

Wojciech LIPÍŃSKI*
 Jakub PEKSIŃSKI*

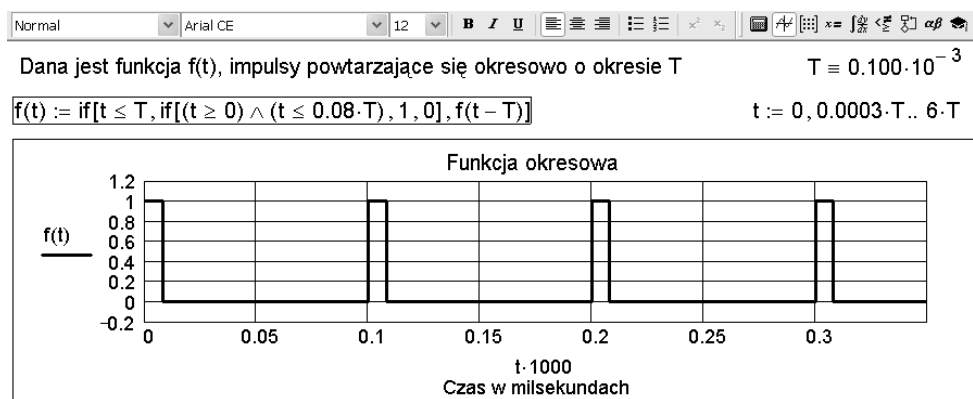
PREZENTACJA ZJAWISKA GIBBSA W TEORII SYGNAŁÓW

Przedstawiono prezentację zjawiska Gibbsa w teorii sygnałów. Obliczenia numeryczne wykonano w programie Mathcad.

SŁOWA KLUCZOWE: teoria sygnałów i obwodów, zjawisko Gibbsa

1. WPROWADZENIE

Teoretycznie jest wiele metod reprezentacji sygnałów okresowych. W praktyce analiza fourierowska przewyższa jednak inne metody pod względem użyteczności. Wynika to z właściwości liniowego stacjonarnego układu. Odpowiedź takiego układu na wymuszenie sinusoidalne jest w stanie ustalonym również przebiegiem sinusoidalnym o tej samej częstotliwości co wymuszenie, zmieniona jest amplituda i faza. Podano dydaktyczny przykład obliczania współczynników zespolonego szeregu Fouriera.



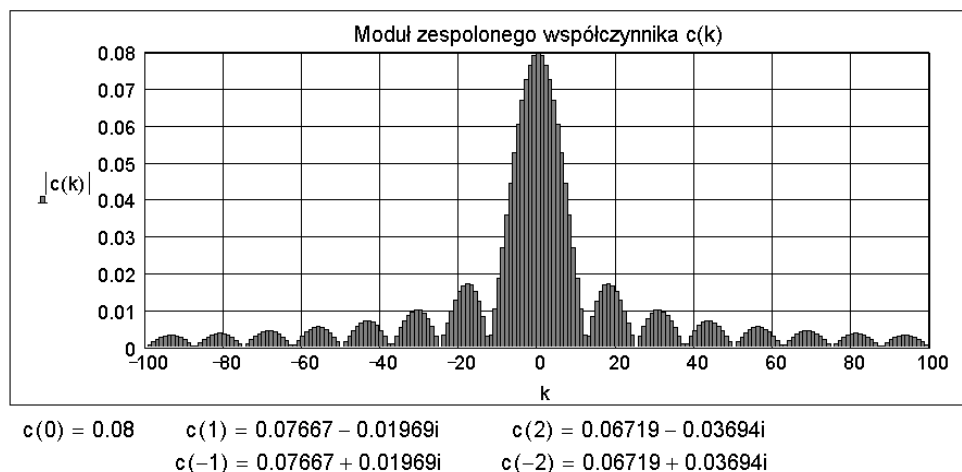
Obliczymy współczynniki zespolonego szeregu Fouriera, ω_1 - pulsacja pierwszej harmonicznej

$$K := 100 \quad k := -K .. K \quad \omega_1 := \frac{2 \cdot \pi}{T} \quad t := 0, \frac{T}{200} .. 2.25 \cdot T \quad \text{TOL} \equiv 10^{-10}$$

$$c(k) := \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \exp(-j \cdot k \cdot \omega_1 \cdot t) dt$$

$$f_K(t) := \sum_{k=-K}^K c(k) \cdot \exp(j \cdot k \cdot \omega_1 \cdot t) \quad j \equiv \sqrt{-1}$$

* Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie.



Rys. 1. Moduł zespolonego współczynnika szeregu Fouriera

2. ZJAWISKO GIBBSA

Jeśli funkcja okresowa $g(x)$ jest ograniczona, ma w jednym okresie skończoną liczbę punktów nieciągłości i ekstremalnych, wówczas szereg Fouriera funkcji $g(x)$ jest do niej zbieżny we wszystkich punktach, w których funkcja $g(x)$ jest ciągła oraz jest zbieżny do średniej arytmetycznej granic lewo- i prawostronnej funkcji $g(x)$ w każdym punkcie nieciągłości.

Efekt Gibbsa jest to charakterystyczny sposób, w jaki zachowuje się aproksymacja funkcji szeregiem Fouriera w pobliżu punktów nieciągłości tej funkcji. Efekt Gibbsa wyjaśnia powstawanie zakłóceń w przetwarzaniu sygnałów, przykładowo w cyfrowym przetwarzaniu obrazów. Wyjaśnia przyczynę powstawania oscylacji przy stosowaniu filtrów o prostokątnych oknach.

Dana jest funkcja okresowa $g(x)$ o okresie $T = 2\pi$. Zjawisko Gibbsa zostanie zaprezentowane dla funkcji nieparzystej $g(x)$.

$$g(x) = -g(-x)$$

$$g(x) = \begin{cases} -0.5 & -\pi < x < 0 \\ +0.5 & 0 < x < \pi \end{cases}, \quad g(N, x) = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^N \frac{\sin[(2 \cdot k + 1) \cdot x]}{2 \cdot k + 1} = \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{\sin(x)}{1} + \frac{\sin(3 \cdot x)}{3} + \dots \right) \quad (1)$$

Funkcja $g(x)$ jest nieciągła w punktach $(\dots - \pi, 0, \pi, 2\pi, \dots)$. Dla $x = 0$ jest $g(0) = 0$. Granice prawostronna i lewostronna funkcji $g(x)$ w punktach nieciągłości są równe ± 0.5

$$g(x \rightarrow +0) = 0.5, \quad g(x \rightarrow -0) = -0.5, \quad g(0) = 0$$

Zbadamy przebieg funkcji $g(N, x)$ w pobliżu punktu nieciągłości $x = 0$.

$$a_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cdot \cos(k \cdot x) \cdot dx = 0, \quad (2)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cdot \sin(k \cdot x) \cdot dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} g(x) \cdot \sin(k \cdot x) \cdot dx$$

Ograniczając sumowanie do $k = N$ (do harmonicznej $2 \cdot N + 1$) otrzymamy funkcję $g(N, x)$.

$$g(N, x) = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^N \frac{\sin[(2 \cdot k + 1) \cdot x]}{2 \cdot k + 1} = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^N \int_0^x \cos[(2 \cdot k + 1) \cdot u] \cdot du = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\sin[2 \cdot (N + 1) \cdot u]}{\sin(u)} \cdot du$$

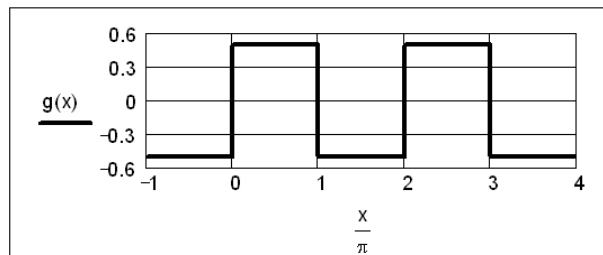
Funkcja $g(x)$ jest nieparzysta,

$$\text{dla } x = 0 \text{ jest } g(0) = \frac{g(x \rightarrow +0) + g(x \rightarrow -0)}{2} = 0 \quad (3)$$

Zbadamy przebieg funkcji $g(N, x)$, $g(N, x = 0) = 0$, $g(N \rightarrow \infty, x \rightarrow +0) = ?$

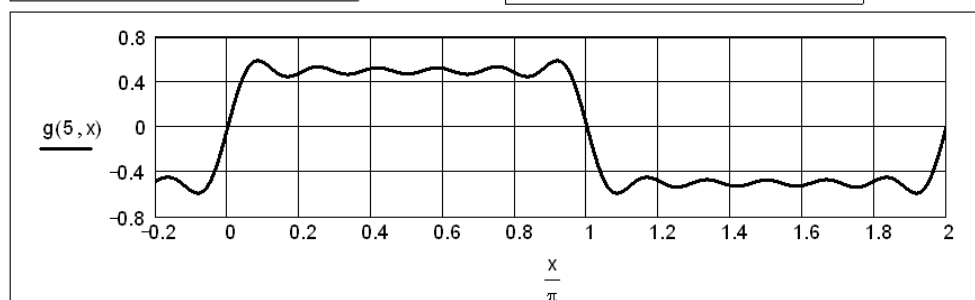
$$g(x) \equiv \begin{cases} -0.5 & \text{if } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ 0.5 & \text{if } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{if } x = \pi \\ -0.5 & \text{if } \pi < x < 2 \cdot \pi \\ g(x - 2 \cdot \pi) & \text{otherwise} \end{cases}$$

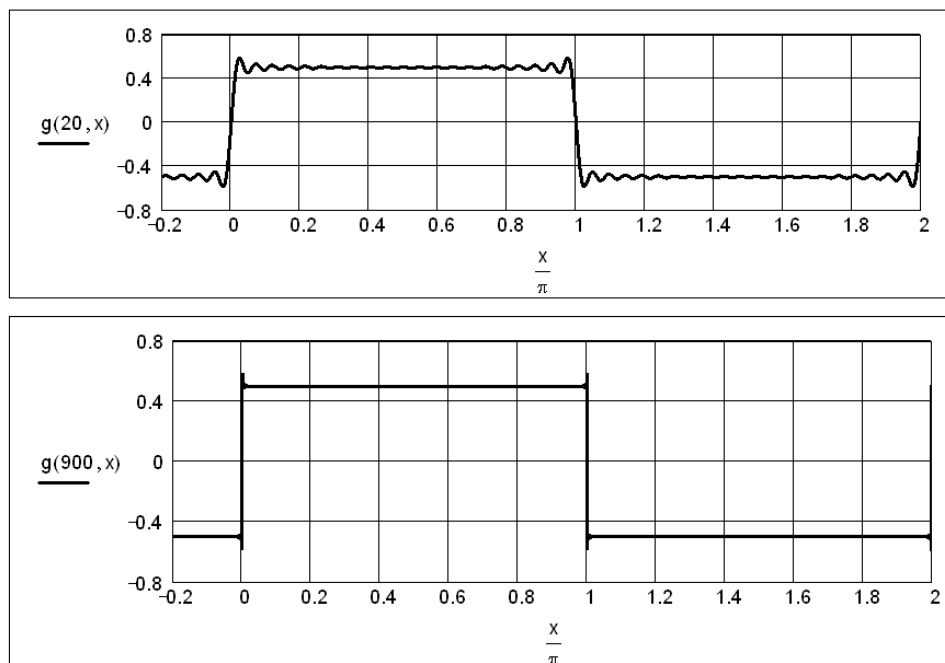
$$x \equiv -\pi, -\pi + 0.0005 \dots 4 \cdot \pi$$



$$g(N, x) \equiv \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^N \frac{\sin[(2 \cdot k + 1) \cdot x]}{2 \cdot k + 1}$$

$$g(N, x) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^x \frac{\sin[2 \cdot (N + 1) \cdot u]}{\sin(u)} \cdot du$$

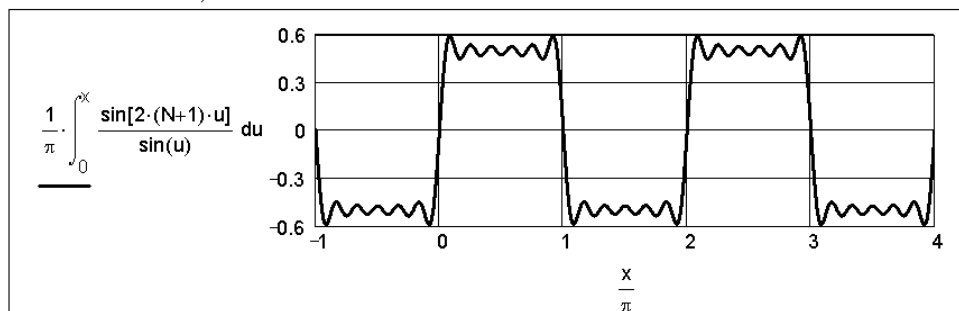




Rys. 2. Okresowa funkcja $g(x)$ i wyniki obliczeń dla sum skończonych $g(N, x)$ od $k=0$ do $k=N$, zwiększamy N

Sprawdzenie obliczeń dla wzoru, $g(N, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\sin[2 \cdot (N+1) \cdot u]}{\sin(u)} \cdot du$, przyjęto $N = 5$.

$N := 5$ $x \equiv -\pi, -\pi + 0.001 .. 4 \cdot \pi$



Rys. 3. Obliczenie przebiegu $g(N, x)$ w programie Mathcad, $N = 5$, $g(N \rightarrow \infty, x \rightarrow +0) = ?$

Pierwsze, dla $x > 0$, maksimum funkcji $g(N, x)$ jest dla

$$2 \cdot (N+1) \cdot x_{\max} = \pi, \quad x_{\max} = \pi / [2 \cdot (N+1)]. \quad (4)$$

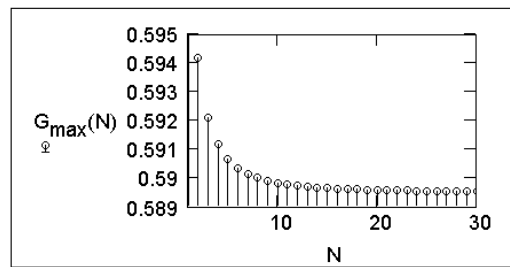
$$G_{\max}(N) = g(N, x_{\max}) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \frac{\sin[2 \cdot (N+1) \cdot u]}{\sin(u)} \cdot du =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \frac{\sin(w)}{w} \cdot \frac{w}{\sin\left(\frac{w}{2 \cdot (N+1)}\right)} \cdot dw$$

N := 1, 2.. 30

$$G_{\max}(N) \equiv \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \frac{\sin(w)}{w} \cdot \frac{w}{\sin\left(\frac{w}{2 \cdot (N+1)}\right)} \cdot dw$$

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \frac{\sin(w)}{w} \cdot dw = 0.589489872236$$



Wartości pierwszego dla $x > 0$ maksimum, dla $N \rightarrow \infty$ jest 0.5894899.

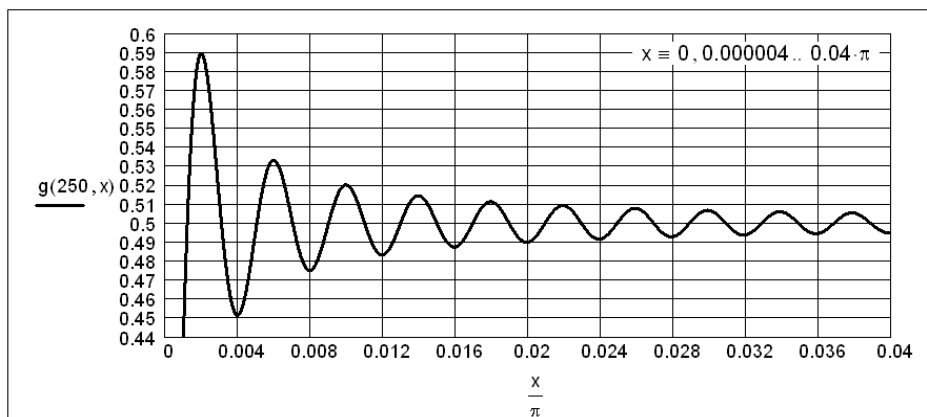
Dla danej funkcji $g(x \rightarrow +0) = 0.5$ (6)

Dla $N \rightarrow \infty, x_{\max} = \frac{\pi}{2 \cdot (N+1)} \rightarrow 0,$

$$g(N \rightarrow \infty, x_{\max} \rightarrow +0) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \frac{\sin(w)}{w} \cdot dw = 0.5894899$$

Następne lokalne minimum funkcji $g(N, x)$ ma dla $N \rightarrow \infty$ wartość 0.45142

Przebieg $g(N = 250, x)$ w pobliżu punktu nieciągłości $x = 0$, podano na wykresie.



Rys. 5. Przebieg $g(N = 250, x)$ w pobliżu punktu nieciągłości $x = 0, g(N \rightarrow \infty, x \rightarrow +0) = ?$

LITERATURA

- [1] Bolkowski S. Teoria obwodów elektrycznych. Stron: 584. WNT, 2007.
- [2] Haykin S. Systemy telekomunikacyjne, Wydawnictwo KiŁ, Warszawa 1998.
- [3] Tietze U. , Schenk H.: Układy półprzewodnikowe, WNT, W-a 1997.
- [4] Lipiński W.: Obliczenia numeryczne w teorii sygnałów i obwodów elektrycznych. ZAPOL 2008, str. 1-316.
- [5] Mikołajuk K., Trzaska Z. Elektrotechnika Teoretyczna, PWN Warszawa 1984.

PRESENTATION OF THE GIBBS PHENOMENON IN SIGNAL THEORY

Presented presentation of the Gibbs phenomenon in signal theory. Numerical calculations were done in Mathcad.