

NIELINIOWE ZAGADNIENIE STACJONARNEGO PRZEPEŁYWU CIEPŁA W DWUSKŁADNIKOWYM PRZEWODNIKU CYLINDRYCZNYM

Piotr OSTROWSKI*

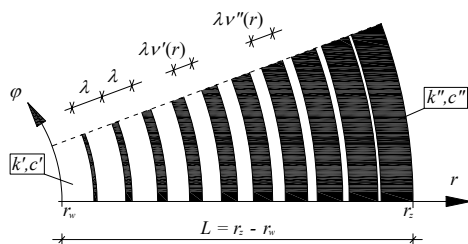
* Department of Structural Mechanics, Technical University in Łódź
Al. Politechniki 6, 90-924 Łódź, e-mail: piotr.ostrowski@p.lodz.pl

Streszczenie: Celem pracy jest analiza nieliniowego stacjonarnego i jednokierunkowego przepływu ciepła w przewodniku cylindrycznym o funkcyjnie zmiennych własnościach efektywnych. Rozważany przewodnik na poziomie mikro składa się z dwufazowych komórek (pierścieni) o stałej szerokości, który przy dostatecznie dużej liczbie komórek można traktować jako materiał o funkcyjnej gradacji własności, FGM (por. [6]). Na brzegi przewodnika została narzucona stała po obwodzie temperatura, a współczynnik przewodzenia ciepła poszczególnych składników zamodelowano wielomianem pierwszego stopnia. Analizie poddano wpływ nieliniowości i rozkładu poszczególnych składników kompozytu na przebieg pola temperatury.

Słowa kluczowe: Przepływ ciepła, FGM, kompozyt.

1. WPROWADZENIE

Przedmiotem rozważań niniejszej pracy jest jednokierunkowy przepływ ciepła w dwuskładnikowym przewodniku cylindrycznym, którego własności termiczne zależne są od temperatury. Omówione tu zostaną problemy związane ze stacjonarnym i jednokierunkowym przypadkiem przepływu ciepła w kompozycie, którego struktura na poziomie mikro składa się z $N + 1$ komórek (dwuwarstwowych pierścieni) o stałej szerokości λ .



Rys. 1. Fragment mikrostruktury kompozytu.

Fig. 1. Part of composite microstructure.

Udział objętościowy poszczególnych składników, względem sąsiednich komórek, zmienia się w sposób skokowy, według funkcji v' oraz $v'' = 1 - v'$. W ten sposób, efektywne własności przewodnika dla dostatecznie dużej liczby N są funkcyjnie zmienne w kierunku promieniowym. Dlatego też, mamy tutaj do czynienia ze szczególnym przypadkiem materiału o funkcyjnej gradacji własności, FGM (por. [7]). Analizę przepływu ciepła w przewodniku cylindrycznym wykonanym z materiału o funkcyjnej gradacji własności, możemy również znaleźć w pracach [2], [6]. W pracy [1] możemy znaleźć zastosowanie teorii wyższego rzędu do analizy przepływu ciepła w materiałach o funkcyjnej gradacji własności.

2. RÓWNANIA MODELU

Zjawisko przewodzenia ciepła opisane jest dobrze znanym równaniem Fouriera

$$c\dot{\Theta} - \nabla \cdot (\mathbf{K} \cdot \nabla \Theta) = Q_v, \quad (1)$$

które zawiera (w tym przypadku) silnie oscylujące i nieciągłe współczynniki \mathbf{K} – tensora przewodzenia ciepła oraz c – ciepła właściwego. Q_v oznacza wewnętrzne źródła ciepła.

W poniższej pracy rozważać będziemy jedynie przypadek jednowymiarowego i stacjonarnego przepływu ciepła, czyli pochodne czasowe są pomijane, oraz bez wewnętrznych źródeł ciepła. Tensor przewodzenia ciepła dla każdego ze składników przyjmujemy w postaci ogólnej

$$\mathbf{K} = \mathbf{k} + f(\Theta), \quad (2)$$

gdzie \mathbf{k} jest tensorem przewodzenia ciepła dla przypadku liniowego. W konsekwencji równanie (1) przyjmuje postać

$$\nabla \cdot ((\mathbf{k} + f(\Theta)) \cdot \nabla \Theta) = 0. \quad (3)$$

Funkcja f w ogólności może być całkowicie dowolna. Dla uproszczenia obliczeń, ograniczymy się tu do wielomianu stopnia pierwszego

$$f(\Theta) = \mathbf{a} \cdot \Theta, \quad (4)$$

gdzie \mathbf{a} jest macierzą współczynników proporcjonalności. Jeśli dodatkowo założymy izotropowość własności poszczególnych składników kompozytu oraz warunki brzegowe I-go rodzaju:

$$\Theta_w = \Theta(r_w), \quad \Theta_z = \Theta(r_z), \quad (5)$$

to równanie (3) prowadzi do układu M równań kwadratowych z M niewiadomymi, gdzie $M = M(N)$ jest liczbą wszystkich interfejsów w kompozycie. Oznacza to, że rozwiązanie dokładne istnieje, ale jest dosyć niewygodne do przedstawienia w postaci jawnej. Dlatego też, dla dostatecznie dużej liczby N wygodniejsze jest zastosowanie metod numerycznych do rozwiązania układu równań.

3. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

W tej części pracy pokazane zostaną dwa przykłady Obliczeniowe obrazujące wpływ pewnych parametrów na przebieg pola temperatury w kompozycie. W obydwu przypadkach przyjęto podział na 50 komórek, czyli dla $N = 49$. Niech $r_w = 1[m]$, $r_z = 2[m]$. Niech każdy ze składników kompozytu posiada izotropowe własności

$$\mathbf{k} = k \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

o wartościach przedstawionych w poniższej tabeli

Table 1. Własności materiałowe.

	'prim'	'bis'
$k [Wm^{-1}K^{-1}]$	10	1
$\alpha [Wm^{-1}K^{-2}]$	10^{-2}	10^{-3}

Jednowymiarowy przepływ ciepła będzie zapewniony poprzez przyjęcie po obwodzie stałej wartości temperatury $\Theta_w = 100 [^{\circ}C]$ na brzegu wewnętrznym i $\Theta_z = 0 [^{\circ}C]$ na brzegu zewnętrznym.

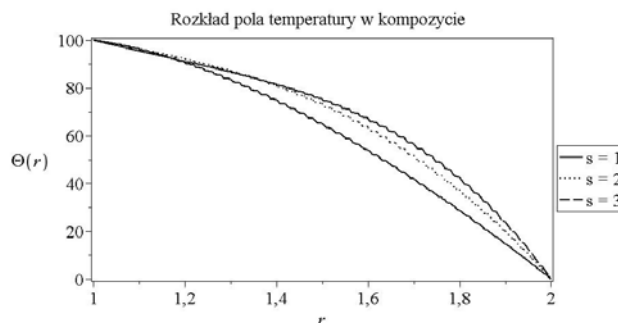
3.1. Wpływ udziału objętościowego v' na pole temperatury

Przyjmijmy w pierwszej i ostatniej komórce zerowy udział objętościowy jednego ze składników, tzn.

$$v'(r_n) = \lambda \cdot \left(\frac{n-1}{N}\right)^s, \quad n = 1, 2, \dots, N+1, \quad s = 1, 2, 3, \quad (7)$$

gdzie $r_1 = r_w$ oraz $r_{N+1} = r_z$. Oznacza to, że funkcję v' będziemy rozpatrywać w trzech wariantach, w zależności od stopnia s .

Wykorzystując warunki brzegowe (5) oraz fakt ciągłości gęstości strumienia ciepła w kierunku prostopadłym do interfejsów, można otrzymać rozwiązanie analityczne równania (3). Na ich podstawie sporządzono wykres:



Rys. 2. Wpływ udziału objętościowego v' na pole temperatury. Fig. 2. Volume fraction v' effect on the temperature field.

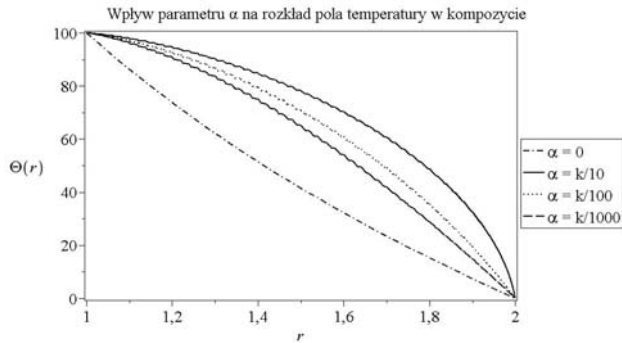
na którym widać dosyć znaczący wpływ parametru s na przebieg wykresu.

3.2. Wpływ współczynnika proporcjonalności α na pole temperatury

Niech dana będzie geometria i warunki zadania jak w poprzednim przykładzie dla $s = 1$, ale przy założeniu, że współczynnik proporcjonalności wyraża się wzorem

$$\alpha = k \cdot 10^{-m} [mW^{-1}], \quad m = 1, 2, 3. \quad (8)$$

wyrażony w $[K^{-1}]$. Jeśli w (8) przejdziemy z parametrem m do nieskończoności, to dostaniemy przypadek $\alpha = 0$.



Rys. 3. Wpływ współczynnika proporcjonalności α na pole temperatury.

Fig. 3. Parameter α effect on the temperature field.

Na powyższym wykresie widać jeszcze większy wpływ rozważanego parametru na przebieg pola temperatury w kompozycie.

4. WNIOSKI KOŃCOWE

Na podstawie otrzymanych wyników można wywnioskować, iż wpływ własności materiałowych, a w szczególności parametru decydującym o nieliniowości, ma bardzo duży wpływ na przebieg wykresu temperatury w kompozycie. Należy zatem bardzo uważać przy analizie przepływu ciepła z użyciem rzeczywistych materiałów. Jeśli ta część modelowania zostanie wykonana prawidłowo, to poprzez szczególne rozmieszczenie składników oraz ich nasycenia w poszczególnych komórkach, możemy w stosunkowo łatwy sposób „projektować” rozkład temperatury w rozważanym kompozycie.

ON THE NON-LINEAR STATIONARY HEAT CONDUCTION IN TWO-PHASE HOLLOW CYLINDER

Summary: The main aim is to consider non-linear stationary and unidirectional heat conduction in a hollow cylinder with functionally graded effective material properties. The conductor is made of two-phase stratified cells (annuli) with constant width, which can be treated as a functionally graded material, FGM (cf. [6]) for a sufficient large number of cells. On the composite boundaries temperature is given, and conductivity coefficients are expressed by first degree polynomial. An effect of nonlinearity and component distribution on the temperature field.

Literatura

- [1] ABOUDI J., PINDER A M.J., ARNOLD S.M., 1999, *Higher-order theory for functionally graded materials*, Composites: Part B, 30, 777-832.
 [2] HOSSEINI S.M., AKHLAGHI M., SHAKERI M., 2008, *Heat conduction and heat wave propagation in functionally graded thick hollow cylinder base on coupled*

thermoelasticity without energy dissipation, Heat Mass Transfer, 44, 1477-1484.

[3] JĘDRYSIAK J., 2010, *Termomechanika laminatów, płyt i powłok o funkcyjnej gradacji własności*, Monografie Pol. Łódzkiej, Łódź.

[4] MICHALAK B., WOŹNIAK Cz., WOŹNIAK M., 2007, *Modelling and analysis of certain functionally graded heat conductor*, Arch. Appl. Mech., 77, 823-834.

[5] OOTAO Y., TANIGAWA Y., 2006, *Transient thermoelastic Analysis for a Functionally Graded Hollow Cylinder*, J. Therm. Stresses, 29, 1031-1046.

[6] SURESH S., MORTENSEN A., 1998, *Fundamentals of functionally graded materials*, Cambridge, The University Press.

[7] WOŹNIAK Cz., MICHALAK B., JĘDRYSIAK J. [ed], 2008, *Thermomechanics of micro-heterogeneous solids and structures. Tolerance averaging approach*, Wyd. Pol. Łódzkiej, Łódź.

[8] WOŹNIAK Cz., WIERZBICKI E., 2000, *Averaging techniques in thermomechanics of composite solids. Tolerance averaging versus homogenization*, Wyd. Pol. Częst., Częstochowa

