego Towarzystwa Matematycznego. W 2018 roku otrzymał też prestiżową New Horizons Prize for Early-Career Achievement in Mathematics.

Maksym Radziwiłł jest poliglotą – doskonale zna języki angielski, francuski, rosyjski oraz oczywiście polski. Przez wiele lat jego drugą (na szczęście dla matematyki) pasją była informatyka. W tej chwili komputery dalej go interesują, ale już raczej jako hobby. Przepada za muzyką barokową.

Podziękowania. Podczas pisania tego artykułu istotnie korzystałem z wniosku o nagrodę im. Stefana Banacha dla laureata, napisanego wspólnie z profesorami Jerzym Kaczorowskim i Krzysztofem Frączkiem.

Cytowane prace laureata

[1] *An averaged form of Chowla's conjecture*, Algebra Number Theory 9 (2015), 2167–2196 (współautorzy: K. Matomäki, T. Tao).

[2] *Continuous lower bounds for moments of zeta and L-functions*, Mathematika 59 (2013), 119–128 (współautor: K. Soundararajan).

[3] *Correlations of the von Mangoldt and higher divisor functions I. Long shift ranges*, Proc. Lond. Math. Soc. 118 (2018), nr 2, 284–350 (współautorzy: K. Matomäki, T. Tao).

[4] *Correlations of the von Mangoldt and higher divisor functions II. Divisor correlations in short ranges*, Math. Ann. 374 (2019), nr 1-2, 793–840 (współautorzy: K. Matomäki, T. Tao).

[5] *Fourier uniformity of bounded multiplicative functions in short intervals on average*, ukaże się w Invent. Math. (współautorzy: K. Matomäki, T. Tao).

[6] *Moments and distribution of central L-values of quadratic twists of elliptic curves*, Invent. Math. 202 (2015), 1029–1068 (współautor: K. Soundararajan).

[7] *Multiplicative functions in short intervals*, Ann. of Math. 183 (2016), nr 2, 1015–1056 (współautor: K. Matomäki).

[8] *Sign patterns of the Liouville and Möbius functions*, Forum Math. Sigma 4 (2016), 14–44 (współautorzy: K. Matomäki, T. Tao).

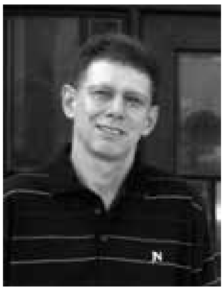
[9] *Small gaps in the spectrum of the rectangular billiard*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. 50 (2017), nr 4, 1283–1300 (współautorzy: V. Blomer, J. Bourgain, Z. Rudnick).

[10] *The 4.36th moment of the Riemann zeta-function*, Int. Math. Res. Not. IMRN 18 (2012), 4245–4259.

Mariusz Lemańczyk (Toruń)

Marek Rutkowski

laureat Nagrody Głównej PTM im. Hugona Steinhausa za 2018 rok



W uzasadnieniu werdyktu jurorzy stwierdzili, że „[n]agrodę Główną PTM im. Hugona Steinhausa za 2018 rok otrzymał prof. dr hab. Marek Rutkowski z Wydziału Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej i The University of Sydney za całokształt dorobku ze szczególnym uwzględnieniem zastosowań metod stochastycznych w modelowaniu rynków finansowych. Marek Rutkowski jest światowej klasy specjalistą z analizy stochastycznej i jej zastosowań w matematyce finansowej. Jest autorem pięciu monografii, pięćdziesięciu dwóch artykułów naukowych w czasopismach i dwudziestu trzech rozdziałów w książkach z zakresu analizy stochastycznej i jej zastosowań. W opinii wybitnego specjalisty z metod stochastycznych Marka Daviesa z Imperial College London, monografia Rutkowskiego z Markiem Musielą z 1998 roku jest prawdopodobnie najlepszą książką z tej tematyki. Równie fundamentalne znaczenie ma druga monografia, napisana wspólnie z Tomaszem R. Bieleckim, poświęcona modelowaniu ryzyka kredytowego. Również publikacje naukowe laureata często wyznaczają nowe kierunki badań, na przykład praca z Bieleckim z 2015 roku dotycząca wyceny instrumentów pochodnych dla nieliniowej dynamiki rynku finansowego. Rutkowski, zajmując się ponad dwadzieścia pięć lat matematyką finansową, uzyskał wiele cennych wyników w tej dziedzinie, dotyczących modelowania stóp procentowych, ryzyka kredytowego, optymalnej realizacji i zabezpieczenia kontraktów oraz wyceny opcji walutowych. Metody badawcze laureata cechuje użycie zaawansowanego i różnorodnego aparatu matematycznego. W dorobku Rutkowskiego są również wybitne prace «czysto» matematyczne dotyczące m.in. istnienia mocnych rozwiązań równań stochastycznych, czasów lokalnych semimartyngałów i ich dekompozycji oraz gier wieloosobowych. Laureat miał znaczący wpływ na rozwój matematyki finansowej w Polsce, m.in. kierując dużym zespołem matematyków w grancie zamówionym przez KBN".

Marek Rutkowski jest wychowankiem Politechniki Warszawskiej, gdzie studiował w latach 1971–1976 i pod kierunkiem Agnieszki Plucinskiej napisał pracę doktorską, którą obronił w 1980 roku, a habilitował się osiem lat poźniej. Pracował na Politechnice Warszawskiej oraz w Instytucie Matematycznym PAN. W latach 1991–1993 oraz 1996–1997 pracował jako *research associate* i *senior research associate* na Uniwersytecie Nowej Południowej Walii (UNSW) w Sydney w Australii. Od czerwca 2004 roku Marek Rutkowski pracuje na stałe w Sydney, początkowo jako *associate professor* na UNSW, a od 2009 roku jako kierownik Katedry Matematyki Finansowej na Sydney University.

Marek Rutkowski jest światowej klasy ekspertem w matematyce finansowej i teorii procesów stochastycznych. Specjalizuje się m.in. w teorii arbitrażu, modelach stóp procentowych, teorii ryzyka kredytowego, teorii stochastycznych równań różniczkowych w przód i w tył, procesach stabilnych oraz zagadnieniach nieliniowego stopowania optymalnego. Jego badania położyły fundamenty pod budowę matematycznych modeli stopy procentowej i ryzyka kredytowego. Jako jeden z pierwszych w Polsce zajał się matematyką finansową i przyczynił się do rozwoju tej dziedziny – najpierw w Polsce, a potem w Australii. W jego pracach trudne konstrukcje matematyczne zawsze są wynikiem głębokiego namysłu nad naturą rynków finansowych i rzeczywistymi regułami ich funkcjonowania. Ta postawa pokory wobec rzeczywistości na pewno wspólna jest z podejściem Hugona Steinhausa do zastosowań matematyki. Jest autorem przeszło sześćdziesięciu prac naukowych oraz czterech monografii. Szczególnie ważna była jego monografia [3] napisana wspólnie z Markiem Musielą (istotnie rozbudowana wersja pierwszego wydania z 1997 roku). Książka ta stała się standardowym źródłem dla matematyków i praktyków pracujących w instytucjach finansowych.

Swoje podejście do matematyki finansowej Marek Rutkowski przekazał siedmiu doktorantom i ponad czterdziestu magistrom (włączając tak zwanych *honours students*) na Politechnice Warszawskiej, na Oxford University, UNSW i Sydney University.

Wkład Marka Rutkowskiego do rozwoju matematyki finansowej jest szeroko znany i doceniony na świecie. Był redaktorem chyba wszystkich liczących się czasopism z dziedziny matematyki finansowej, m.in. *Finance and Stochastics*, *Mathematical Finance*, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, *International Journal of Portfolio Analysis and Management*, *Journal of Financial Engineering* oraz *Probability, Uncertainty and Quantitative Risk*. Lista zaproszeń do wygłoszenia wykładu na prestiżowych konferencjach i w czołowych ośrodkach badań nad matematyką finansową jest zbyt długa, żeby je tu wyliczać.

Monografie autorstwa Marka Rutkowskiego

[1] *Credit risk modelling*, Osaka University, CSFI Lecture Notes Series 02, Osaka 2009 (współautorzy: T. R. Bielecki, M. Jeanblanc).

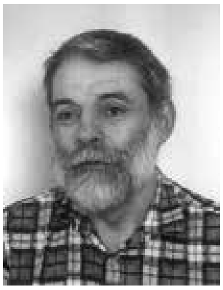
[2] *Credit risk: modeling, valuation and hedging*, Springer, Berlin 2002 (współautor: T. R. Bielecki).

[3] *Martingale methods in financial modelling*, second edition, Springer, Berlin 2007 (współautor: M. Musiela).
[4] *Matematyka finansowa. Instrumenty pochodne*, WNT, Warszawa 2003 (współautorzy: J. Jakubowski, A. Palczewski, Ł. Stettner).

Ben Gołdys (Sydney), *Szymon Peszat* (Kraków)

Michał Krych

laureat Nagrody Głównej PTM im. Samuela Dicksteina za 2018 rok



Nagroda Główna PTM imienia Samuela Dicksteina przyznawana jest za działalność w zakresie szeroko rozumianej kultury matematycznej. Za 2018 rok otrzymał ją Michał Krych z Uniwersytetu Warszawskiego za całokształt działalności w dziedzinie edukacji matematycznej i popularyzacji matematyki ze szczególnym uwzględnieniem czterdziestu siedmiu lat pracy w komitetach Olimpiady Matematycznej.

Michał Krych, laureat XVII Olimpiady Matematycznej, a rok wcześniej wyróżniony w finale Olimpiady, w 1972 roku (wkrótce po ukończeniu studiów matematycznych na UW) wszedł w skład Komitetu Okręgowego OM w Warszawie. Od 1992 roku, czyli od XLIV Olimpiady, jest przewodniczącym tego Komitetu. W 2007 roku został włączony w skład Komitetu Głównego OM, w którym przez dwanaście lat pełnił funkcję wiceprzewodniczącego.

Olimpiada Matematyczna jest najstarszym i niezwykle prestiżowym ogólnopolskim konkursem matematycznym dla młodzieży szkolnej. Udział w niej jest dla licealistów znakomitym wstępem do poważnych związków z matematyką. Wielu zawodowych matematyków w młodości startowało w Olimpiadzie, liczni odnosili sukcesy.

Czterdzieści siedem lat aktywnej pracy na rzecz Olimpiady Matematycznej – ta liczba robi niesamowite wrażenie. Niewykluczone, że przez „olimpijskie ręce" Michała Krycha przeszły pewne osoby oraz ich dzieci i ich wnuki...

Praca w Komitetach Olimpiady Matematycznej jest bardzo odpowiedzialnym zadaniem. Zadania olimpijskie są trudne, rozwiązania napisane przez młodzież niejednokrotnie wyjątkowo skomplikowane i trzeba się wykazać odpowiednimi umiejętnościami, by te prace rzetelnie ocenić, a nieraz wymaga to bardzo wiele czasu. Oddzielną sprawą jest przygotowanie treści zadań, nad czym czuwa Komitet Główny. Zadania nie mogą być za trudne, ale i nie za łatwe. Nie mogą być wcześniej młodzieży znane. Muszą być starannie i przejrzyście zredagowane. Ponadto praca w tych komitetach jest związana z licznymi kontaktami z młodzieżą, którą warto odpowiednio zachęcić do matematyki. I w tym wszystkim rola Michała Krycha była i jest niebagatelna.

Z okręgu objętego działalnością Komitetu w Warszawie (województwa mazowieckie i podlaskie) w Olimpiadzie startuje najwięcej uczestników. Praca w tym Komitecie, a przewodniczenie w szczególności, to wyjątkowe wyzwanie, gdyż z jednej strony ma się do czynienia z młodzieżą z renomowanych warszawskich szkół, a z drugiej z licznymi uczniami z pozawarszawskich szkół, którzy nie są tak jak ich rówieśnicy „trenowani olimpijsko", ale powinni być odpowiednio docenieni. I w Warszawie się to udaje.

Krych rozpoczął pracę w Komitecie Głównym w 2007 roku. Wtedy zakończyła się poprzednia kadencja Komitetu i tak się złożyło, że niemal żaden z członków nie zgodził się wejść w jego skład na kolejną. Taka sytuacja zdarzyła się pierwszy raz w historii Olimpiady; zazwyczaj wymiana kadr odbywała się stopniowo. I powstał poważny kłopot. Powołanie Komitetu złożonego niemal wyłącznie z osób zupełnie nowych, nie orientujących się w licznych niuansach olimpijskich mogło spowodować bardzo złe skutki dla działania Olimpiady. Na szczęście Michał Krych, znający całą masę zagadnień pracy olimpijskiej od podszewki, zgodził się w nowym Komitecie Głównym pełnić funkcję wiceprzewodniczącego. W tym, że Olimpiada utrzymała dotychczasowy poziom, jego rola była kluczowa. Jako osoba od lat związana z Olimpiadą niejednokrotnie dochodziłem do wniosku, że bez Michała Krycha trudno byłoby sobie wyobrazić funkcjonowanie Olimpiady w ostatnim dziesięcioleciu. Liczba spraw, w szczególności administracyjnych, nad którymi trzeba czuwać, jest przeogromna – trzeba pewne problemy pokonać i zrobić to umiejętnie.

Od 2011 roku organizowane są Olimpijskie Warsztaty dla Nauczycieli. Finansowane przez anonimowego sponsora, przeznaczone są dla nauczycieli, którzy pracują w szkołach w mniejszych ośrodkach, oddalonych od centrów akademickich. Raz w roku, jesienią, kilkadziesiąt osób przyjeżdża do Krakowa i bierze udział w specjalnie dla nich zorganizowanych zajęciach. Począwszy od drugich warsztatów, Michał Krych regularnie na nie przyjeżdża i wygłasza wykłady. Jedynie na pierwszych warsztatach nie był obecny, ale współpracował wtedy przy układaniu ich programu naukowego.

Praca Michała Krycha przy konkursach matematycznych nie ogranicza się do zawodów dla uczniów. Od ponad ćwierć wieku organizowane są przez University College of London *International Mathematics Competition for University Students* dla studentów wyższych uczelni z całego świata. Michał Krych regularnie jeździ na te zawody jako opiekun reprezentacji Uniwersytetu Warszawskiego, będąc jednocześnie (jak i inni opiekunowie) członkiem jury. Rola Michała Krycha w tym jury jest szczególna – jest jednym z kilku „najważniejszych" jurorów, włączanych również w skład jury d'appel.

Michał Krych bierze udział w licznych konferencjach popularyzujących matematykę i wygłasza tam interesujące wykłady. Wykładał na jedenastu Szkołach Matematyki Poglądowej organizowanych przez Ośrodek Kultury Matematycznej. Od 2008 roku corocznie odbywają się konferencje Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej, w których uczestniczy około stu pięćdziesięciu osób, w większości nauczycieli matematyki. Krych na prawie wszystkich tych konferencjach dzielił się swoją wiedzą i doświadczeniami. Przedstawiał również wykłady na konferencjach Stowarzyszenia Nauczycieli Matematyki.

Michał Krych nie tylko mówi o matematyce – także pisze. Jest autorem kilkunastu artykułów w czasopismach popularyzujących matematykę: *Delta*, *Matematyka–Społeczeństwo–Nauczanie* oraz *Matematyka Poglądowa*.

Przez osiemnaście lat (w latach 1989–2006) Michał Krych był członkiem Komitetu Redakcyjnego *Wiadomości Matematycznych* (tomy 28–42). Pełnił funkcję wicedyrektora Instytutu Matematyki UW. Wchodził w skład Zarządu Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej.

Krych przez wiele lat uczył matematyki w klasach uniwersyteckich w Liceum im. K. Gottwalda (później im. St. Staszica) w Warszawie. Jest autorem znakomitego skryptu z analizy matematycznej dla młodzieży. Pierwsza część została wydana w formie książkowej przez Wydawnictwo Prószyński i S-ka. Druga i trzecia część są dostępne w Internecie. Inna książka Krycha to *Analiza matematyczna dla ekonomistów*, wydana przez Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego.

Przy tej okazji warto napisać o jeszcze jednym aspekcie działalności Michała Krycha na rzecz kultury matematycznej. Michał Krych jest autorem recenzji podręczników czy monografii, publikowanych w różnych czasopismach. I potrafi umiejętnie, konkretnie i rzetelnie dobre pochwalić, a niedobre skrytykować. Nie wszyscy mają odwagę poddawać naprawdę złe pozycje odpowiedniej krytyce... Trudno uwierzyć, ale wydawane są książki, w których czytamy, że liczba $\frac{1}{6}$ jest wymierna, ale 0,16666... niewymierna. Możemy też spotkać się z definicją asymptoty „[a]symptotą krzywej jest taka prosta, do której krzywa zbliża się nieskończenie, ale jej nie przecina. Asymptotycznie zbliżają się do siebie tory kolejowe przy tym samym peronie na dużym dworcu". Przed takimi pozycjami należy publicznie ostrzegać. Polecam dwie recenzje autorstwa Krycha.

Pierwsza, napisana wspólnie z Michałem Misiurewiczem – skryptu *Matematyka. Teoria i zbiór zadań* ukazała się w tomie 20 (1978) *Wiadomości Matematycznych*, druga – książki *Matematyka od podstaw do matury* – na stronie internetowej Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej.

Skoro o recenzjach mowa – Krych jest rzeczoznawcą MEN, opiniującym przed dopuszczeniem do użytku szkolnego podręczniki szkolne. Jest recenzentem rzetelnym i dokładnym. Jeśli na redakcyjnej stronie podręcznika zobaczymy wśród czwórki recenzentów ministerialnych nazwisko Michała Krycha, możemy mieć pewność, że książka została wcześniej sprawdzona bardzo dokładnie. A na to, by wszystkie uwagi recenzentów zostały uwzględnione, rzeczoznawcy zazwyczaj już nie mają wpływu...

Michał Krych był członkiem zespołu przygotowującego w ostatnich latach nową podstawę programową z matematyki. Rzecz jasna, jak to zwykle bywa z takimi zespołowymi dziełami, pewne rzeczy będą się podobać bardziej, inne mniej. Na jedną rzecz chcę jednak zwrócić uwagę. W końcu, po kilkudziesięciu latach (!), zgodnie z Rozporządzeniem Ministra Edukacji Narodowej, od 1 września 2018 roku uczniowie powinni używać powszechnie przyjętych oznaczeń zbiorów liczbowych, a w szczególności zbiór liczb całkowitych oznaczać przez $\mathbb{Z}$ (a nie $\mathbb{C}$) i zbiór liczb wymiernych przez $\mathbb{Q}$ (a nie $\mathbb{W}$). Jest to osobista zasługa Michała Krycha.

By pełniej przedstawić jego sylwetkę jako matematyka, dodam, że w pracy naukowej zajmował się on teorią układów dynamicznych. Jego najczęściej cytowana praca, napisana wspólnie ze sławą w tym dziale matematyki, Robertem Devaneyem, *Dynamics of* $\exp(z)$, opublikowana w *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, ma w bazie MathSciNet 77, a bazie Google Scholar – 212 cytowań.

Pierwszym w historii laureatem Nagrody PTM im. S. Dicksteina był Stefan Straszewicz, pierwszy przewodniczący Komitetu Głównego Olimpiady Matematycznej. Wymownym zbiegiem okoliczności jest, że w roku siedemdziesięciolecia Olimpiady Nagroda ta trafiła w ręce Michała Krycha.

Krzysztof Ciesielski (Kraków)

Piotr Miska

laureat Nagrody PTM dla Młodych Matematyków za 2018 rok

Piotr Miska uczęszczał do IV LO im. Stanisława Staszica w Sosnowcu do klasy o profilu matematyczno-fizyczno-informatycznym. W 2010 roku rozpoczął studia na Wydziale Matematyki i Informatyki UJ na kierunku matematyka. Znam go od trzeciego roku studiów, gdy uczęszczał na prowadzone przeze mnie ćwiczenia z teorii liczb dla sekcji teoretycznej. Już wtedy zrobił na mnie bardzo dobre wrażenie, rozwiązując zadania, które wymagały nietuzinkowego podejścia i pomysłowości. Bez wahania zgodziłem się zostać opiekunem jego pracy magisterskiej, którą obronił w 2015 roku. Praca *Arithmetic properties of the sequence of derangements and its generalizations* zdobyła I nagrodę w LIX konkursie prac studenckich z matematyki im. J. Marcinkiewicza w tym samym roku. Obecnie laureat finalizuje przygotowanie rozprawy doktorskiej na Wydziale Matematyki i Informatyki UJ.

Zainteresowania Piotra Miski dotyczą badania jakościowego zachowania p-adycznych waluacji ciągów pochodzenia kombinatorycznego, zbiorów ilorazów podzbiorów zbioru liczb naturalnych oraz ich własności gęstościowych w ciałach p-adycznych. Tematyka badań jest stosunkowo nowa, ale bardzo interesująca i rozwijana w wielu ośrodkach naukowych na świecie.

Pomimo młodego wieku laureat ma już dostrzegalny dorobek naukowy potwierdzony publikacjami w czasopismach o zasięgu międzynarodowym. Jest autorem lub współautorem jedenastu prac, które ukazały lub ukażą się w takich czasopismach, jak *Acta Arithmetica*, *Journal of Number Theory*, *Discrete Mathematics*, *Monatshefte für Mathematik*, *Experimental Mathematics*. Poniżej opiszę pokrótce jego najciekawsze wyniki.

W swoich pracach odpowiedział na wiele hipotez dotyczących p-adycznych własności klas ciągów rekurencyjnych. W szczególności, w pracy [1] rozstrzygnął hipotezę postawioną przed Amdeberhana, Callana i Molla i dotyczącą p-adycznego zachowania, rozważanego już przez Ramanujana, tzw. ciągu sum Schenkera. Wynik tej pracy uogólnił na znacznie szerszą klasę ciągów w pracy [3], w której rozpatrywał ciągi uogólnionych sum Schenkera skojarzonych z ustalonym wielomianem $h \in \mathbb{Z}[x]$.

W pracy [4] przeprowadził drobiazgową analizę własności arytmetycznych ciągów zliczających permutacje bez punktów stałych, tzw. nieporządków. Ciąg nieporządków jest klasycznym obiektem w analizie kombinatorycznej.

Za najciekawszy wynik pracy [4] uważam opis waluacji p-adycznych liczb nieporządków. Pewne dalsze wyniki w tym kierunku uzyskał w artykule [9], gdzie rozważano tzw. r-nieporządki.

W pracy [6] rozstrzygnął hipotezy sformułowane przez wielu matematyków zajmujących się jakościowym opisem waluacji p-adycznych liczb Stirlinga drugiego rodzaju. Przypomnijmy, że $S(n,k)$ jest liczbą podziałów zbioru n-elementowego na k niepustych podzbiorów. W cytowanej pracy autor wykazał, że dla dowolnej dodatniej liczby naturalnej k i liczby pierwszej $p \in \mathbb{P}$ istnieją takie wartości $m_0 \in \mathbb{N}_+$ i $\mu \in \mathbb{N}$, że dla dowolnej liczby naturalnej $m \geqslant m_0$ istnieje dokładnie μ istotnie niestałych klas modulo $p^{m-1}(p-1)$. Niestałość klasy modulo $p^{m-1}(p-1)$ jest równoważna nieskończoności zbioru $\{v_p(S(n,k)) : n \equiv a \pmod{p^{m-1}(p-1)}\}$. Ponadto dla $m \geqslant m_0$ każda niestała klasa modulo $p^{m-1}(p-1)$ zawiera dokładnie jedną niestałą klasę modulo $p^m(p-1)$.

Tematyka opisu ilościowego waluacji ciągów interesujących z kombinatorycznego punktu widzenia pojawiła się również w pracy [2], w której autorzy podali jawny wzór na waluację 2-adyczną splotu Cauchy'ego 2^s, przy czym $s \in \mathbb{N}$, egzemplarzy ciągu Prouheta–Thuego–Morse'a (co w szczególności dowodzi, że rozważane sumy nie przyjmują wartości zero).

W dowodach cytowanych twierdzeń zastosowano kombinację dwóch metod – opracowaną przez laureata nagrody metodę tzw. rozkładu pseudo-wielomianowego modulo p oraz techniki p-adycznych funkcji analitycznych. W kontekście liczb Stirlinga umożliwiło to uzyskanie wyników istotnie mocniejszych niż wyniki uzyskane do tej pory. Siłą stosowanych metod jest elastyczność, co pozwala zastosować je do prowadzonych obecnie badań p-adycznych własności ogólnych ciągów zliczających klasy permutacji.

Druga ścieżka badawcza dotyczy badania p-adycznej gęstości zbioru ilorazów podzbiorów liczb naturalnych. Praca [7] dotyczy gęstości zbioru ilorazów elementów zbioru $S_m^n = \{x_1^n + \cdots + x_m^n : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}\}$ w ciele liczb p-adycznych $\mathbb{Q}_p$. Znane wyniki obejmowały tylko przypadek, gdy $n \in \{2,3\}$. Laureat wraz ze współpracownikami uzyskali wyniki dla dowolnego wykładnika n, w pełni klasyfikując pary (n,m) dodatnich liczb naturalnych, dla których zbiór ilorazów elementów zbioru S_m^n jest gęsty w $\mathbb{Q}_p$. Ponadto w pracy [8] uzyskano pewne ogólne wyniki dotyczące p-adycznej gęstości ilorazów zbiorów pochodzących ze skończonych partycji zbioru liczb naturalnych.

Warto również wspomnieć o najnowszej pracy Piotra Miski [5], gdzie analizuje się występowanie skończonych ciągów cyfr w rozwinięciach na ułamki łańcuchowe pierwiastków z liczb pierwszych. W szczególności w cytowanej pracy udowodniono, że dla dostatecznie dużych N liczb pierwszych $p \leqslant N$ o tej własności, że w rozwinięciu $\sqrt{p}$ na ułamek łańcuchowy występują trzy kolejne cyfry 1, jest co najmniej $N \log^{-3/2} N$. Jest to istotne wzmocnienie wyniku Mariusza Skałby, który – przy założeniu hipotezy Gaussa (istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych d, że $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ ma liczbę klas równą 1) – wykazał, że liczb pierwszych p, dla których w rozwinięciu na ułamek łańcuchowy $\sqrt{p}$ występują dwie kolejne jedynki, jest nieskończenie wiele.

Ten krótki opis wyników laureata pokazuje, że jest on osobą mocno zaangażowaną w pracę naukową i, co ważne, potrafi uzyskać nietrywialne rezultaty dotyczące różnorodnych problemów. Prowadzone przez niego badania i otrzymane wyniki zaowocowały wieloma nagrodami. Jak już wspomniano wyżej, jego praca magisterska zdobyła I miejsce w LIX konkursie prac studenckich z matematyki im. J. Marcinkiewicza w 2015 roku. Był on laureatem Stypendium im. Franciszka Leji w roku akademickim 2015/2016 oraz Stypendium im. Michała Jakuba Łyska w roku akademickim 2016/2017, przyznawanych najlepszym studentom i doktorantom na Wydziale Matematyki i Informatyki UJ. Został doceniony przez Fundację na rzecz Nauki Polskiej, która przyznała mu Stypendium Start za 2018 rok. Jego wyniki oraz planowane badania znalazły również uznanie w oczach recenzentów Narodowego Centrum Nauki, co zaowocowało przyznaniem grantu Preludium (tytuł projektu: *Własności p-adyczne pewnych ciągów kombinatorycznych i podzbiorów zbioru liczb naturalnych*).

Na koniec zaznaczę stały rozwój naukowy Piotra Miski, o czym świadczy wzbogacenie stosowanych metod oraz sukcesywna realizacja planów naukowych. Dodając do tego aktywne uczestnictwo w konferencjach międzynarodowych, współpracę z innymi matematykami oraz zaangażowanie w działania popularyzujące matematykę, otrzymujemy obraz młodego człowieka, który rozumie współczesny sposób uprawiania nauki.

Wybrane publikacje laureata

[1] *A note on p-adic valuations of Schenker sums*, Coll. Math. 140 (2015), nr 1, 5–13.

[2] *Arithmetic properties of coefficients of power series expansion of* $\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-x^{2^n}\right)^t$, Monatsh Math. 185 (2018), 307–360 (współautorzy: M. Gawron, M. Ulas).

[3] *Arithmetic properties of generalizations of Schenker sums*, Int. J. Number Theory 13 (2017), nr 6, 1585–1601.

[4] *Arithmetic properties of the sequence of derangements*, J. Number Theory 163 (2016), 114–145.

[5] *On consecutive* 1*'s in continued fractions expansions of square roots of prime numbers*, przyjęta do druku w Exp. Math. (współautor: M. Ulas).

[6] *On p-adic valuations of Stirling numbers*, Acta Arith. 186 (2018), 337–348.

[7] *On the p-adic denseness of the quotient set of a polynomial image*, J. Number Theory 197 (2019), nr 4, 218–22 (współautorzy: N. Murru, C. Sanna).
[8] *p-adic denseness of members of partitions of* $\mathbb{N}$ *and their ratio sets*, przyjęta do druku w Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (współautor: C. Sanna).
[9] *The r-derangement numbers*, Discrete. Math. 340 (2017), 1681–1692 (współautorzy: Ch. Wang, I. Mező).

Maciej Ulas (Kraków)

Joachim Jelisiejew

laureat Nagrody im. Kazimierza Kuratowskiego w 2019 roku

Joachim Jelisiejew studiował na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW, gdzie obronił pracę magisterską w 2013 roku oraz doktorat w 2017 roku. Po dwuletnim stażu w IM PAN (w latach 2017–2019), powrócił na MIM UW na prestiżowe stanowisko im. S. Eilenberga (lata 2019–2023). W latach 2015–2017 kierował grantem NCN Preludium. W 2018 roku jego praca doktorska została wyróżniona nagrodą Premiera RP, a w 2019 roku został laureatem Nagrody im. Kazimierza Kuratowskiego.

Rozprawa doktorska Joachima Jelisiejewa dotyczyła schematów Hilberta, klasycznej już tematyki w dziedzinie geometrii algebraicznej. Schematy Hilberta zostały wprowadzone przez Alexandra Grothendiecka w połowie zeszłego wieku i są jednym z najważniejszych obiektów parameteryzujących inne obiekty geometryczne – tak zwanych przestrzeni moduli – we współczesnej geometrii. Konstrukcja i badanie przestrzeni moduli jest jednym z głównych motorów rozwoju tej dziedziny matematyki. Mimo intensywnych prac prowadzonych od ponad półwiecza w tym obszarze badań, zaskakująco wiele bardzo naturalnych pytań pozostaje w dalszym ciągu bez odpowiedzi. W swojej pracy doktorskiej Jelisiejew zmierzył się z niektórymi z nich i dzięki bardzo oryginalnemu podejściu i niezwykle dojrzałym, technicznie zaawansowanym metodom badawczym uzyskał wybitne rezultaty.

Od czasu studiów magisterskich Joachim Jelisiejew napisał siedemnaście artykułów naukowych, przy czym niektóre prace są napisane wspólnie z innymi matematykami. Do tej pory współpracował między innymi z Kristianem Ranestadem z Oslo, Gianfranco Casnatim z Turynu, Roberto Notarim z Mediolanu, Zachiem Teitlerem z Boise w Idaho w USA, a także z polskimi matematykami. Jego prace są publikowane między innymi w *Inventiones Mathematicae* oraz *Journal of the European Mathematical Society*, a także w *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* i *Journal of London Mathematical Society*.

Główna tematyka badań doktorskich Joachima Jelisiejewa to klasyfikacja przemiennych algebr skończonych oraz konsekwencje, jakie niesie taka klasyfikacja dla innych dziedzin matematyki, w szczególności dla geometrii algebraicznej. Jego głównym i nowatorskim wkładem jest bardzo uniwersalne spojrzenie na problemy, które do tej pory były rozpatrywane niezależnie i „przypadek po przypadku". Jest to widoczne między innymi w jego pracy [5], wprowadzającej nową, ogólną metodę, która nie tylko pozwala rozszerzyć dotychczasowe rezultaty klasyfikacyjne, ale też znajduje wspólny mianownik wyników uzyskanych wcześniej w pracach Eliasa i Rossiego, Eliasa i Valli oraz Casnatiego i Notariego.

Rozwiązanie problemu wygładzalności pewnych algebr (zob. [7]) zaowocowało korespondencją i zaproszeniem do współpracy z dwoma włoskimi badaczami – Casnatim i Notarim. W wyniku tej współpracy powstał między innymi artykuł [3]. Decydującym wkładem Jelisiejewa w ten artykuł (oprócz zastosowania metod z pracy [7]) było znalezienie nowej i ogólnej konstrukcji rodzin promiennych i dowiedzenie twierdzeń w jej języku. Umożliwiło to spojrzenie na wcześniej znane wyniki jako na szczególne przypadki tej konstrukcji oraz otworzyło nowe kierunki badań. W tym obszarze badawczym na uwagę zasługuje także artykuł [9]. Bardzo dokładnie jest tam opisany fragment (składowa nieprzywiedlna) schematu Hilberta punktów, co w wielu przypadkach jest niezwykle trudnym zadaniem.

Praca [2] wiąże ze sobą topologię, geometrię algebraiczną i algebrę. Przedstawiona została nowa metoda konstruowania takich odwzorowań ciągłych $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^N$ oraz $\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^N$, że obraz dowolnych k parami różnych punktów jest liniowo niezależny (odpowiednio nad $\mathbb{R}$ lub nad $\mathbb{C}$), przy czym N jest nie za duże w porównaniu do k i m. Część algebraiczna tej pracy, oprócz zastosowania do dowodów głównych twierdzeń, odpowiada na kilka pytań i problemów w algebrze, między innymi postawionych przez Antonio Iarrobino z Bostonu.

Inny nurt badań Joachima Jelisiejewa dotyczy rangi Waringa wielomianów jednorodnych i podobnych pojęć. W pewnym uproszczeniu, badamy wielomian F jednorodny stopnia d o n zmiennych i staramy się go zapisać jako sumę potęg wielomianów liniowych ℓ^d, używając do tego jak najmniejszej liczby składników (ta minimalna liczba składników nazywa się rangą Waringa F). Jest to modna tematyka, w której panuje spory ruch i szybki rozwój. Jedna z pierwszych prac Joachima Jelisiejewa [4], napisana jeszcze na studiach magisterskich, choć stosunkowo elementarna, wzbudziła duże zainteresowanie środowiska. Przy okazji rozreklamowana została praca Białynickiego-Biruli i Schinzla [1], na której Joachim Jelisiejew się opierał i której wyniki wzmocnił. Dokładniej, Joachim Jelisiejew wykazał indukcyjne ograniczenie górne $G(d, n)$ na rangę Waringa dowolnego wielomianu jednorodnego n zmiennych stopnia d. Indukcja przebiega po d i po n, przy czym $G(d, n) \leqslant G(d-1, n) + G(d, n-1)$, a główny pomysł pochodzi z wyżej wspomnianej pracy [1]. W związku z tym poprawienie wartości $G(d, n)$ w jednym miejscu implikuje lepsze ograniczenie dla dowolnych większych wartości. Kilka kolejnych prac innych autorów, cytujących omawiany artykuł, polegało na poprawieniu $G(d, n)$ w jednym miejscu i skorzystaniu ze wzoru przedstawionego w pracy Jelisiejewa. Obecnie znane jest już inne ograniczenie górne na rangę Waringa, które (poza kilkoma wartościami początkowymi) jest znacznie mocniejsze.

Po doktoracie Joachim Jelisiejew badał między innymi prawo Murphy'ego dla schematów Hilberta punktów. Prawo to orzeka, że nie ma tak złych osobliwości, które nie mogą pojawić się na pewnym schemacie Hilberta. Wiadomo od kilkunastu lat, że to prawo zachodzi między innymi dla schematu Hilberta krzywych (zob. [11]), ale nie wiadomo, czy zachodzi dla schematów Hilberta punktów. Stąd też otwarte pytanie, czy schemat Hilberta punktów jest tak samo nieprzyjemny jak inne przestrzenie parametryzujące, czy też sprawia mniej kłopotów (prace Jelisiejewa pokazują, że jest nieprzyjemny). Zaczęło się to od artykułu [6], gdzie pokazane zostało istnienie nieskończonie wielu składowych elementarnych schematu Hilberta punktów. Kolejnym krokiem było stworzenie narzędzia do badania schematów z działaniem grupy reduktywnej (zazwyczaj torusa zespolonego $(\mathbb{C}^*)^n$, przy czym $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$). Jest ono zawarte w pracy [10], która uogólnia klasyczne twierdzenie Białynickiego-Biruli na wiele szerszą rodzinę obiektów. Ostatecznie, w kulminacyjnym artykule [8] powyższe narzędzie jest wykorzystane do wykazania, że nieco słabsza wersja prawa Murphy'ego zachodzi dla schematów Hilberta punktów. Konsekwensją tego wyniku jest między innymi negatywna odpowiedź na pytania postawione przez Fogarty'ego oraz Hartshorne'a. Jest to niezwykle ważny wkład w rozwój dziedziny zamykający pewien etap badań.

Bieżąca praca naukowa Joachima Jelisiejewa koncentruje się na dalszych uogólnieniach rozkładu Białynickiego-Biruli, idących w kierunku wyników zawartych w pracy [10]. Uogólnienia te potencjalnie mogą znaleźć zastosowania zarówno w badaniach związanych z programem Langlandsa, jak i w rozwiązaniu klasycznych problemów dotyczących rozmaitości algebraicznych z działaniem grupy addytywnej (czyli na przykład $\mathbb{C}$ z dodawaniem).

Joachim Jelisiejew jest zdolnym i pracowitym matematykiem, który chce poświęcić swój czas i talent pracy naukowej. Charakteryzuje go niezwykła ciekawość i odwaga badawcza. Potrafi zarówno „zakasać rękawy” i wykonać ciężkie, żmudne obliczenia, jak i spojrzeć na dziedzinę z szerszej perspektywy i uogólnić otrzymane wyniki. Nie boi się uczyć nowych i trudnych tematów. Z łatwością nawiązuje kontakty badawcze z ekspertami z całego świata i czerpie z tych kontaktów wiele korzyści. Odbywał wizyty naukowe i aktywnie uczestniczył w licznych konferencjach w różnych krajach, między innymi w Hiszpanii, Niemczech, Norwegii, Portugalii, Włoszech, a także w Kanadzie i Stanach Zjednoczonych. Dzięki tym kontaktom jest już matematykiem rozpoznawalnym między innymi w Europie i Ameryce Północnej.

Bibliografia

[1] A. Białynicki-Birula, A. Schinzel, *Representations of multivariate polynomials by sums of univariate polynomials in linear forms*, Colloq. Math. 112 (2008), nr 2, 201–233.

[2] J. Buczyński, T. Januszkiewicz, J. Jelisiejew, M. Michałek, *Constructions of k-regular maps using finite local schemes*, J. Eur. Math. Soc. 21 (2019), nr 6, 1775–1808.

[3] G. Casnati, J. Jelisiejew, R. Notari, *Irreducibility of the Gorenstein loci of Hilbert schemes via ray families*, Algebra Number Theory 9 (2015), nr 7, 1525–1570.

[4] J. Jelisiejew, *An upper bound for the Waring rank of a form*, Arch. Math. 102 (2014), nr 4, 329–336.

[5] J. Jelisiejew, *Classifying local Artinian Gorenstein algebras*, Collect. Math. 68 (2017), nr 1, 101–127.

[6] J. Jelisiejew, *Elementary components of Hilbert schemes of points*, J. Lond. Math. Soc. 100 (2019), nr 1, 249–272.

[7] J. Jelisiejew, *Local finite-dimensional Gorenstein k-algebras having Hilbert function* $(1,5,5,1)$ *are smoothable*, J. Algebra Appl. 13 (2014), nr 8, 1450056, 7.

[8] J. Jelisiejew, *Pathologies on the Hilbert scheme of points*, Invent. Math. 220 (2020), 581–610.

[9] J. Jelisiejew, *VSPs of cubic fourfolds and the Gorenstein locus of the Hilbert scheme of 14 points on* $\mathbb{A}^6$, Linear Algebra Appl. 557 (2018), 265–286.

[10] J. Jelisiejew, Ł. Sienkiewicz, *Białynicki-Birula decomposition for reductive groups*, J. Math. Pures Appl. 131 (2019), 290–325.

[11] R. Vakil, *Murphy's law in algebraic geometry: badly-behaved deformation spaces*, Invent. Math. 164 (2006), nr 3, 569–590.

Jarosław Buczyński (Warszawa)

Laureaci Nagród PTM na Zjeździe Stulecia PTM z Prezesem PTM Wacławem Marzantowiczem i Jean-Pierre'm Bourgignonem (fot. Aleksandra Dudziak)

Wiad. Mat. 55 (2) 2019, 449–454

Krótkie informacje

Postanowieniem Prezydenta RP nominacje na tytuł naukowy profesora otrzymali:

– w dniu 27 maja 2019 roku – Katarzyna Horbacz z Uniwersytetu Śląskiego, profesor nauk matematycznych,
– w dniu 28 listopada 2019 roku – Andrzej Dąbrowski z Uniwersytetu Szczecińskiego, profesor nauk ścisłych i przyrodniczych.

❊ ❊ ❊

Podczas sto czterdziestej sesji Zgromadzenia Ogólnego PAN na członka rzeczywistego PAN wybrano Wiesława Pleśniaka z UJ i Henryka Woźniakowskiego z UW, natomiast członkami korespondentami PAN zostali Wojciech Kucharz z UJ i Jarosław Wiśniewski z UW.

❊ ❊ ❊

Jerzy Kaczorowski z UAM został wybrany na członka korespondenta Wydziału III Nauk Ścisłych i Technicznych Polskiej Akademii Umiejętności.

❊ ❊ ❊

Irena Lasiecka z University of Memphis została laureatką Nagrody Richarda E. Bellmana, przyznawanej przez American Automatic Control Council za osiągnięcia w teorii sterowania.

❊ ❊ ❊

Martijn Caspers z Delft University of Technology w Holandii został w 2019 roku laureatem Nagrody imienia Barbary i Jaroslava Zemánków za osiągnięcia w analizie funkcjonalnej ze szczególnym naciskiem na teorię operatorów. W dniu 7 listopada 2019 roku laureat wygłosił wykład *Non-commutative Lipschitz functions*.

❊ ❊ ❊

Iwona Chlebicka z UW została w 2019 roku laureatką nagrody naukowej tygodnika *Polityka* w kategorii nauk ścisłych.

❊ ❊ ❊

Jury VL Konkursu im. Marka Kuczmy uznało następujące prace z równań funkcyjnych za najlepsze opublikowane w 2018 roku:

– I miejsce – Andrzej Olbryś i Zsolt Páles, *Support theorems in abstract settings*, Publ. Math. Debrecen 93 (2018), no. 1–2, 215–240;
– II miejsce – Janusz Morawiec i Thomas Zürcher, *On a problem of Janusz Matkowski and Jacek Wesołowski*, Aequationes Math. 92 (2018), no. 4, 601–615;
– III miejsce – Justyna Jarczyk i Witold Jarczyk, *Invariance of means*, Aequationes Math. 92 (2018), no. 5, 801–872.

❊ ❊ ❊

W dniach od 3 do 7 września 2019 roku odbył się w Krakowie, na terenie Uniwersytetu Jagiellońskiego i Akademii Górniczo-Hutniczej, Jubileuszowy Zjazd Matematyków Polskich w stulecie Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Podczas uroczystości otwarcia wręczono nagrody:

– Nagrodę Główną PTM im. Stefana Banacha – Wojciechowi Kucharzowi z UJ oraz Maksymowi Radziwiłłowi z California Institute of Technology,
– Nagrodę Główną PTM im. Hugona Steinhausa – Markowi Rutkowskiemu z University of Sydney i PW,
– Nagrodę Główną PTM im. Samuela Dicksteina – Michałowi Krychowi z UW,
– Nagrodę PTM dla Młodych Matematyków – Piotrowi Misce z UJ,
– Nagrodę im. Kazimierza Kuratowskiego dla młodych matematyków – Joachimowi Jelisiejewowi z IM PAN.

Ponadto tytuł członka honorowego PTM otrzymał Jean-Pierre Bourguignon, prezes Europejskiej Rady ds. Badań Naukowych w latach 2014–2019.

W zjeździe wzięło udział 852 uczestników, wygłoszono dwadzieścia dziewięć wykładów plenarnych oraz około pięćset referatów w dwudziestu ośmiu sesjach naukowych. W trakcie zjazdu odbyło się wiele towarzyszących mu wystaw, prelekcji pokazów i konkursów, m.in. pokazy filmów *Banach – między duchem a materią* w reżyserii Wiesława Saniewskiego, *Przestrzenie Banacha* Krzysztofa Langa i *Polscy pogromcy Enigmy* Waldemara Stankiewicza. Przedstawiono również multimedialne widowisko *Opera matematyczna, czyli paradoksalny rozkład sfery* autorstwa Romana Kołakowskiego.

❊ ❊ ❊

W dniu 6 września 2019 roku symbolicznie złożono w Panteonie Narodowym przy kościele Świętych Piotra i Pawła w Krakowie prochy polskich kryptologów Mariana Rejewskiego, Jerzego Różyckiego i Henryka Zygalskiego.

❊ ❊ ❊

Z okazji uchwalenia przez Senat RP roku 2019 Rokiem Matematyki Fundacja mBanku ogłosiła konkurs „Wielcy polscy matematycy", przeznaczony dla młodzieży szkolnej. Do konkursu zgłoszono 146 różnorodnych prac (filmów, komiksów, blogów, prezentacji i prac plastycznych). Grand Prix, nagrodę dla najlepszej pracy w konkursie, zdobyło IX Liceum Ogólnokształcące im. Klementyny Hoffmanowej w Warszawie, za film dokumentalny na temat życia i osiągnięć Karola Borsuka i Samuela Eilenberga. Zwycięską pracę można obejrzeć pod adresem https://youtu.be/ubmVjGPX0Zs.

❊ ❊ ❊

Stypendia Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego dla wybitnych młodych naukowców ustanowione w 2019 roku otrzymali matematycy: Aneta Wróblewska-Kamińska z IM PAN, Paweł Lucjan Wójcik z UP w Krakowie, Paweł Tomasz Pasteczka z UP w Krakowie i Iwona Anna Chlebicka z UW.

❊ ❊ ❊

Wśród laureatów konkursu Start Fundacji na rzecz Nauki Polskiej w 2019 roku znaleźli się Piotr Miska z UJ i Grzegorz Świderski z IM PAN.

❊ ❊ ❊

Przewodniczącym Akademii Młodych Uczonych Polskiej Akademii Nauk na kadencję 2019–2021 został Karol Palka z IM PAN.

❊ ❊ ❊

W dniach 15–22 lipca 2019 roku w Bath w Wielkiej Brytanii odbyła się LX Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna. Uczestniczyło w niej 621 zawodników ze 112 państw. W nieoficjalnej klasyfikacji zespołowej pierwsze miejsce *ex aequo* zajęły drużyny Chin i USA, trzecia była drużyna Korei Południowej. Drużyna polska zajęła dziesiąte miejsce. Z zawodników polskich złoty medal zdobył (uzyskując komplet punktów) Jan Fornal, srebrne – Radosław Żak, Juliusz Banecki i Kamil Galewski, a brązowe – Justyna Jaworska i Tomasz Ślusarczyk.

❊ ❊ ❊

W dniach 26 sierpnia–1 września 2019 roku w Pardubicach (Czechy) odbyła się XIII Środkowo-Europejska Olimpiada Matematyczna (MEMO). W rywalizacji drużynowej zwyciężyła Polska, wyprzedzając Węgry i Niemcy. W klasyfikacji indywidualnej złoty medal, zajmując drugie miejsce, zdobył Kosma Kasprzak; srebrne medale zdobyli: Jan Dobrakowski, Iwo Pilecki-Silva, Adam Dankowiakowski oraz Paweł Gadziński.

❊ ❊ ❊

XXVI Międzynarodowe Zawody Matematyczne dla Studentów Uniwersytetów odbyły się w dniach od 28 lipca do 3 sierpnia 2019 roku w Błagojewgradzie w Bułgarii. Wzięło w nich udział 360 studentów z 77 uczelni z Europy, Azji, Afryki i obu Ameryk. Drużyna Uniwersytetu Warszawskiego zajęła czternaste miejsce, a Uniwersytetu Jagiellońskiego siedemnaste. Indywidualne nagrody pierwszego stopnia zdobyli: Konrad Deka z UJ, Daniel Murawski z UW, Konrad Majewski z UW, Piotr Pawlak z UGd i Azur Đonlagić z UJ.

❊ ❊ ❊

Damian Burczyk z UW zajął drugie miejsce w kategorii studentów I stopnia w odbywających się w Ostrawie, w dniach 28–30 marca 2019 roku, 29 międzynarodowych zawodach matematycznych Vojtech Jarnik International Mathematical Competition.

❊ ❊ ❊

Finał Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki im. Pawła Domańskiego organizowanego przez redakcję *Delty* odbył się 4 września 2019 roku w Krakowie. Jury Konkursu przyznało:

– złote medale – Kosmie Kasprzakowi (XXXVIII Dwujęzyczne LO im. Jana Nowaka-Jeziorańskiego w Poznaniu) za pracę *Uwagi na temat pewnych granic występujących w teorii funkcji prawie okresowych* oraz Radosławowi Żakowi (V LO im. A. Witkowskiego w Krakowie) za pracę *Ciągi trzech kwadratów i krzywe eliptyczne*,
– srebrny medal – Mikołajowi Paterowi (III LO im. Marii Skłodowskiej--Curie w Opolu) za pracę *Okrąg mixtilinear i jego własności*,
– brązowe medale – Aleksandrowi Boskowi (XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie) za pracę *Wybrane własności ciągów Perrina k-tego rzędu* oraz Mateuszowi Scharmachowi (III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni) za pracę *Dwuwymiarowe ciągi Dolda*,
– wyróżnienie – Adamowi Barańskiemu (XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie) za pracę *O podzielności rozwiązań równania Pella*.

❊ ❊ ❊

Oddział Krakowski PTM zorganizował w 2019 roku Konkurs im. Witolda Wilkosza na najlepszą pracę studencką popularyzującą matematykę. W Konkursie mogli brać udział studenci studiów I lub II stopnia uczelni wyższych działających w Polsce. Jury Konkursu przyznało:

– dwie równorzędne nagrody II stopnia – Piotrowi Pikulowi z UJ (matematyka) za pracę *O ortocentrach i parabolach, a zwłaszcza o twierdzeniu odwrotnym Steinera* oraz Filipowi Rękawkowi z UW (MISMaP) za pracę *Jedno zadanie, wiele możliwości*,
– nagrodę III stopnia Marii Gałuszce z UJ (matematyka) za pracę *Sumy kwadratów wielomianów*,
– wyróżnienie Ninie Bażeli z AGH (informatyka) za pracę *Kwantowa strona mocy*.

W następnych latach planowane są kolejne edycje tego konkursu.

* * *

W dniu 23 listopada 2019 roku odbyło się posiedzenie Zgromadzenia Delegatów PTM, podczas którego m.in. wybrano władze naczelne PTM na kadencję 2020–2022. Prezesem PTM został wybrany Jacek Miękisz, wiceprezesami Tomasz Downarowicz i Klaudiusz Wójcik, sekretarzem została Krystyna Jaworska, a skarbnikiem Piotr Kowalczyk. Członkami Zarządu Głównego zostali Leokadia Białas-Cież, Małgorzata Makiewicz, Dorota Mozyrska i Jan Poleszczuk. Członkami Komisji Rewizyjnej PTM zostali Krystyna Białek, Karol Gajda, Jacek Jakubowski, Jacek Rogowski i Anna Szpila, natomiast w skład Sądu Koleżeńskiego weszli Stefan Jackowski, Jerzy Jaworski, Stanisława Kanas, Leszek Plaskota, Krzysztof Szajowski, Aleksy Tralle i Paweł Walczak. Ponadto wybrano Tomasza Downarowicza, Jacka Miękisza i Pawła Strzeleckiego na przedstawicieli PTM w Radzie Europejskiego Towarzystwa Matematycznego na kadencję 2020–2023.

* * *

W dniu 26 października 2019 roku w Akademii Techniczno-Humanistycznej w Bielsku-Białej odbyło się jubileuszowe 1000. posiedzenie Seminarium Katedry Matematyki. Tematyka poruszana na Seminarium związana jest głównie z analizą wypukłą, równaniami i nierównościami funkcyjnymi oraz funkcjami wielowartościowymi.

* * *

25 listopada 2019 roku czterdziesta sesja Zgromadzenia Ogólnego UNESCO na wniosek Międzynarodowej Unii Matematycznej ogłosiła dzień 14 marca Międzynarodowym Dniem Matematyki. Na stronie https://www.idm314.org są dostępne materiały do wykorzystania przez lokalnych organizatorów.

* * *

W dniu 26 września 2019 roku zmarł w wieku 100 lat Bolesław Gleichgewicht, specjalista w zakresie algebry ogólnej, ceniony popularyzator matematyki, autor podręczników z algebry, działacz opozycji w PRL, laureat Wielkiej Nagrody PTM im. Samuela Dicksteina za 1989 rok.

Redakcja prosi o nadsyłanie informacji do działu *Krótkich informacji* na adres: Grzegorz Łysik, Instytut Matematyki UJK, ul. Świętokrzyska 15, 25-406 Kielce, e-mail: glysik@ujk.edu.pl.

Wiad. Mat. 55 (2) 2019, 455–458

Jaroslav Zemánek (1946–2017)

Jaroslav Zemánek

Nie jest łatwo pisać o profesorze Zemánku, ponieważ bardzo ciężko jest ująć tę barwną i wyrazistą postać w krótkiej i dość formalnej notce pożegnalnej. Szczególnie mnie, gdyż znałem go bardzo blisko, a wiele istotnych wątków niestety będę musiał w poniższym zarysie pominąć.

Pamiętam nasze pierwsze spotkanie z Zemánkiem dwadzieścia cztery lata temu w Budapeszcie, w trakcie Europejskiego Kongresu Matematycznego. Już wtedy wywarł on na mnie ogromne wrażenie niezwykłej osoby dużego kalibru. Wtedy też został dla mnie Jaroslavem, czy po prostu Jarkiem.

Jeżeli miałbym określić sposób bycia Jaroslava jednym zdaniem, to powiedziałbym, że żył on matematyką i dla matematyki.

Miłość do nauk ścisłych Jaroslav odkrył w sobie już w latach szkolnych, część których spędził w internacie matematycznym w Pradze. Na pewno była to miłość z wzajemnością. Czytał książki matematyczne bez przerwy na odpoczynek, oszczędzając nawet na śnie. Aby czytać w nocy, wychodził pod posterunek ówczesnej policji znajdujący się blisko internatu, bo – jak mówił – było to jedyne miejsce, gdzie czuł się dobrze o tej porze. Takie olbrzymie zaangażowanie Jaroslava zaowocowało nagrodami na dwóch z rzędu międzynarodowych olimpiadach matematycznych w latach 1963–1964 (Polskę wówczas reprezentowali m.in. Figiel, Słodkowski, Toruńczyk, Wajnryb). Zostawiło ono też głęboki ślad w podejściu Jaroslava do matematyki jako naturalnej części kultury.

W 1969 roku Jaroslav ukończył Uniwersytet Karola w Pradze. W pracy magisterskiej zawarł oryginalny, pomysłowy dowód wersji twierdzenia Diniego o zbieżności monotonicznego ciągu funkcji na przestrzeniach zwartych. Kiedy w 2002 roku Pragę nawiedziła powódź tysiąclecia, największym zmartwieniem Jaroslava było to, czy uda się uratować jego pracę magisterską. Jego dowód nie miał prawa zginąć. Udało się.

Po ukończeniu uniwersytetu Jaroslav zajmował się przez kilka lat działalnością związaną z olimpiadami matematycznymi w Czechach, a równolegle pracował nad doktoratem w Instytucie Matematycznym PAN pod kierunkiem Wiesława Żelazki. Doktorat, obroniony w 1977 roku, został uznany za wybitny. W czasie pobytu w Warszawie Jaroslav zakochał się w bibliotece IM PAN, którą potem uważał za najlepszą na świecie. W bibliotece spotkał też drugą miłość swojego życia – przyszłą żonę Basię. Z powodu biblioteki i żony (dokładnie w takiej kolejności) Jaroslav przeniósł się do Polski na stałe w 1982 roku, i w tymże roku związał z się z IM PAN, zostając tam profesorem w 1996 roku. Istniał oczywiście powód trzeci – w Warszawie wówczas pracowali najlepsi fachowcy z analizy funkcjonalnej, dziedziny jego zainteresowań.

Przyzwyczajenia wyniesione z zawodów olimpijskich zostały fundamentem światopoglądu Jaroslava i jego podejścia do wielu spraw. W matematyce i w życiu Jaroslav szukał piękna i elegancji. Niestety życie codzienne często niosło rozczarowania. Na przykład, Jaroslav nie miał samochodu, bo gdy kupił swój pierwszy samochód, to zapomniał, gdzie go zostawił, co skutkowało długą i mało przyjemną przygodą z udziałem wielu osób, łącznie z żoną i patrolem policyjnym.

Ale na ratunek zawsze przychodziła ulubiona matematyka. Szukając piękna w matematyce, Jaroslav często rezygnował z rozumowań technicznych na rzecz trików, chwytów, ujęć niestandardowych. Zamiast liczyć i szacować, oczekiwał olśnienia, licząc na to, że sztuczki się znajdą. Olśnienia te poprowadziły Jaroslava do wybitnych osiągnięć w teorii algebr Banacha i teorii operatorów. Nie sposób tu ich wszystkich wymienić, ale nawet te pierwsze, z okresu habilitacyjnego (habilitował się w IM PAN w 1985 roku), zostały uhonorowane Nagrodą Główną PTM im. S. Banacha w 1987 roku. Wiele z tych odkryć, na przykład charakteryzacje spektralne ideałów dwustronnych w algebrach Banacha, opis algebr Banacha przemiennych modulo radykał, wyniki o własnościach i strukturze idempotentów czy twierdzenia o lokalizacji podzbiorów widma operatorów w terminach własności geometrycznych ich potęg uważane są dziś przez fachowców za rezultaty klasyczne, należące do kanonu współczesnej analizy funkcjonalnej.

Szerokie zainteresowania naukowe Jaroslava obejmowały wiele działów matematyki. Naturalne braki wiedzy fachowej nadrabiał tu dociekliwością i poświęceniem większej ilości czasu. Na przykład interesował się hipotezą Bieberbacha z analizy zespolonej czy bardzo szczególnymi własnościami macierzy z głębi algebry liniowej.

W ostatnich latach fascynowały go własności asymptotyczne orbit operatorów i ich związki ze strukturą operatorów z widmem jednopunktowym, w szczególności te związane z operatorem Volterry V. Jako ilustrację przypomnę jego bardzo elegancki wynik (wspólny z Montesem i Sanchezem), który bardzo cenił i lubił, stwierdzający, że operator $I - V$ na $L^p(0,1)$, przy czym $1 \leqslant p \leqslant \infty$, jest potęgowo ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$.

Jaroslav był wieloletnim sekretarzem czasopisma *Studia Mathematica*, a jego dyskusje o *Studiach* z głównym redaktorem Tadeuszem Figlem czasami trwały do późnej nocy. Opieka nad czasopismem pochłaniała ogrom czasu i dlatego do domu musiał często wracać w nocy taksówką. Starał się oglądać wszystkie artykuły, czasami przyjmując jednocześnie role autora, recenzenta oraz redaktora.

Praca redakcyjna w sposób naturalny łączyła się z prowadzeniem sobotniego (sic!) Seminarium z Teorii Operatorów w IM PAN, które w istocie nie miało ustalonej godziny rozpoczęcia i mogło trwać naprawdę długo, sięgając czasami pory kolacji. Część prac publikowanych w *Studiach* była referowana na tym seminarium i w ten sposób obowiązki redakcyjne łączyły się z działalnością organizacyjną, tworząc inspirującą całość. Seminarium koniecznie musiało kończyć się piwem, które według niego w Czechach „zastępuje nawet śniadanie".

Mam z Jaroslavem tylko jedną wspólną pracę, która powstała w pewnej restauracji na placu Konstytucji w Warszawie. Niestety restauracja ta już nie istnieje. Ale wciąż mam w pamięci bardzo miłe wspomnienia dyskusji dotyczących zarówno naszego artykułu, jak i wielu innych zagadnień matematycznych, a nawet filozofii, poezji i sztuki. Później sporo czasu spędziliśmy razem, gdy Jaroslav został koordynatorem dużego projektu Unii Europejskiej dotyczącego metod operatorowych w równaniach różniczkowych. Projekt odniósł zauważalny sukces naukowy i przyczynił się do szybkiego rozwoju tego obszaru w kraju i za granicą.

Jaroslav kochał ludzi i starał się pomóc każdemu, niezależnie od statusu i miejsca w hierarchii społecznej. Z drugiej strony, był osobą bardzo zasadniczą, co często przeszkadzało mu w życiu i było powodem wielu refleksji i dość sceptycznego nastawienia do otaczającej rzeczywistości, a także do samego siebie. Ale tu z pomocą przychodziły jego prawdziwe pasje: książki i astronomia. Świat książek był odzwierciedleniem świata Jaroslava. Z każdej podróży (a były ich setki) Jaroslav wracał z walizką książek. Każdy gość Jaroslava wiedział, że najlepszym prezentem jest nowa pozycja dobrego wydawnictwa. Księgarnie w wielu miastach Europy Jaroslav znajdował z zamkniętymi oczyma (czego byłem świadkiem). Dzień Jaroslava zwykłe zaczynał się od oglądania nowości w Bibliotece IM PAN. Na książki wydawał fortunę, a w życiu był bardzo skromny i praktyczny.

Drugą pasją Jaroslava była astronomia. Przez wiele lat (wydaje się, że przez prawie połowę życia) był członkiem Czeskiego Towarzystwa Astronomicznego. Na balkonie swojego mieszkania Jaroslav umieścił bardzo zaawansowany teleskop, za pomocą którego często obserwował nocne niebo, w zasadzie wszystkie zauważalne zjawiska astronomiczne. Czasami dzwonił do mnie (i nie tylko) w nocy i pytał, czy ja wiem, że taka oto kometa znajduje się bardzo blisko Ziemi i czy jakaś gwiazda jest dzisiaj bardzo dobrze widoczna.

Niestety Jaroslavowe życie w „innym" świecie potrafiło przekładać się na niefortunne wydarzenia i sploty okoliczności. Ich skutkiem Jaroslav zmarł 18 lutego 2017 roku, kilka tygodni po śmierci swojej żony. W testamencie otwartym po ich śmierci, Jaroslav i Barbara Zemánkowie zostawili swoje warszawskie mieszkanie (jedyna wartość materialna, która po nich została) jako podstawę dla ufundowania nagrody w dziedzinie analizy funkcjonalnej dla szczególnie uzdolnionych młodych matematyków. Taka nagroda powstała i natychmiast zaczęła być ceniona w szerokich kręgach matematycznych. Jej pierwszym laureatem został Karl-Mikael Perfekt z Uniwersytetu w Reading w Anglii.

Jaroslav Zemánek został pochowany na Cmentarzu Wojskowym na Powązkach w Warszawie.

Nawiązując do zamiłowań astronomicznych Jaroslava, chciałbym zakończyć ten krótki zarys jego sylwetki parafrazą cytatu z *Małego Księcia* Antoine'a de Saint-Exupéry'ego: „patrząc nocą w niebo, wydaje się nam, że wszystkie gwiazdy śmieją się do nas, ponieważ uśmiechasz się na jednej z nich."

Yuri Tomilov (Warszawa)

Wiad. Mat. 55 (2) 2019, 459–466

Andrzej Granas (1929–2019)

Kilka lat temu Andrzej Granas powiedział mi „wiesz, żyliśmy w ciekawych czasach”. Te słowa, odnoszące się do znanego powiedzenia, były w ustach Andrzeja, urodzonego 4 kwietnia 1929 roku w Łodzi, w pełni uzasadnione. Pani Romana Granas, matka Andrzeja, wspomniała kiedyś „mama uratowała mi Andrzejka”. Wzmianka ta dotyczyła wydarzeń w czasie ucieczki przed wojskami niemieckimi wkraczającymi w 1941 roku na część Polski okupowaną od 1939 roku przez Związek Radziecki.

We wspomnieniach rodzinnych zachowały się śladowe informacje o jakiejś szkole w Taszkiencie, w której Andrzej uczył się po 1941 roku. Matka Andrzeja opowiedziała mi, jak pewnego dnia (chyba w 1947 roku) Andrzej powiedział jej, że postanowił zapisać się na studia na uniwersytecie. Na jej pytanie, czy zdaje sobie sprawę z tego, że aby rozpocząć studia potrzebna jest matura, Andrzej odpowiedział – ależ ja zdałem już egzamin dojrzałości. W papierach, które Andrzej pozostawił, znajduje się świadectwo maturalne Liceum im. Kościuszki w Łodzi z 28 czerwca 1947 roku. Pamiętam, że w powojennych latach 1945–1947 były organizowane klasy gimnazjalne i licealne ze specjalnym programem, które umożliwiały starszym uczniom ukończenie liceum w trybie przyspieszonym. Domyślałem się, że Andrzej w ten sposób nadrobił stratę czasu spowodowaną przez wojnę.

Andrzej Granas studiował na kierunku matematyka Uniwersytetu Warszawskiego w latach 1947–1952. W tym czasie, pomimo strat poniesionych w czasie wojny, matematyka polska była potęgą na skalę światową. Nie pamiętam gdzie czytałem, że Stanisław Mikołajczyk, w czasie gdy był wicepremierem, stwierdził, że Polska ma na eksport dwie rzeczy – węgiel i matematykę. Andrzej wielokrotnie wspominał wykłady Kazimierza Kuratowskiego, Stanisława Mazura i Karola Borsuka, które wywarły olbrzymi wpływ na jego rozwój matematyczny. Pod wpływem Borsuka zainteresował się teorią retraktów i teorii homotopii, a w szczególności grupami kohomotopii.

W latach 1952–1955 Andrzej Granas był aspirantem w Uniwersytecie Moskiewskim (co odpowiada obecnym studiom doktorskim) i w 1958 roku uzyskał doktorat (wówczas – stopień kandydata nauk). Promotorami byli Łazar Aronowicz Lusternik i Borsuk. Rozprawa, na podstawie której uzyskał doktorat, dotyczyła zastosowań twierdzenia o antypodach w przestrzeniach funkcyjnych i nawiązywała do przedwojenych prac Jeana Leraya i Juliusza Schaudera, którzy zainicjowali badania w zakresie zastosowania topologii do nieliniowych problemów analizy funkcjonalnej. Pobyt w Moskwie walnie przyczynił się do rozszerzenia horyzontów matematycznych Andrzeja dzięki kontaktom z Lusternikiem i możliwościami, jakie stwarzał pobyt w Moskwie, gdzie powstawał silny ośrodek topologii algebraicznej – nowoczesnego w owym czasie nurtu współczesnej matematyki. Na marginesie – Andrzej wspomniał kiedyś, że koledzy-aspiranci nazywali go „Pan Aspirant", co w tym czasie w Moskwie było określeniem dość złośliwym.

W latach 1955–1959 Andrzej Granas pracował na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika w Toruniu, utrzymując ścisłe związki z IM PAN w Warszawie m.in. poprzez uczestnictwo w seminarium prowadzonym przez Borsuka i Kuratowskiego. Stanisław Balcerzyk w artykule [2] *50 lat seminarium algebraicznego w Toruniu* wspomina:

> Istotny wpływ na pracę seminarium miał też prof. Andrzej Granas, który po ukończeniu aspirantury w Moskwie pracował w UMK w latach 1956–1959. W Moskwie miał bliski kontakt z topologią algebraiczną i próbował przekazać nam zasadnicze treści tej teorii. Porozumienie okazało się trudne, a wybór jako lektury jednego z rozdziałów książki P. S. Aleksandrowa *Kombinatornaja topologia* był zdecydowanie nieudany. Dopiero ukazanie się w 1958 roku rosyj-

> skiego przekładu książki Eilenberga–Steenroda [9], a później książki S. Hu [10], umożliwiło poznanie podstaw tych teorii. [...] Uzyskane przygotowanie topologiczno-algebraiczne umożliwiło E. Sąsiadzie i mnie rozpoczęcie studium algebry homologicznej.

Do powyższego cytatu należy dodać, że w ramach tej współpracy powstała książka Balcerzyka [1], jak również praca Edwarda Sąsiady [12].

Z tego „pierwszego okresu toruńskiego" pamiętam doskonale, jak Andrzej przywiózł z Warszawy kilka egzemplarzy rosyjskiego tłumaczenia książki Samuela Eilenberga i Normana Steenroda *Foundations of algebraic topology* i zorganizował coś w rodzaju kółka samokształceniowego, w ramach którego referowane były rozdziały tej książki. W spotkaniach tych aktywnie uczestniczyli Balcerzyk, Sąsiada, Andrzej Jankowski (wówczas jeszcze student chyba trzeciego roku) i autor tego wspomnienia. Dla mnie udział w tych spotkaniach był bardzo ważny, gdyż nie tylko pozwolił na poznanie podstaw topologii algebraicznej, ale dał sposobność zaznajomienia się z metodami teorii kategorii.

W latach 1958–1960 w Toruniu dość często grywało się w brydża. Granas był znany z tego, że skontrowany prawie z zasady rekontrował. Doskonale pamiętam taką scenkę. Andrzej gra w parze z Leonem Jeśmanowiczem i licytują dość wyśrubowany kontrakt. Jeden z partnerów kontruje, Andrzej – oczywiście – rekontruje i jest rozgrywającym. Leon Jeśmanowicz, absolwent Uniwersytetu Stefana Batorego, był człowiekiem wszechstronnie wykształconym, o ogromnej wiedzy i kulturze, na co dzień posługiwał się znakomitą przedwojenną polszczyzną, ale gdy chciał, potrafił odezwać się po kresowemu. Po wiście Jeśmanowicz wykłada karty, wstaje, obchodzi stół, ogląda karty Granasa i stwierdza – ze specjalnie na taki użytek zarezerwowanym wileńskim akcentem – „nu, tak i przyjdzi sia poleżeć".

W latach 1960–1961 Andrzej przebywał w Stanach Zjednoczonych na zaproszenie University of Chicago oraz Institute for Advanced Study w Princeton. Po powrocie do Polski pracował w latach 1961–1969 w IM PAN, gdzie w 1961 roku uzyskał habilitację przedstawiając rozprawę [9]. Rozprawa ta wyrosła z międzywojennych prac Leraya i Schaudera i była początkiem odnowienia tej tematyki w powojennej matematyce polskiej.

W latach 1965–1969 Granas pracował w Wyższej Szkole Pedagogicznej w Gdańsku (łącząc to z zatrudnieniem w IM PAN) jako kierownik specjalnie dla niego utworzonej Katedry Topologii i w 1967 roku uzyskał tytuł profesora.

Zapamiętałem pewne wydarzenie, które ilustruje drastyczny kontrast w podejściu Andrzeja do gry w brydża i do uprawiania matematyki. Aby udowodnić pewien lemat, utworzyłem diagram, który był tak skomplikowany, że z trudem mieścił się na arkuszu rozmiaru A4. Aby ten diagram był bardziej czytelny, przerysowałem go na dwukrotnie większym arkuszu papieru kancelaryjnego rozmiaru A3 i w tej postaci przekazałem Andrzejowi. Ten przez kilka następnych dni wychwalał diagram i jego rozmiary. Po pewnym czasie napisał elegancki dowód tego samego lematu, w którym – wprowadzając kilka naturalnych definicji obiektów wystepujących w diagramie – tak zredukował cały dowód do kilku zdań, że mój diagram nie był potrzebny. Dowód ten jako dowód twierdzenia 5.2 znalazł się w szóstym rozdziale książki [10].

Z okazji Międzynarodowego Kongresu Matematycznego w Warszawie w 1983 roku (zaplanowanego na 1982 rok i przesuniętego o rok z powodu stanu wojennego) wydawnictwo Springer wydało plakat poświęcony najwybitniejszym polskim matematykom. Pamiętam, jak Andrzej przez kilkanaście dni, z niesłychanym pietyzmem i dbałością o wszystkie szczegóły, pracował nad zmianami we wstępnej wersji tego plakatu.

W latach 1965–1969 Andrzej rozwinął bardzo szeroką i intensywną działalność organizacyjną. Wykorzystując możliwości stworzone przez jednoczesne zatrudnienie w Wyższej Szkole Pedagogicznej w Gdańsku i IM PAN zorganizował Pracownię tego Instytutu (z siedzibą w Sopocie). Ważnym elementem działalności tej pracowni było prowadzone przez Granasa seminarium, w którym uczestniczyło regularnie kilkunastu młodych matematyków z wybrzeża oraz – jako prelegenci i zaproszeni goście – matematycy polscy oraz zagraniczni. Nie dysponując kompletną listą gości, którzy odwiedzili wybrzeże w tym okresie, chciałbym wspomnieć, że wśrod nich byli matematycy tej miary, co René Thom i Peter Hilton.

Andrzej był wielbicielem polskiej matematyki międzywojennej – gdy wspominam jego komentarze na temat osiągnięć polsich matematyków z tego okresu, przychodzi mi na myśl porównanie do kibica piłkarskiego wspominającego sukcesy polskiej piłki nożnej z czasów trenera Górskiego. Jednocześnie, dzięki pobytom w Moskwie i Stanach Zjednoczonych, zdawał sobie w pełni sprawę z tego, że przełom lat pięćdziesiątych i sześćdziesiątych był okresem wielkich sukcesów topologii algebraicznej i różniczkowej i ubolewał nad wyraźnym brakiem zainteresowania tymi wynikami w Polsce. Pierwszym krokiem w kierunku zmiany tego stanu rzeczy była organizacja jeszcze w 1962 roku w Toruniu konferencji, poświęconej podstawowym pojęciom teorii ciągów spektralnych Leraya.

W 1967 roku Andrzej Granas zorganizował w Gdańsku pierwszą Letnią Szkołę Topologii Algebraicznej (głównymi wykładowcami byli Stanisław Balcerzyk oraz Andrzej Białynicki-Birula). Szkoła ta rozpoczęła całą serię corocznych Letnich Szkół, które odbywały się w Gdańsku bądź Sopocie. Po wyjeździe

Granasa z Polski organizację tych szkół przejęli (w różnych konfiguracjach) Bogdan Bojarski, Andrzej Jankowski, Stefan Jackowski oraz autor tego wspomnienia przy stałym współudziale Zygfryda Kucharskiego, który zajmował się niewdzięcznymi problemami związanymi z techniczną stroną organizacji.

W 1969 roku Andrzej Granas wyjechał z Polski na dłuższy czas (ponad dwadzieścia lat). Przez pierwsze półrocze 1970 roku, na zaproszenie College de France, przebywał w Paryżu. Od połowy 1970 roku do odejścia na emeryturę w 1994 roku był profesorem na Université de Montréal w Kanadzie. Pobyt w Montrealu zaowocował ważnymi osiągnięciami naukowymi i organizacyjnymi. Kontynuował tam działalność organizacyjną, wykorzystując z wielką energią i uporem możliwości, które stwarzała pozycja profesora na kanadyjskiej uczelni. Uniwersytet w Montrealu (korzystając ze wsparcia NATO) organizuje co roku konferencje pod nazwą Séminarie de Mathématiques Supérieures. Andrzej Granas był ich głównym organizatorem w latach 1973, 1983, 1986 oraz 1994. Niezależnie od tych konferencji inicjował zaproszenie do wygłoszenia odczytu w Montrealu wielu wybitnych matematyków, nie pomijając matematyków polskich. Dodatkową okolicznością, sprzyjającą organizacji krótkich wizyt polskich matematyków w Montrealu, było to, że samoloty LOT-u na trasie Warszawa – Stany Zjednoczone miały międzylądowanie w Montrealu.

Po przejściu na emeryturę Andrzej Granas powrócił do Polski i w latach 1991–1996 pracował na stanowisku profesora Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu. Był inicjatorem powstania (w 1991 roku) oraz pierwszym kierownikiem Centrum Badań Nieliniowych im. Juliusza P. Schaudera przy UMK. W 1993 roku, dzięki jego wysiłkom, CBN, we współpracy z American Mathematical Society, rozpoczęło wydawanie czasopisma *Topological Methods in Nonlinear Analysis*. W tym okresie Andrzej Granas był głównym redaktorem tego czasopisma i bardzo poważnie traktował wynikające z tego obowiązki. Dzięki jego wysiłkom czasopismo to uzyskało międzynarodowe uznanie.

Andrzej Granas był też inicjatorem i przez kilka lat głównym redaktorem wydawanego przez firmę Birkhäuser czasopisma *Fixed Point Theory and Applications*, którego pierwszy tom ukazał się w 2007 roku.

Dorobek naukowy pozostawiony przez Andrzeja Granasa obejmuje dwie książki [4,10] dotyczące teorii punktów stałych oraz dziewięćdziesiąt prac. Pierwsza z tych książek, wydana w 1982 roku, w tytule miała „vol. I", co oznaczało, że planowny jest tom drugi. Ciężka choroba Jamesa Dugundjiego, a następnie jego śmierć w 1985 roku zdruzgotała te plany. Po przeszło dwudziestu latach Andrzej Granas wydał drugą książkę, w której Dugundji na stronie tytułowej wymieniony jest jako współautor. Książka ta nie jest planowanym drugim tomem, ale obszerną monografią zawierającą materiał pierwszej. Po wydaniu drugiej książki, w prawie dwadzieścia lat po śmierci Dugundjiego, w naturalny sposób pojawiły się pytania dotyczące jego udziału. Nie wiem, jakie pozostały materialne ślady pracy Dugundjiego nad drugim tomem. Wiem jednak, że obaj współautorzy włożyli wiele wysiłku w przygotowanie drugiego tomu, którego ogólne założenia opracowywali od 1978 roku i niektóre zagadnienia omawiali bardzo dokładnie. Tak się złożyło, że w latach osiemdziesiątych byłem na zaproszenie Andrzeja kilkakrotnie w Montrealu. Pamiętam dokładnie, że w 1983 roku – a więc już po ukazaniu się pierwszego tomu – miałem dłuższą, dotyczącą konkretnych szczegółów rozmowę z Dugundjim, której tematem była metoda dowodu twierdzenia Borsuka o antypodach. Po wydaniu (w 2003 roku) drugiej książki, czytając dowód twierdzenia o antypodach, przypomniałem sobie tę rozmowę. Robert Brown, w obszernej recenzji [3] zamieszczonej w Biuletynie AMS, znakomicie scharakteryzował książkę pisząc: „... the interaction between topology and nonlinear analysis is a persistent theme of the book..." oraz „[t]he reader may be surprised by the relative brevity of most of the proofs. This is the consequence of the authors' very efficient style: we are told just the essential steps that make the statement of the result believable". W przedmowie do drugiej książki Andrzej Granas napisał o Dugundjim „...he was totally independent and would not tolerate anything which he considered second best." Myślę, że tę ocenę można rozciągnąć na obydwu współautorów.

Po osiedleniu się w 1970 roku w Montrealu, Andrzej Granas opublikował kilkadziesiąt prac. Sam autor – w pewnym preprincie powstałym na Tajwanie – podzielił te prace następująco.

- *Topologia przestrzeni funkcyjnych*. W tej grupie znajdujemy dziesięć prac tematycznie powiązanych z rozprawą habilitacyjną oraz dziewięć prac dotyczących uogólnienia teorii kohomologii na kategorię, której obiektami są domknięte i ograniczone podzbiory ustalonej przestrzeni Banacha, a morfizmami zwarte zaburzenia identyczności. Wyniki tych dziewięciu prac zostały zebrane w pracy [6].
- *Teoria punktów stałych*. Grupa osiemnastu prac, poświęconych rozmaitym wariantom teorii punktów stałych. Prace te dobrze reprezentuje artykuł [7], zawierający pozytywną odpowiedź na pytanie Borsuka, dotyczące punktów stałych odwzorowań na aproksymatywnym ANR-rze.
- *Równania nieliniowe*. Grupa dwudziestu czterech prac o twierdzeniach topologicznych mających zastosowania w teorii równań różniczkowych. Typowym reprezentantem jest praca [8], poświęcona dowodowi nieskończenie wymiarowej wersji klasycznego twierdzenia teorii homotopii.

- *Analiza wypukła*. Seria dziewięciu prac o specjalnej klasie odwzorowań wypukłych. Inspiracją dla prac dotyczących tych odwzorowań jest problem 54 z *Księgi Szkockiej*, sformułowany przez Schaudera.
- *Równania różniczkowe zwyczajne*. Seria dwudziestu prac o zastosowaniach metod topologicznych w teorii równań różniczkowych zwyczajnych. Tematyką dwóch z tych prac są zastosowania metody „topologicznej transwersalności" do równań różniczkowych.

Omawiając dorobek naukowy matematyka, nie można pominąć wygłoszonych przez niego wykładów i odczytów. W tym zakresie osiągnięcia Andrzeja Granasa są naprawdę imponujące. Lista uniwersytetów amerykańskich i europejskich, na zaproszenie których wygłoszał wykłady (do 1978 roku – późniejszymi danymi nie dysponuję), obejmuje ponad trzydzieści pozycji, wśród których są uniwersytety w Bonn, Florencji i Kaliforni. Po 1978 roku odwiedził z wykładami rozmaite instytucje naukowe w Europie i Ameryce Północnej, a także Tajwan, Chiny oraz Izrael.

Andrzej Granas zmarł 5 marca 2019 roku, jest pochowany na Cmentarzu Wojskowym na Powązkach w Warszawie. Pozostawił po sobie dwie książki oraz dziewięćdziesiąt opublikowanych prac. Założył dwa czasopisma matematyczne, zorganizował Centrum Badań Nieliniowych im. Juliusza P. Schaudera w Toruniu oraz wypromował szesnastu doktorów nauk matematycznych.

Był bohaterem wielu anegdot (prawdziwych, podkolorowanych i całkowicie zmyślonych), które krążyły wśród matematyków. Nieodżałowany Andrzej Lasota sformułował następujące prawidło: „w otoczeniu Granasa prawdopodobieństwo zagęszcza się".

Cytowane prace

[1] S. Balcerzyk, *Wstęp do algebry homologicznej*, PWN, Warszawa 1970.

[2] S. Balcerzyk, *50 lat seminarium algebraicznego w Toruniu*, Wiad. Mat. 41 (2005), 107–117.

[3] R. F. Brown, Fixed Point Theory*, by Andrzej Granas and James Dugundji*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 41 (2004), nr 2, 267–271.

[4] J. Dugundji, A. Granas, *Fixed Point Theory*, t. I, PWN, Warszawa 1982.

[5] S. Eilenberg, N. Steenrod, *Foundations of algebraic topology*, Princeton Univ. Press, Princeton 1952.

[6] K. Gęba, A. Granas, *Infinite dimensional cohomology theories*, J. Math. Pures Appl. 52 (1973), 145–270.

[7] A. Granas, *Fixed Points Theorems for the Approximative ANR-s*, Bull. Acad. Polon. Sci. 16 (1968), 331–334.

[8] A. Granas, *Tieoriema o prodołżenii gomotopii w banachowych prostranstwach i jejo niekotoryje primienienija w tieorii nieliniejnych urawnienij*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. Phys. 7 (1959), 387–394.

[9] A. Granas, *The theory of compact vector fields and some of its applications to topology of functional spaces*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 30 (1962).

[10] A. Granas, J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer-Verlag, New York 2003.

[11] S-T. Hu, *Homotopy theory*, Academic Press, New York 1959.

[12] E. Sąsiada, *Negative solution of I. Kaplansky's First Test Problem for abelian groups and a problem of K. Borsuk concerning the homology groups*, Bull. Acad. Polon. Sci. 9 (1961), 331–334.

Kazimierz Gęba (Gdańsk)

Wiad. Mat. 55 (2) 2019, 467–471

Bolesław Gleichgewicht (1919–2019)*

Przeżywszy lat sto, w dniu 26 września 2019 roku odszedł od nas Bolesław Gleichgewicht, emerytowany nauczyciel akademicki Uniwersytetu Wrocławskiego i nestor matematyków polskich.

Bolesław Gleichgewicht urodził się 30 kwietnia 1919 roku w Warszawie, w zamożnej, zasymilowanej rodzinie żydowskiej. Pierwsze dwie dekady swego życia przeżył w wolnej Polsce, do której przylgnął całym sercem. Ukończył znane gimnazjum im. Mikołaja Reya i rozpoczął studia na Uniwersytecie Warszawskim, gdzie słuchał wykładów takich znakomitości, jak Wacław Sierpiński, Stanisław Saks, Jan Łukasiewicz i innych. Marzył, by być jak oni i zajmować się nauką, rozwijać ją i wykładać, ale Polska ukazywała mu w tym czasie macosze oblicze. Był to czas rosnącego antysemityzmu i tzw. getta ław-

* Rozmowę z Bolesławem Gleichgewichtem, przeprowadzoną kilka miesięcy przed jego śmiercią, opublikowaliśmy w poprzednim numerze *Wiadomości Matematycznych* – przyp. red.

kowego na uniwersytetach (Żydzi mogli siedzieć tylko na wyznaczonych im miejscach), Bolek bywał więc szarpany, a raz nawet został dotkliwie pobity przez faszyzujących narodowców. Był także świadkiem przerwania przez nich wykładu algebry sędziwego profesora Samuela Dicksteina, którego uratował wtedy Saks, ale wykład nie został już nigdy wznowiony. Wydarzenia takie nie odebrały mu wiary w Polskę, ale czyniły podatnym na wdzięki komunistycznej propagandy.

Kiedy we wrześniu 1939 roku hitlerowskie Niemcy napadły na Polskę, rozpoczynając II wojnę światową, oblężona i opuszczona przez sojuszników Warszawa kapitulowała, a Sowiety najechały i zajęły wschodnią część kraju – Bolek ruszył na wschód, szukając schronienia w wyśnionym kraju „ludu pracującego miast i wsi". Nadzieje spełniły się tylko częściowo, sam bowiem wojnę przeżył, podczas gdy pozostała w kraju rodzina zginęła w Treblince, ale rzeczywistość sowiecka z bliska okazała się całkiem odmienna od rysowanej w propagandzie. Bolek spędził w Związku Radzieckim trudnych siedemnaście lat. Był to okres pracy na wołyńskiej prowincji (do Lwowa go nie wpuszczono), dalszej ucieczki przed Niemcami po zaatakowaniu przez nich Związku Radzieckiego, służby w Armii Czerwonej w przeciwlotniczej obronie Baku, kontynuacji po wojnie studiów w Odessie, wreszcie pracy nauczycielskiej w Pierwomajsku na ukraińskiej prowincji. W tym czasie całkowicie się wyleczył z wszelkich sympatii do komunizmu i z biegiem lat coraz bardziej tęsknił za Polską. Mimo chlubnie ukończonych z wyróżnieniem studiów nie został przyjęty na aspiranturę, co zamykało mu drogę do wymarzonej kariery naukowej (był to czas ostrego antysemityzmu w Związku Radzieckim). Chciał robić coś więcej, wyrwać się z atmosfery prania mózgów w szkole i kartkowej szarzyzny, więc prócz nauczania wziął się za szachy i osiągnął na tym polu znaczne sukcesy. Ale cały czas marzył o Polsce.

Po wieloletnich staraniach udało mu się uzyskać zgodę na wyjazd i w 1956 roku przekroczył z rodziną (którą po wojnie założył, żonę poznał w wojsku) granicę na Bugu. Warszawa stała się mu obca, ale dowiedział się, że niektórzy warszawscy matematycy (Edward Szpilrajn-Marczewski, Bronisław Knaster) są we Wrocławiu i że we Wrocławiu odradza się lwowska szkoła matematyczna pod przewodnictwem Hugona Steinhausa. Pojechał więc do Wrocławia, znalazł dom, podjął pracę na Uniwersytecie Wrocławskim – i został do końca życia. Od tego też czasu datuje się nasza znajomość, która rychło przeszła w przyjaźń. Bolek pospiesznie odrabiał zaległości. Czas jakiś spędził w Moskwie, uczęszczając na znakomite seminarium algebraiczne Aleksandra Kurosza (z którym się zaprzyjaźnił), a we Wrocławiu doktoryzował się z algebry (promotorem był Stanisław Hartman). Był to już jednak 1961 rok, Bolek skończył wtedy czterdzieści dwa lata, a nie jest to wiek, w którym matematyk zaczyna karierę naukową. Niemniej, Bolek z wielkim zapałem zaczął wykładać nowoczesną algebrę i napisał z jej zakresu kilka prac (interesował się uogólnieniami algebr klasycznych, jak pierścienie niełączne i n-grupy), a także dwa podręczniki *Elementy algebry abstrakcyjnej* oraz *Algebra*. Zajął się nieznaną we Wrocławiu lingwistyką matematyczną, badając charakterystyki rozkładu długości sylabicznej i entropię rozkładów w polskich publikacjach, publikując z tej tematyki osiemnaście prac. Mając bogate doświadczenie nauczycielskie, napisał dwadzieścia osiem artykułów z dydaktyki matematyki (większość w czasopiśmie *Matematyka*), a także z wielkim powodzeniem prowadził tam przez wiele lat kącik zadań. Wyrazem uznania dla jego osiągnięć było przyznanie mu w 1971 roku tytułu naukowego docenta, dającego mu status samodzielnego pracownika nauki, a w szczególności prawo do promowania własnych doktorów. Nie była to habilitacja i z tego powodu prawo to było w środowisku kontestowane. Był to dodatkowy powód, dla którego Bolek najwięcej serca i pasji wkładał w wykładanie. Bardzo to lubił, a jego wykłady – przeplatane anegdotami i wygłaszane znakomitą polszczyzną – przeszły do legendy, jego zaś znakomita *Algebra*, wydana w 1976 roku, była kilkakrotnie wznawiana (ostatni raz w 2002 roku).

Po odstawieniu szachów jego pasją w Polsce stały się wycieczki górskie. Wakacje zwykł był spędzać z rodziną w karkonoskiej Przesiece, a kiedy dzieci podrosły, tradycyjnie sierpień spędzał w polskich Tatrach, które wielokrotnie zszedł wszerz i wzdłuż. Chodził samotnie, ale chętnie prowadzał w góry przyjaciół.

Trwał siermiężny PRL, a w 1968 roku przyszedł państwowy antysemityzm. Czystki objęły także uczelnie i z Uniwersytetu Wrocławskiego musieli wtedy odejść, między innymi, Edward Marczewski, organizator powojennej matematyki we Wrocławiu i zasłużony rektor, oraz Stanisław Hartman, promotor Bolka. Nie było Bolkowi łatwo, ale zdołał się oprzeć się długotrwałym naciskom i nie wyjechał (zrezygnował wówczas z wyjazdów do Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Opolu, ale niebawem dodatkową pracę znalazł w Wyższej Szkole Oficerskiej Wojsk Zmechanizowanych we Wrocławiu oraz jako konsultant w Instytucie Kształcenia Nauczycieli). A kiedy w 1976 roku zaczęła się w Polsce organizować tzw. opozycja demokratyczna, Bolek szybko do niej przystał i stał się wkrótce jednym z najbardziej aktywnych wrocławskich działaczy. W ślady ojca poszły dzieci, syn Aleksander i córka Helena, podówczas studenci i aktywni działacze Niezależnego Związku Studenckiego, organizacji nielegalnej i aktywnie przez władze zwalczanej. Kiedy w 1978 roku powstało Towarzystwo Kursów Naukowych, patronujące niezależnej oświacie, a w szczególności Uniwersytetowi

Latającemu – Bolek był jednym z jego członków założycieli. Dwa lata później z radością powitał powstanie NSZZ „Solidarność" i wszedł w skład władz Związku na Uniwersytecie Wrocławskim, a po wprowadzeniu stanu wojennego był jednym z liderów strajku protestacyjnego na Uniwersytecie. Po jego złamaniu zszedł do podziemia i tam pracował dla zdelegalizowanej „Solidarności", za co był poszukiwany listem gończym. W tym czasie dzieci wyemigrowały do Norwegii, choć Aleksander wrócił do wolnej Polski. Po paru latach ukrywania się Bolek wyszedł z podziemia pod przyjętym przez władzę warunkiem, że nie zostanie uwięziony. W 1989 roku, kiedy w Polsce komunizm upadł, Bolek był już emerytem, ale przez wiele jeszcze lat aktywnie uczestniczył w życiu politycznym, ciesząc się powszechnym szacunkiem (zob. [2]).

Pasja społeczna Bolka dawała o sobie znać na wielu polach. Wysoko cenił i bardzo lubił środowisko matematyczne, jego poziom moralny i naukowy, w tym szczególnie etos przedwojennej szkoły warszawskiej, który zaszczepiał we Wrocławiu Marczewski, a także bogate życie towarzyskie. Aktywnie uczestniczył w życiu Polskiego Towarzystwa Matematycznego jako wieloletni członek komisji zajmujących się nauczaniem matematyki i stały uczestnik zjazdów matematycznych. Także przez wiele lat prowadził dział zadań w miesięczniku *Matematyka* i bardzo lubił comiesięczne posiedzenia redakcji w mieszkaniu Bolesława Iwaszkiewicza, założyciela i dożywotniego redaktora tego czasopisma.

Z talentem dydaktycznym Bolka wiązało się dobre pióro, a świetna pamięć, towarzysząca mu do końca życia, pozwoliła na napisanie wspomnień z najbardziej dramatycznej w jego życiu dekady 1939–1949, od opuszczenia Warszawy jesienią 1939 roku do ukończenia studiów na uniwersytecie w Odessie w 1949 roku. Tom pierwszy *Widziane z oddali* ukazał się jeszcze w 1993 roku, a teraz wyszły trzy tomy całości [1]. Lektura tych wspomnień wciąga, autor pisze bowiem bez jadu, z pogodą ducha relacjonując swoje dramatyczne przygody, całą natomiast niechęć i obrzydzenie kierując w stronę nieludzkich totalitaryzmów: hitlerowskiego, który zabrał mu rodzinę i zniszczył świat młodości, oraz stalinowskiego, w którym przeżył niemal dwie dekady cierpień. Wspomnienia te są przepojone miłością do rodziny, matematyki i Polski, do polskiego języka i polskiej kultury. Pisał je w wolnych chwilach we Wrocławiu, ale nie miał ich wiele, pochłaniała go bowiem najpierw działalność uniwersytecka, a potem pasja społecznikowska i tym się tłumaczy, że dalszego ciągu nie napisał. Brakowało czasu (zob. [3]).

Po latach zasługi Bolka zyskały uznanie. Ucieszyło go przyznanie Wielkiej Nagrody Polskiego Towarzystwa Matematycznego im. Samuela Dicksteina za popularyzowanie matematyki (w 1998 roku), wielką radość sprawiło mu przyznanie przez Uniwersytet Opolski tytułu profesora honorowego, a szczególną dumą napawały go ordery – Krzyż Kawalerski Orderu Odrodzenia Polski (w 1993 roku) i Krzyż Komandorski Orderu Odrodzenia Polski (w 1999 roku).

Zmarł 26 września 2019 roku i został pochowany obok żony na cmentarzu św. Rodziny we Wrocławiu.

Cytowane prace

[1] B. Gleichgewicht, *Wspomnienia*, Wrocław 2019 (3 tomy: *I. Szpion pijanica (1939–1942)* (wcześniej *Widziane z oddali*), *II. Broniąc nieba (1942–1945)*, *III. Nikołajewka (1945–1947). Odessa (1947–1949)*).

[2] R. Rubnicki, *Opozycja w PRL. Słownik Biograficzny 1956–1989*, t. II, Ośrodek Karta, Warszawa 2002.

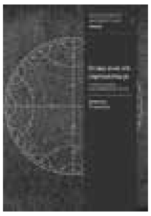
[3] M. Tomczyk, *Bolesław Gleichgewicht – życie i działalność*, Instytut Matematyczny UWr, Wrocław 2006 (praca magisterska).

Roman Duda (Wrocław)

Koncert Pera Enflo na Zjazdzie Stulecia PTM (fot. Aleksandra Dudziak)

Wiad. Mat. 55 (2) 2019, 473–480

Recenzje



Andrzej Trautman, *Grupy oraz ich reprezentacje z przykładami zastosowań w fizyce*, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Warszawa 2019, 302 str. str.

1. Wprowadzenie

Książka *Grupy oraz ich reprezentacje z przykładami zastosowań w fizyce* Andrzeja Trautmana ukazała się jako trzecia pozycja w nowej serii Księgozbiór matematyczny IM PAN. Autor, wybitny fizyk teoretyk, współtwórca teorii fal grawitacyjnych, był zawsze znany z zainteresowań matematycznych. Pamiętam, że jako początkujący asystent uczęszczałem na jego wykład (prowadzony poza pensum akademickim w Insytucie Fizyki UW), w czasie którego przedstawiał zainteresowanym kolegom fizykom oraz studentom Instytutu Fizyki fragmenty algebry w ujęciu Bourbakiego.

Omawiana książka wpisuje się w krąg tych zainteresowań, choć tym razem chodzi o kursowy wykład dla studentów, zatytułowany Metody matematyczne fizyki, prowadzony od lat przez autora.

Pokazana tu poszerzona wersja takiego wykładu może być interesująca dla czytelnika (potencjalnie nie fizyka) z kilku powodów. Po pierwsze, pokazuje jak rozłożone są akcenty ważności dla fizyki różnych fragmentów współczesnej matematyki (ograniczonej tu do algebry, analizy i geometrii różniczkowej). Po drugie, takie ujęcie, unikające trudności technicznych oraz opuszczające część dowodów, daje łatwiejszy wgląd – niejako z lotu ptaka – w strukturę dużych fragmentów współczesnej matematyki.

2. Zawartość książki

Książkę otwierają cztery rozdziały tworzące algebraiczny fundament dla dalszych części.

Rozdział pierwszy wprowadza kolejno grupy, pierścienie, moduły i algebry. Specjalną uwagę poświęca autor ogólnym algebrom, w tym algebrom łącznym i algebrom Liego. Spora część prezentowanego materiału jest rzadko obecna w standardowych kursach algebry i odzwierciedla fizyczne tło książki.

Rozdział drugi poszerza dotychczasowe informacje o grupach o sprawy generatorów i relacji, wprowadzając pojęcia nilpotentności i rozwiązalności grupy. Omawia też ważne w dalszej perspektywie grupy $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ oraz $\mathrm{SU}(2)$.

Dwa dalsze rozdziały wprowadzają tytułową problematykę: reprezentacje grup. Ze względu na to, że w dalszym tekście są one powiązane z reprezentacjami algebr Liego oraz algebr łącznych, autor w rozdziale trzecim rozpoczyna od dyskusji ogólnej sytuacji, kiedy na zbiorze Ω jest dana rodzina funkcji o wartościach w przestrzeni liniowej endomorfizmów ustalonej przestrzeni liniowej X nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ lub zespolonych $\mathbb{C}$. Dla takiej rodziny, nazywanej dalej reprezentacją zbioru Ω, dyskutowane są podstawowe pojęcia teorii reprezentacji – przywiedlność, nieprzywiedlność i rozkładalność. Dla dwóch reprezentacji tego samego Ω dyskutuje się odwzorowania splatające i równoważność reprezentacji. Pojawia się też lemat Schura.

Druga część prezentowanej teorii reprezentacji (ważna w kontekście teorii Liego) dotyczy ich własności związanych z zawieraniem $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Omawiane są konstrukcje reprezentacji sprzężonej do danej oraz wyróżnione reprezentacje typu rzeczywistego zespolonego i kwaternionowego. Studiowane są pojęcia realifikacji i kompleksyfikacji. Pojawia się pojęcie elementów macierzowych.

W dalszej części tego rozdziału omawiana dotąd klasa reprezentacji zbiorów rozbijana jest na podklasy w związku z pojawieniem się w Ω struktury grupy lub algebry. Wtedy od reprezentacji Ω wymaga się, aby była homomorfizmem względem tej struktury o wartościach w $\mathrm{End}\, X$. Pojawiają się pojęcia sumy prostej oraz iloczynu tensorowego reprezentacji. Ten ostatni jest specjalnie ważny dla związków teorii reprezentacji z fizyką.

Rozdział czwarty daje zwięzły zarys teorii reprezentacji grup skończonych. Omawiane są uśrednienia, reprezentacja regularna, relacje ortogonalności, tablice charakterów oraz twierdzenie Frobeniusa–Schura i twierdzenie Younga.

Po pierwszej części tekstu poszerzającej wiedzę czytelnika (w zamyśle studenta fizyki) o wymagane dalej podstawy algebraiczne następują trzy części przeplatające się w układzie książki, a reprezentujące trzy wątki: interakcję geometrii różniczkowej i fizyki, interakcję teorii Liego i fizyki oraz rolę symetrii (reprezentacji grup) w mechanice hamiltonowskiej i w nierelatywistycznej mechanice kwantowej jednej cząstki.

Pierwsza z wymienionych trzech części omawiana jest w rozdziałach piątym i ósmym.

Rozdział piąty zawiera przegląd informacji o rozmaitościach gładkich, polach wektorowych i formach różniczkowych. Standardowe ujęcie poszerzone jest o wiązki włókniste, algebrę zewnętrzną Cartana i kohomologie de Rhama.

Rozdział ósmy jest bardziej zorientowany w stronę fizyki. Wprowadza on spinory i twistory oraz dyskutuje równanie Diraca algebry Clifforda i struktury spin na rozmaitościach.

Drugą z wymienionych części stanowią rozdziały szósty, siódmy i dziewiąty. Prezentują one zwięzły, bardzo ciekawy i kompletny wykład teorii Liego.

Zwraca uwagę rozdział dziewiąty omawiający półproste algebry Liego, w tym klasyfikację prostych algebr zespolonych oraz podający ich reprezentacje nieprzywiedlne. Ich opis wymaga algebr Clifforda, stąd luka w numeracji rozdziałów traktujących o teorii Liego.

Książkę zamyka rozdział dziesiąty zatytułowany *Przykłady zastosowań grup w fizyce*, omawiający trzeci z opisanych wątków. Pozostałe przykłady zastosowań teorii reprezentacji grup i algebr Liego rozsiane są w postaci osobnych paragrafów w rozdziałach od siódmego do dziewiątego.

3. Podsumowanie

Dzięki ścisłości i zwięzłości prezentacji oraz jej zakresowi książka daje unikatowy wgląd w część matematyki inspirowaną i wykorzystywaną przez współczesną fizykę teoretyczną.

Poza studentami, dla których był przeznaczony oryginalny skrypt, na osnowie którego powstała ta książka, jej potencjalnych czytelników można widzieć w dwóch grupach: tych, którzy będą w niej szukać inspiracji dla własnych wykładów lub innych poczynań naukowych i tych, dla których będzie pomocą przy poszerzeniu horyzontów dotyczących związku matematyki i fizyki. Niemałą grupę wśród tych ostatnich utworzą ci, dla których fizyka jest trochę za daleko, za to dzięki tej książce zrozumieją lepiej „swoją" matematykę.

Na koniec osobisty niedosyt. Książka ociera się o jedną z tajemnic nauki – jak to jest, że badacz natury niczym obserwator, który po tykaniu zegarka usiłuje domyślić się, jak działa jego wnętrze, w swoim trudzie tak często znajduje gotowe zawczasu fragmenty matematyki. Znanych jest kilka zadziwiających przykładów tej sytuacji, gdy w roli badacza wystąpili Einstein czy Gell-Mann. Niestety źródłowy dla książki wykład musiał być wolny od takiej mętnej filozofii.

Wojciech Wojtyński
Wydział Matematyki
Uniwersytet w Białymstoku

Jerzy Rutkowski, *Teoria liczb w zadaniach*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2018, 166 str.

Recenzowana książka jest zbiorem zadań z elementarnej teorii liczb. Składa się z ośmiu rozdziałów, przy czym ostatni z nich zawiera rozwiązania i odpowiedzi do zamieszczonych zadań (których jest blisko trzysta). Rozdziały od pierwszego do siódmego dotyczą kolejno: podzielności w zbiorze liczb całkowitych, równań diofantycznych, ułamków łańcuchowych, kongruencji, funkcji arytmetycznych, sum równych potęg oraz liczb p-adycznych. Każdy z rozdziałów ma podobną strukturę: zawiera krótką informację teoretyczną dotyczącą poruszanego zagadnienia, przykładowo rozwiązane zadania oraz zestaw zadań do samodzielnego rozwiązania. Zakres poruszanych tematów mniej lub bardziej pokrywa tematykę podstawowego wykładu z teorii liczb. Autor wyraźnie zaznacza, że większość zadań jest łatwa i ma charakter rachunkowy. Szkoda, że w prezentowanym zbiorze nie znalazło się więcej zadań o innym charakterze, mniej technicznych, wymagających pewnej pomysłowości, które mogłyby stanowić wyzwanie dla studentów o zacięciu teoretycznym.

Rzecz jasna, zawartość części teoretycznej (a tym samym praktycznej) prezentowanego zbioru zadań jest indywidualnym wyborem autora. Wydaje się jednak, że zbiór zyskałby na jakości, gdyby został uzupełniony o dodatkowe informacje. I tak, w rozdziale drugim, bardzo niewiele miejsca poświęcono na równania diofantyczne drugiego stopnia. W mojej opinii, w takim rozdziale powinna znaleźć się metoda rozwiązywania jednorodnych równań stopnia drugiego (czyli na przykład równania Pitagorasa $x^2 + y^2 = z^2$). Tym samym czytelnik otrzymałby metodę parametryzacji rozwiązań *wymiernych* równań zadanych przez (niekoniecznie jednorodne) wielomiany stopnia drugiego (oczywiście przy założeniu istnienia nietrywialnego rozwiązania wymiernego). Podobnie w rozdziale czwartym nie zaszkodziłoby przedstawić ogólnej wersji chińskiego twierdzenia o resztach, tj. ogólnego twierdzenia gwarantującego istnienie rozwiązania w sytuacji, gdy moduły w rozważanym układzie kongruencji nie są parami względnie pierwsze.

Nie jest dla mnie jasne, dlaczego autor stosuje oznaczenia $\bigwedge$ i $\bigvee$ na, odpowiednio, kwantyfikator ogólny i szczegółowy, zamiast standardowych międzynarodowych oznaczeń $\forall$ i $\exists$. W Polsce teoria liczb wykładana jest na wydziałach matematycznych (ewentualnie informatycznych) i studenci powinni używać symboli, które ułatwią im czytanie literatury obcojęzycznej. Co do stosowanej symboliki, mam jeszcze jedno zastrzeżenie. W rozdziale poświęconym ułamkom łańcuchowym autor wprowadza dwa niezależne byty, które mogą prowadzić czytelnika do konfuzji. Dokładniej, dla ustalonego ciągu $a_0, a_1, \ldots, a_n$ liczb rzeczywistych spełniających warunek $a_i > 0$ dla $i \in \{1, \ldots, n\}$ wprowadza się pojęcia skończonego ułamka łańcuchowego $\langle a_0; a_1, \ldots, a_n \rangle$ oraz jego wartości

$$[a_0; a_1, \ldots, a_n] = \\ = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

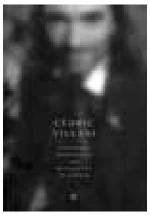
Przez przejście z n do nieskończoności w analogiczny sposób definiowane jest pojęcia nieskończonego ułamka łańcuchowego i jego wartości (przy założeniu, że ta wartość istnieje i jest skończona). Jak rozumiem, celem było uwypuklenie różnicy między funkcją działającą na odpowiednich ciągach oraz wartością tej funkcji na określonym ciągu. Jedyna znana mi pozycja książkowa, w której przyjęto taką konwencję, to *Teoria liczb* Władysława Narkiewicza. W mojej opinii prowadzi to do niepotrzebnych komplikacji zapisu i nie rozumiem, dlaczego nie zdefiniować ułamka łańcuchowego właśnie poprzez jego wartość? Zwłaszcza, że interesują nas tylko arytmetyczne ułamki łańcuchowe, tj. takie, że $a_0 \in \mathbb{Z}$ i $a_i \in \mathbb{N}_+$ dla $i \geqslant 1$. Przy tym założeniu nie ma kłopotu ze zbieżnością nieskończonych ułamków łańcuchowych i unikamy sztucznego problemu rozróżnienia między wyrażeniami $\langle a_0; a_1, \ldots, a_n \rangle$ a $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ i ich nieskończonymi odpowiednikami.

W książce część twierdzeń jest wyróżniona, inne zaś pisane są zwykłym tekstem. Nie jest dla mnie jasne, według jakiego klucza wybierano twierdzenia przedstawione pogrubionym tekstem. Chyba najbardziej jaskrawym przykładem jest brak wyróżnienia twierdzenia Gaussa o istnieniu pierwiastków prymitywnych (str. 79). Twierdzenie to jest fundamentalne i powinno to być zaznaczone, by czytelnik nie odniósł wrażenia, że rezultat ten jest mało ważny. Podobna sytuacja dotyczy charakteryzacji liczb naturalnych, które można przedstawić za pomocą sum trzech kwadratów (str. 104).

Spis literatury jest bogaty, ale żadna z jego pozycji nie jest cytowana. Jestem pewien, że czytelnik zainteresowany dowodami twierdzeń przedstawionych w części teoretycznej zyskałby, gdyby znalazły się przy nich odnośniki do konkretnych pozycji książkowych.

Pomimo powyższych (subiektywnych) uwag krytycznych uważam, że przedstawiony zbiór zadań może być użyteczną pomocą dla studentów uczęszczających na podstawowy wykład z teorii liczb. W polskojęzycznej literaturze jest niewiele zbiorów zadań z teorii liczb przeznaczonych dla studentów kierunków matematycznych i książka Jerzego Rutkowskiego wypełnia istniejącą lukę w tym zakresie. Rozwiązanie wszystkich zadań z tego zbioru i nabycie niezbędnej wprawy rachunkowej może być dobrym wstępem do zmierzenia się z zadaniami z klasycznego już zbioru *250 zadań z elementarnej teorii liczb* Wacława Sierpińskiego czy też zadań znajdujących się w książkach z serii *Podróże po imperium liczb* Andrzeja Nowickiego.

Maciej Ulas
Instytut Matematyki
Uniwersytet Jagielloński



Cédric Villani, *Narodziny twierdzenia, czyli matematyka na gorąco*, tłumaczenie Iwo Labuda, Oficyna Wydawnicza Atut, Wrocław 2018, 274 str.

Książka jest pewnego rodzaju pamiętnikiem wybitnego matematyka francuskiego Cédrica Villaniego, który opisuje około trzydzieści miesięcy swojego życia, od 23 marca 2008 roku w Lyonie do 17 listopada 2010 roku w Saint-Remy-les-Chereuse koło Paryża.

Treść pamiętnika to dokładny opis wspólnych zmagań autora i jego doktoranta Clementa Mouhota z narodzinami tytułowego twierdzenia. Dotyczą one intensywnych badań autora w zakresie głębokich problemów z fizyki statystycznej i „twardej" analizy matematycznej, związanymi z rozwiązaniami równania Własowa, inaczej znanych także jako tłumienie Landaua. Artykuł będący wynikiem pracy opisanej w książce liczy ponad sto osiemdziesiąt stron i została opublikowana w *Acta Mathematica* w 2011 roku.

Artykuł ten oraz wybitne wyniki dotyczące stanów stacjonarnych równania Boltzmanna, w tym dowód hipotezy Cercignaniego stanowiły podstawę do wręczenia mu medalu Fieldsa w Hajdarabadzie w Indiach 19 sierpnia 2010 roku. Cała uroczystość jest dokładnie opisana przez autora w rozdziale czterdziestym trzecim recenzowanej książki.

Dla podkreślenia dynamiki rodzącego się twierdzenia o tłumieniu Landaua autor załącza oryginały e-maili wymienianych z współautorem Clementem Mouhot, które pozwalają śledzić, jak powstawało ich twierdzenie, któremu jest poświęcona książka. Ta część wspomnień jest bardzo naturalna i chyba pierwszy raz e-maile występują w literaturze matematycznej.

Cały pamiętnik jest podzielony na czterdzieści cztery rozdziały oraz epilog o pobycie Cédrica Villaniego w Budapeszcie. Ponadto dołączono aneksy tłumaczeń pewnych oryginalnych fragmentów książki jak zaproszenia, abstrakty wykładów i listów oraz oryginały poezji Jeana Huarda i piosenki Catherine Ribeiro – ulubionej piosenkarki autora. Prawie każdy rozdział pamiętnika kończy się uwagami bibliograficznymi i historycznymi związanymi z aktualną treścią książki.

I tak rozdziały o numerach poniższych dotyczą następujących treści.

1. Ludwig Boltzmann – pojęcie entropii i równanie Boltzmanna.
2. Lew Dawidowicz Landau – opis tłumienia Landaua.
3. Isaac Newton i Andriej Kołmogorow – bogowie matematyki.
4. Joseph Fourier i jego wspaniała analiza harmoniczna.
8. Donald Knuth jako „żyjący bóg informatyki".
9. Historia Instytutu Badań Zaawansowanych (Institute for Advanced Study – IAS) w Princeton.
15. Paradoks Scheffera–Sznirelmana – najbardziej zdumiewający wynik mechaniki cieczy.

16. Historia Instytutu im. Henriego Poincarégo w Paryżu.
20. Joel Lebowitz – „papież fizyki statystycznej". Paul Cohen i hipoteza continuum.
22. Cytat z André Weila: – „Każdy matematyk godny tego miana musiał doświadczyć, choćby wyjątkowo, stanu iluminacji, w którym jedna myśl biegnie cudownie za drugą... W przeciwieństwie do rozkoszy erotycznych takie uczucie ekstazy może trwać kilka godzin, a nawet kilka dni."
23. Elliot Lieb i jego nierówności.
29. Wielki John Nash i jego twierdzenia o ciągłości rozwiązań równań parabolicznych o współczynnikach nieciągłych.
30. Nierozwiązany problem Collatza albo inaczej „problem $3n + 1$".
31. Władimir Wojewodski – problem czterech kolorów i informatyka konstruktywna.
35. Henri Poincaré i historia problemu Mittag-Lefflera – „temat stabilności Układu Słonecznego – otwarty od czasów Newtona!".
39. Hipoteza Cercignaniego o związkach między entropią i powstawaniem entropii w gazie.
40. Historia powstania medalu Fieldsa.
42. Milenijna hipoteza Poincarégo i Grigorij Perelman.
43. Wręczenie medali Fieldsa w Hajdarabadzie w 2010 roku.
44. Narodziny twierdzenia Clementa Mouhota i Cédrica Villaniego opisanego w recenzowanej książce po przyjęciu do publikacji w *Acta Mathematica*.

Epilog książki dotyczy pobytu Cédrica Villaniego w Budapeszcie u wybitnego matematyka Gabora Domokosa, odkrywcy „gomboca" – niezwykłej bryły w kształcie sferoidy, która posiada dokładnie jeden punkt równowagi stałej i jeden punkt równowagi chwiejnej. W istnienie tej fenomenalnej i niezwykłej bryły wierzył Władimir Arnold. Gabor Domokos poświęcił dwanaście lat na poszukiwanie jej kształtu (na stronie 262 jest jej fotografia). Tak pisze o niej autor w ostatnim zdaniu epilogu i książki: „[j]est to odwieczna historia, historia matematyczna, historia entuzjazmu, marzeń i poszukiwań."

Ponadto w pamiętniku autor bardzo szczegółowo opisuje swój pobyt z rodziną w IAS w Princeton oraz liczne spotkania z wielkimi matematykami i fizykami w USA – w MSRI w Berkeley, w Japonii – w Kioto i innych ośrodkach matematycznych na świecie.

Książka jest napisana przystępnym językiem dzięki bardzo starannemu tłumaczeniu Iwo Labudy i czyta się ją bardzo przyjemnie. Gorąco polecam ją wszystkim uczonym, a w szczególności matematykom i fizykom matematycznym. Jako ciekawostkę dodam, że w samej Francji książka Cédrica Villaniego została sprzedana w ponad milionie egzemplarzy!

W książce brak spisu treści, indeksu autorów i przypisów bibliograficznych, ale wówczas byłaby to prawie monografia. Warto w tym miejscu odesłać do opublikowanej ostatnio, prawie tysiącstronicowej książki Villaniego *Optimal transport: old and new*.

Matematyka przedstawiana w książce dotyczy bardzo trudnego obszaru badań z teorii równań różniczkowych cząstkowych, fizyki statystycznej i nierówności typu Sobolewa w przestrzeniach funkcyjnych i do dokładnego zrozumienia tych zagadnień potrzebny jest duży wysiłek czytelnika.

O samym autorze można znaleźć w Internecie mnóstwo faktów z jego życia i matematycznej twórczości. Osobiście spotkałem Cédrica Villaniego w Oberwolfach na konferencji z probabilistyki wolnej. Jest otwarty na problemy i pytania prawie na każdy temat. Ubiera się szczególnie – codziennie chodzi w trzyczęściowym garniturze z kamizelką, nosi fular, broszkę w kształcie pająka, a w kieszeni obowiązkowo kieszonkowy zegarek.

W latach 2009–2017 był dyrektorem Instytutu Henri Poincarégo, a w 2017 został członkiem ruchu politycznego En Marche! prezydenta Francji Emmanuela Macrona i uzyskał mandat do Zgromadzenia Narodowego Francji XV kadencji.

Z treści książki widzimy, że dla autora bardzo ważna jest muzyka – klasyczna i popularna, która w trudnych chwilach jest mu bardzo pomocna.

Warto podkreślić, że Cédric Villani jest też współautorem zabawnego komiksu – napisał scenariusz, rysunki są dziełem Edmonda Baudoina, a komiks jest zatytułowany *Księżycowi marzyciele. Czterej geniusze, którzy zmienili historię*.

Jeszcze raz polecam specjalistom i nie tylko bardzo miły pamiętnik matematyczny Cédrica Villaniego.

Marek Bożejko
IM PAN

Wiad. Mat. 55 (2) 2019, 481–485

Książki nadesłane

Amir D. Aczel, *W poszukiwaniu zera. Matematyczna odyseja do źródeł pochodzenia liczb*, tłumaczenie Bogumił Bieniok i Ewa L. Łokas, Prószyński i S-ka, Warszawa 2017, 232 str.

Autor – amerykański profesor matematyki, jeden z najbardziej znanych jej popularyzatorów – szuka odpowiedzi na pytanie, kiedy i gdzie po raz pierwszy pojawiły się liczby, kto dokonał przełomu, który ukształtował całą historię ludzkości. Poszukiwania te zaprowadziły autora najpierw do krajów Dalekiego Wschodu, a w końcu do kambodżanskiej dżungli.

Zenon Moszner, *O równaniach funkcyjnych*, GlobeEdit, Beau Bassin, Mauritius 2019, 228 str.

Jest to w miarę popularne wprowadzenie do teorii równań i nierówności funkcyjnych. Autor pokazuje wiele elementarnych zastosowań tej teorii w optyce, szczególnej teorii względności, teorii obiektów geometrycznych, geometrii nieeuklidesowej, teorii wyborów i teorii stabilności, a także związki tej teorii z matematyką szkolną. Książka może zainteresować zarówno nauczycieli, studentów matematyki, jak i uczniów klas licealnych.

Gojko Adzic, *Człowiek vs komputer*, tłumaczenie Jan Halberstatt, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2019, 267 str.

Książka opowiada o ludziach złapanych w pułapkę między błędnymi założeniami a błędami w oprogramowaniu. Można w niej przeczytać m.in. o osobach niewidzialnych dla komputerów, o tym, jak pozostawienie domyślnego hasła doprowadziłoby do apokalipsy zombie i dlaczego linie lotnicze rozdają czasami darmowe bilety.

☐ Thomas Bedürftig i Roman Murawski, *Philosophie der Mathematik*, Verlag Walter de Gruyter, Berlin/Boston 2019, wydanie czwarte rozszerzone i przerobione, 546 str.

Jest to czwarte już, znów znacznie rozszerzone i przerobione, wydanie monografii (wydanie pierwsze: 2010, wydanie drugie: 2012, wydanie trzecie: 2015) – w *Wiadomościach Matematycznych* 49 (1) (2013) ukazała się recenzja pierwszego wydania. Książka prezentuje refleksję filozoficzną nad matematyką od czasów starożytnej Grecji po czasy współczesne. Osią rozważań są liczby rzeczywiste i pojęcie kontinuum. Wiele uwagi poświęcono pojęciu liczby, problemowi nieskończoności i wielkościom nieskończenie małym oraz opartej na nich analizie niestandardowej. Mowa też o znaczeniu logiki i podstaw matematyki dla filozofii matematyki oraz o problemach filozoficznych związanych z teorią mnogości. Autorzy nie tylko relacjonują poglądy innych, ale formułują także własną wizję filozoficzną matematyki.

☐ Keith Devlin, *Myślenie matematyczne. Twój nowy sposób pojmowania świata*, tłumaczenie Tomasz Walczak, Wydawnictwo Helion, Gliwice 2019, 148 str.

Celem książki jest pomoc początkującym studentom matematyki w doskonaleniu matematycznego sposobu myślenia. Autor – brytyjski matematyk, logik i popularyzator matematyki oraz logiki – opowiada, czym jest matematyka, mówi o języku matematyki, o dowodach i o dowodzeniu twierdzeń dotyczących liczb oraz o teorii mnogości.

☐ Bolesław Gleichgewicht, *Wspomnienia. Tom 1: Szpion pijanica/1939–1942, tom 2: Broniąc nieba/1942–1945, tom 3: Nikołajewka/1945–1947, Odessa/1947–1949*, Polskie Towarzystwo Matematyczne, Warszawa 2019, wydanie drugie, 333 + 263 + 354 str.

Są to fascynujące wspomnienia Bolesława Gleichgewichta, profesora Instytutu Matematycznego Uniwersytetu Wrocławskiego. Obejmują lata 1939–1947. Autor opowiada o siedemnastu trudnych latach spędzonych w Związku Radzieckim, służbie w Armii Czerwonej, kontynuacji po wojnie studiów w Odessie (rozpoczętych przez wojną w Warszawie, gdzie słuchał wykładów m.in. Wacława Sierpińskiego, Stefana Mazurkiewicza, Stanisława Saksa, Jana Łukasiewicza), o pracy nauczycielskiej na ukraińskiej prowincji.

☐ Michał Heller, *Nauka i Teologia – niekoniecznie tylko na jednej planecie*, Copernicus Center Press, Kraków 2019, 128 str.

Autor zarysowuje projekt nowej dziedziny wiedzy, którą nazywa teologią nauki. Ma ona być dyscypliną teologiczną mającą za swój przedmiot badań naukę, zwłaszcza nauki przyrodnicze i ścisłe. Jej wzorcem jest w pewnym sensie filozofia nauki i historia nauki. W książce charakteryzuje się krótko teologię, rozważa się, w jakim sensie nauka może być przedmiotem badań teologicznych, mówi się o związkach teologii i naukowych obrazów świata, o teologii nauki jako aksjologii nauki, teologii nauki w kontekście interpretowania dogmatów, bada się powiązania teologii nauki z teologią naturalną, teologią filozoficzną czy teologią analityczną. Na uwagę zasługuje piękna szata graficzna książki.

☐ Sabine Hossenfelder, *Zagubione w matematyce. Fizyka w pułapce piękna*, tłumaczenie Tomasz Miller, Copernicus Center Press, Kraków 2019, 384 str.

Autorka, fizyk teoretyk, zastanawia się w książce nad przyczynami obecnej stagnacji w fizyce teoretycznej, tropi i obnaża to, co we współczesnej nauce nie arbitralne, lecz modne, nieścisłe, choć zmatematyzowane. Zastanawia się, jaka jest rola poczucia piękna w fizyce, czy teoria może być „zbyt piękna, żeby nie była prawdziwa", czy obiektywność, ścisłość i ostrożność zostały bezpowrotnie „zagubione w matematyce".

☐ Karol Jałochowski, *Heretycy, buntownicy, wizjonerzy. 22 podróże z największymi umysłami naszych czasów*, Copernicus Center Press, Kraków 2019, 367 str.

Książka zawiera rozmowy z dwudziestoma dwoma wybitnymi uczonymi, którzy wywarli realny wpływ na otaczającą nas rzeczywistość. Są wśród nich fizycy, matematycy, biologowie, kosmologowie, filozofowie, informatycy. Wielu z nich to laureaci nagrody Nobla. Autor książki to dziennikarz tygodnika *Polityka*, autor serii dokumentalnej *Pionierzy* dotyczącej wybitnych myślicieli epoki. Zamieszczone w książce wywiady to rozszerzone i uaktualnione wersje rozmów, które w latach 2010–2018 ukazywały się w *Polityce*.

☐ David Kahn, *Łamacze kodów. Historia kryptologii*, tłumaczenie Barbara Kołodziejczyk, Wydawnictwo Zysk i S-ka, Poznań 2019, 1644 str.

Obszerna (licząca ponad 1600 stron) książka dotyczy podstawowych kwestii związanych z organizacją i działalnością rozmaitych struktur społecznych, których domeną jest tajność. Znajdujemy w niej syntezę dziejów kryptologii od starożytności po czasy współczesne. Nie zabrakło też oczywiście opowieści o narodzinach nowoczesnych szyfrów w postaci Enigmy i jej złamania przez trójkę polskich kryptologów i Alana Turinga. Dobrze napisana, czyta się ją jak sensacyjną powieść.

☐ Alfred S. Posamentier, Robert Geretschläger, Charles Li, Christian Spreitzer, *Matematyka jakiej nie znacie. Ciekawostki i perełki, o których nie uczą w szkole*, tłumaczenie Tomasz Grębski, Prószyński i S-ka, Warszawa 2019, 285 str.

Zebrane przez autorów (matematyków pracujących na uniwersytetach amerykańskich i austriackich) w książce perełki i ciekawostki pokazują potęgę i piękno matematyki. Książka zainteresuje zarówno pasjonatów tej nauki, jak i tych, których szkolna matematyka odstraszyła.

David Sumpter, *Osaczeni przez liczby. O algorytmach, które kontrolują nasze życie. Od Facebooka i Google'a po fake newsy i bańki filtrujące*, tłumaczenie Radosław Kosarzycki, Copernicus Center Press, Kraków 2019, 335 str.

David Sumpter, profesor matematyki stosowanej na uniwersytecie w Uppsali, sprawdza w książce, czy i w jakim stopniu matematyka przekracza niebezpieczne granice, ingerując w podejmowane przez nas decyzje. Autor opisuje techniki statystyczne i dostarcza rzeczywistych przykładów ich działania. Pokazuje, jak analitycy danych starają się nas przekonywać i sterować naszymi zachowaniami.

Marcin Szeliga, *Praktyczne uczenie maszynowe*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2019, 466 str.

W książce opisano rozwiązania kilkunastu typowych problemów, m.in. prognozowanie zysków, optymalizacja kampanii marketingowej, proaktywna konserwacja sprzętu czy ocena ryzyka kredytowego. Każdy przykład stanowi przy tym okazję do wyjaśnienia określonych zagadnień, poczynając od narzędzi, przez podstawy uczenia maszynowego, sposoby oceny jakości danych i ich przygotowania do dalszej analizy, zasady tworzenia modeli uczenia maszynowego i ich optymalizacji, aż po wskazówki dotyczące wdrożenia gotowych modeli do produkcji. Książka zainteresuje zarówno studentów informatyki, jak i analityków, programistów i administratorów danych oraz statystyków.

Krzysztof Śleziński, *Towards Scientific Metaphysics. Volume 1: In the Circle of the Scientific Metaphysics of Zygmunt Zawirski. Development and Comments on Zawirski's Concepts and their Philosophical Context*, Peter Lang, Berlin–Bern–Bruxelles–New York–Oxford–Warszawa–Wien 2019, 164 str.

Celem książki jest prezentacja i analiza badań Zygmunta Zawirskiego (1882–1948) – polskiego filozofa i logika, jednego z czołowych przedstawicieli szkoły lwowsko-warszawskiej – dotyczących teorii poznania, mechaniki kwantowej, logiki, ontologii i metafizyki.

Krzysztof Śleziński, *Towards Scientific Metaphysics Volume 2: Benedykt Bornstein's Geometrical Logic and Modern Philosophy. A Critical Study*, Peter Lang, Berlin–Bern–Bruxelles–New York–Oxford–Warszawa–Wien 2019, 217 str.

Monografia dotyczy logiki geometrycznej Benedykta Bornsteina (1880–1948) – oryginalnego polskiego filozofa okresu międzywojennego działającego poza kręgiem szkoły lwowsko-warszawskiej. Autor analizuje idee Bornsteina, zwracając uwagę na zastosowanie w filozofii narzędzi algebraicznych i geometrycznych.

Krzysztof Śleziński, *Zawirski – Białobrzeski – Bornstein. Trzy koncepcje filozofii i rzeczywistości*, Wydawnictwo Naukowe Semper, Warszawa 2019, 261 str.

Autor przedstawia, omawia i poddaje analizie krytycznej koncepcje trzech uczonych: Czesława Białobrzeskiego (1887–1953), Zygmunta Michała Zawirskiego (1882–1948) i Benedykta Leona Bornsteina (1880–1948). Miały one stanowić podstawę opracowania naukowej metafizyki, uwzględniającej teorie naukowe powstałe w pierwszej połowie XX wieku. Autor bada m.in. na ile te programy budowania filozoficznej teorii rzeczywistości są nadal aktualne i w jakim zakresie są rozwijane, czy współcześnie jest możliwe rozumienie rzeczywistości przy jednoczesnym pomijaniu pogłębionej refleksji filozoficznej nad rozwojem teorii przyrodniczo-matematycznych, w jakim zakresie jest możliwa filozoficzna synteza nauk szczegółowych, czy i w jakim zakresie analizowane trzy koncepcje są ze sobą zgodne, w jakim zakresie nauka i filozofia są autonomicznymi dziedzinami wiedzy w ujęciu Zawirskiego, Białobrzeskiego i Bornsteina.

Andrew W. Trask, *Zrozumieć głębokie uczenie*, tłumaczenie Marek Włodarz, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2019, 330 str.

Autor to doświadczony ekspert w zakresie uczenia głębokiego, czyli działu sztucznej inteligencji, który pozwala komputerom uczyć się za pomocą sieci neuronowych. W książce pokazuje się, jak od zera można budować sieci neuronowe głębokiego uczenia. Od czytelnika wymaga się wiedzy matematycznej na poziomie szkoły średniej i średnich umiejętności programistycznych.

Opracowanie: Roman Murawski (Poznań)