

Dominik GAŁDYŃSKI

APARAT MATEMATYCZNY DO WYZNACZANIA GRANICZNEJ NOŚNOŚCI PROFILU ENERGOCHŁONNEGO KLASY 4

DOI: 10.24136/atest.2018.300

Data zgłoszenia: 30.08.2018. Data akceptacji: 25.09.2018.

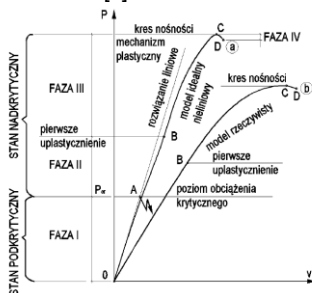
W artykule omówiony zostanie proces zmian naprężeń i odkształceń dla profilu energochłonnego kl. 4 o przekroju kwadratowym w wyniku ściskania osiowego, wyrażony za pomocą aparatu matematycznego, pozwalającego na określenie nośności granicznej takiego profilu, którego zastosowanie w postaci podłużnic, spotykamy we współczesnych konstrukcjach nadwozi samochodowych. Elementy, takie tworzą tzw. strefę kontrolowanego zgniotu, przejmując część energii uderzenia, jednocześnie odpowiadając za progresywny charakter deformacji tego obszaru.

WSTĘP

W rozważaniach teoretycznych, omawianego przypadku profilu cienkościennego o przekroju kwadratowym, za podstawę zostało obrane opracowanie prof. Stephena P. Timoshenko. Te podstawy teoretyczne, przedstawione w książce „Teoria stateczności sprężyste” zostały opublikowane dość dawno, dlatego zostaną uzupełnione i zestawione z innymi pracami na ten temat.

1. ZAŁOŻENIA OGÓLNE.

Rozważany model wzorcowy uwzględnia warunki brzegowe w których ustrój składający się z czterech ścianek o kwadratowym przekroju poprzecznym jest ściskany prostopadłe do tego przekroju. Tego typu model charakteryzuje się tym, że po przekroczeniu naprężeń krytycznych, ścianek profilu, nie wyczerpuje się nośność takiego ustroju, a wartości naprężenia jaka może zostać przeniesione, wielokrotnie przekraczają wartość naprężeń krytycznych poszczególnych ścianek. Taki profil zaliczany jest do klasy czwartej. Według Piekarczyka [1] aktywność profilu klasy 4 na przykładowym ustroju, dwuteownika dźwigara o smukłych środnikach, w przypadku rozważania modelu idealnego bez imperfekcji (krzywa "a" - rys. 1.), można podzielić na cztery następujące po sobie fazy. Pokazuje to poniższy wykres, na którym możemy zobaczyć fazy pracy idealnego i rzeczywistego modelu kl.4.[2]

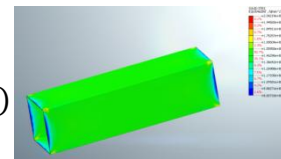


Rys. 1. Fazy pracy idealnego i rzeczywistego modelu kl.4. [2]

Na tle tego wykresu możemy wyróżnić poziom obciążenia krytycznego. Jest to wartość obciążenia, poniżej którego w ściankach

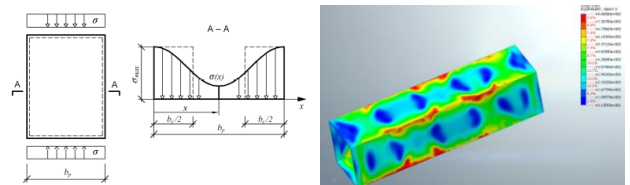
przekroju naprężenia rozkładają się w sposób identyczny na całej szerokości ściskanego ustroju zgodnie z prawem Saint-Venanta.

$$\sigma \approx \frac{P}{A}(a)$$



Rys. 2. Rozkład naprężeń w profilu klasy 4, przed osiągnięciem naprężeń krytycznych σ_{kr} , podczas ściskania osiowego.

W przypadku przekroju klasy niższych jak 1,2,3, czyli dla typowej konstrukcji wykonanej z prętów klasy 1,2,3, jest to wartość która wyczerpuje nośność ustroju, tym samym określa jego wytrzymałość. Jednak w przypadku rozpatrywanego profilu klasy 4 stanowi jedynie o pewnej granicy, powyżej której w rozpatrywanych ściankach pojawiają się wybożenia lokalne, jakie wywołują zmianę rozkładu naprężeń w tych ściankach, przechodząc ze stanu wcześniej opisanego do stanu nierównomiernego. Ten właśnie rozkład naprężeń przebiegający w sposób sinusoidalny jest cechą szczególną, przypisaną profilom klasy 4, których stan przekroczonych naprężeń krytycznych nie wyczerpuje nośności ustroju pod warunkiem prawidłowo dobranych parametrów geometrycznych.



Rys. 3. Rozkład naprężeń w płycie ściskanej swobodnie podpartej na krawędziach [3], rozkład naprężeń po przekroczeniu naprężeń krytycznych σ_{kr} , podczas ściskania osiowego.

Następnym etapem, jest faza nadkrytyczna, powyżej granicy naprężeń krytycznych ścianek modelu. Etap ten charakteryzuje się pojawianiem na powierzchni rozpatrywanego ustroju pólfał jakich wielkość, ilość, a także rozmieszczenie jest zależne głównie od parametrów geometrycznych oraz warunków brzegowych. W tym stanie deformacja ma charakter sprężysty i możliwa jest globalna bądź lokalna utrata stateczności lub interakcja między nimi, dlatego tak istotny jest wspomniany wcześniej prawidłowy dobór parametrów geometrycznych w celu uniknięcia globalnego wybożenia[2].

Z badań wynika, że już przy obciążeniu nieznacznie większym od krytycznego pasmo płytowe przyjmuje wypukłość. Przy wzroście obciążenia wypukłości tworzą się w strefach brzegowych. Po dalszym rozszerzaniu się wypukłości następuje gwałtowne przejście do nowej postaci wygięcia płyty, co jest równoznaczne z osiągnięciem jej nośności granicznej P_{gr} .

Różnica między obciążeniem krytycznym $N_{x\ kr}$ i granicznym P_{gr} jest nieduża, gdy obciążenia krytyczne są bliskie plastycznemu. Zakres nadkrytycznego zachowania płyty zwiększa się wraz ze wzrostem stosunku jej szerokości do grubości. Wzrost nie jest jednak równomierny. Stwierdzono, że w przypadku płyt cienkich i szerokich ich nośność niewiele wzrasta ponad pewną wartość przy dalszym zwiększaniu szerokości [4].

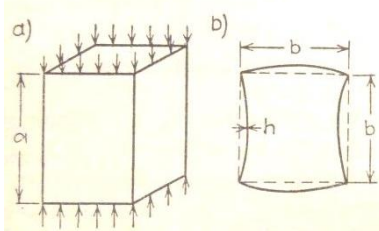
W zależności od wymiarów płyty i od sposobu jej podparcia, a także występujących w płycie obciążeń, nośność graniczna w stosunku do siły krytycznej może być znaczna, nawet kilka razy większa.

W obszarze uplastycznienia materiału, doznaje on pierwszych trwałych zmian wiązań międzyatomowych jego struktury, powodujących trwałe i nieodwracalne odkształcenia, aż do mechanizmu zniszczenia. Należy zauważyć, że przy prawidłowo zaprojektowanym ustroju, górna granica tego etapu jest określona przez granicę plastyczności R_{pl} . W opisie pracy poszczególnych płyt należy przyjąć nieliniowość geometryczną i materiałową.

Ostatnim czwartym etapem, jest proces niszczenia, który może przebiegać w sposób nagły bądź powolny. Etap ten charakteryzuje się przyrostem przemieszczeń przy jednoczesnej redukcji nośności [2].

2. WYZNACZENIE NAPRĘŻEŃ KRYTYCZNYCH CZYLI GÓRNEJ GRANICY OBSZARU STOSOWANIA KLASYCZNEJ TEORII SPRĘŻYSTOŚCI.

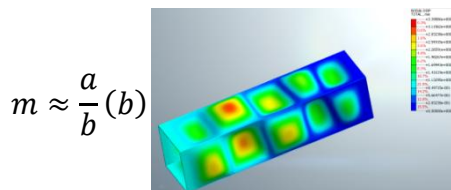
Dla profilu prostokątnego, gdy naprężenia ściskające zbliżają się do wartości krytycznej, następują wyboczenia lokalne ścianek i przekroje ścianek przybierają kształt uwidoczniiony jak na rysunku 4. [5]



Rys. 4. Zmiana postaciowa a) przed osiągnięciem naprężeń krytycznych, b) po przekroczeniu poziomu obciążenia krytycznego [5]

W opracowaniach przedstawionych przez Timoshenko, wzdłuż pionowych krawędzi w narożach wyboczonej skrzynki zakłada się, że nie działają momenty zginające i każda ścianka znajduje się w warunkach ściskanej płyty prostokątnej o brzegach swobodnie podpartych.

Po utracie stateczności długa płyta podparta przegubowo na dłuższych krawędziach dzieli się w przybliżeniu na płyty kwadratowe. Wyznaczenie ilości półfal m , które pojawią się po przekroczeniu siły krytycznej w dużym uproszczeniu oblicza się z poniższej zależności [5]:



Rys.5. Półfale tworzące się na powierzchni ścianek ustroju po przekroczeniu naprężeń krytycznych σ_{kr} , podczas ściskania

gdzie:

a – długość płyty

b – szerokość płyty do przekroju którego przyłożone jest obciążenie

Krytyczne obciążenie możemy obliczyć, korzystając ze wzoru wyjściowego, gdzie po wyznaczeniu liczby półfal powierzchni wyboczenia płyty $m=1$, ma on postać [5]:

$$N_{x\ kr} = \frac{D\pi^2}{b^2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2$$

Podstawiając określoną ilość półfal $m=5$, otrzymujemy wynik [5]:

$$N_{x\ kr} = \frac{D\pi^2}{b^2} \left(\frac{a}{5b} + \frac{5b}{a} \right)^2$$

gdzie: D określa sztywność zginania płyty i określona jest wzorem [2]:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

gdzie:

E – moduł Younga,

ν – współczynnik Poissona,

h – grubość płyty.

Zgodnie z poniższym wzorem na krytyczną wartość obciążenia ściskającego przyjmuje on postać [5]:

$$\begin{aligned} \sigma_{kr} &= \frac{N_{x\ kr}}{h} = \frac{\pi^2 E h^2}{12(1-\nu^2)b^2} \left(\frac{a}{5b} + \frac{5b}{a} \right)^2 \\ &= \frac{\pi^2 E h^2 k}{12(1-\nu^2)b^2} \end{aligned}$$

gdzie:

$$k = \left(\frac{a}{5b} + \frac{5b}{a} \right)^2$$

Określona z powyższych zależności wartości krytyczna σ_{kr} jest rzeczywista pod warunkiem, że jest ona mniejsza, niżeli granica proporcjonalności. Powyżej granicy proporcjonalności powyższy wzór daje zbyt duże wartości σ_{kr} i rzeczywistą wartość tego naprężenia otrzymać można tylko uwzględniając plastyczne odkształcenia materiału. W każdym szczególnym przypadku wyznacza się graniczną wartość stosunku h/b do której można stosować powyższy wzór, podstawiając w nim za $\sigma_{kr} = \sigma_{pl}$ w założeniu, że wzór ten zachowuje ważność, aż do granicy plastyczności materiału.

Powyższe obliczenia naprężeń krytycznych bazowały na założeniu, że ugięcia są bardzo małe i że można pominąć odkształcenia powstające przy wyboczeniu płyty w jej płaszczyźnie środkowej. Z badań empirycznych wiadomo, że zachowanie się płyty po wyboczeniu jest całkowicie odmienne niżeli zachowanie się pręta ściskanego. Dla pręta obciążenie krytyczne $N_{x\ kr}$ uważać można za graniczne P_{gr} , podczas, gdy wyboczona cienka płyta może przejąć znacznie większe obciążenie, niżeli to, przy którym, rozpoczyna się wyboczenie.

Badania oparte na teorii dużych ugięć wykazały, że można uprościć zagadnienie, przyjmując znikanie odkształceń postaciowych na brzegach płyty. Obliczona w ten sposób efektywna szerokości wynosi przy założeniu $\sigma_{kr} < \sigma < 60 \sigma_{kr}$ za pomocą następującego wzoru przybliżonego [5]:

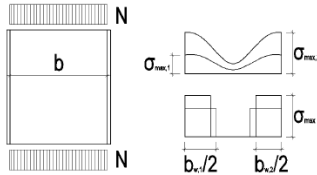
$$b_e = 1,54h \sqrt{\frac{E}{\sigma}} + 0,19(2a')$$

gdzie:

$$a' = b' = 1/2 a = 1/2 b$$

3. WYZNACZANIE EFEKTYWNYCH OBSZARÓW SZEROKOŚCI ZASTĘPCZYCH PŁYT ŚCISKANYCH W UJĘCIU NORMOWYM.

Prekursorem badań efektywnych obszarów szerokości zastępczych płyt ściskanych był Von Karman, wyznaczając ją z poniższych zależności:

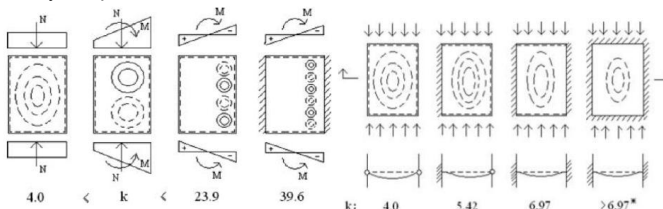


Rys. 6. Model zastępczej szerokości płyty [2].

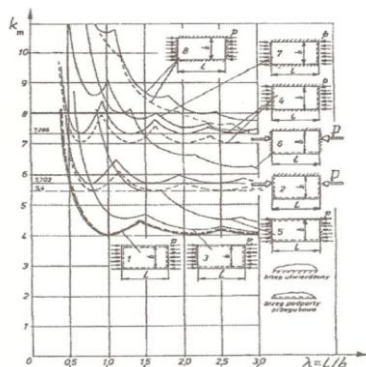
$$b_e = b \left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{cr}} \right)^{-1/2} \text{ gdzie } \sigma_{kr}$$

gdzie:

- b_e - szerokość efektywna współpracującej ścianki
- E - współczynnik sprężystości materiału płyty,
- h - grubość płyty,
- ν - współczynnik Poissona materiału płyty,
- b - szerokość płyty.
- k - współczynnik, który zależy od warunków podparcia i sposobu obciążenia płyty. Współczynnik ten możemy dobrać z poniższych opracowań.



Rys. 7. Różne rodzaje obciążeń - podparte nieprzesuwnie cztery krawędzie [2]



Rys. 8. Zmiana wartości współczynnika k dla różnych warunków podparcia płyt ściskanych [6]

Problemem nośności nadkrytycznej zajmowało się wielu badaczy między innymi: Scheller, Donnel, Marguerre, Cox, Papkowsch, Kotier, Winter.

Stosowane w normach wzory do wyznaczanie szerokości efektywnej są oparte na formule Wintera. W normach AISI:1996, EC3:1996, PN-B-03207 podano wzory na szerokość współpracującą (efektywną) ścianek bez usztywnień pośrednich w następującej postaci [3]:

$$b_e = \rho b$$

gdzie:

$$\rho = \frac{1 - \frac{0,22}{\lambda_p}}{\lambda_p}; \text{ gdy } \lambda_p > 0,673; \quad \rho = 1, \text{ gdy } \lambda_p \leq 0,637$$

Przy czym smukłość względna :

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{f_{yb}}{6\sigma_{kr}}} = \frac{b}{h} \sqrt{\frac{12(1 - \nu^2)f_{yb}}{\pi^2 E k \sigma}}$$

gdzie:

- b_e - szerokość efektywna współpracującej ścianki,
- b - umowna szerokość płaskiej ścianki,
- f_{yb} - granica plastyczności materiału wyjściowego,
- σ_{kr} - naprężenia krytyczne miejscowej utraty stateczności,
- h - grubość ścianki,
- ν - współczynnik Poissona materiału,
- E - współczynnik sprężystości podłużnej materiału,
- $k\sigma$ - współczynnik analogiczny jak w poprzednim wzorze, jednak zależny jedynie od sposobu obciążenia płyty, gdyż procedury w wyżej wymienionych normach uwzględniają tylko przypadek przegubowego podparcie ścianek.

W EC3:2002 podano odmienne formuły dla ścianek usztywnionych wzdłuż dwóch krawędzi:

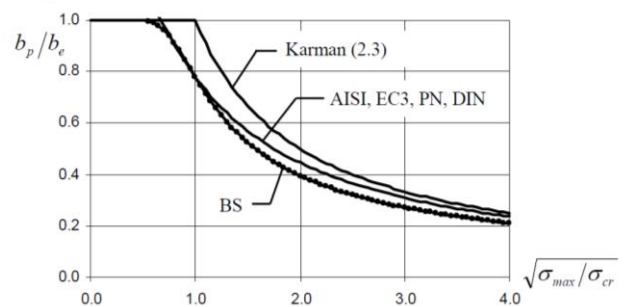
$$\rho = \frac{1 - \frac{0,055(3 + \Psi)}{\lambda_p}}{\lambda_p}$$

gdzie:

$\Psi = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ - dla przypadku równomiernie ściskanej płyty współczynnik ten wynosi 1.

σ_2 - mniejsze brzegowe naprężenie ściskające w ścianie,
 σ_1 - większe brzegowe naprężenie ściskające w ścianie.

Na poniższym wykresie porównano powyższe formuły z uwzględnieniem dodatkowo norm DIN18807 oraz BS5950-6:1995.



Rys. 9. Porównanie normowych formuł do wyznaczania szerokości efektywnej [3].

W praktyce projektowania konstrukcji metalowych, należy brać pod uwagę fakt, że płyta już po wyboczeniu, przejąć może obciążenia wielokrotnie większe niż krytyczne, jednocześnie nie ulegając zniszczeniu. Dlatego logicznym jest określenie nie tylko obciążenia

krytycznego N_{xkr} , lecz również obciążenia granicznego P_{gr} , które przejąc może płyta nie ulegając całkowitemu zniszczeniu. W celu obliczenia z grubsza obciążenia granicznego przy ściskaniu swobodnie podpartej płyty, prostokątnej można przyjąć, że obciążenie ściskające przekazywane na płytę, jest ostatecznie przejmowane przez dwa pasma o szerokości c po obu stronach płyty o łącznej długości $b_e = 2c$, i że na tych pasmach, rozkład obciążenia jest równomierny w przypadku ściskania osiowego.

Przy takim założeniu możemy nie uwzględniać środkowej partii płyty i traktować oba pasma jako długą, swobodnie podpartą płytę prostokątną o szerokości b_e . Wychodząc z takiego założenia, naprężenia krytyczne σ_{kr} dla takiej płyty wyniosą [5]:

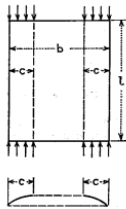
$$\sigma_{kr} = \frac{4\pi^2 D}{h(b_e)^2} = \frac{\pi^2 E h^2}{12(1-\nu^2)c^2} \quad (e)$$

Przyjmując, że graniczne obciążenie osiągnięte przy σ_{kr} równe jest granicy plastyczności R_e materiału, uplastycznieniu ulegną strefy podporowe, (krawędzie) płyty, a to wyczerpie nośność ustroju. Z powyższej zależności otrzymujemy wzór na szerokość efektywną, przy której naprężenia krytyczne σ_{kr} , osiągną granicę plastyczności R_e [5]:

$$c = \frac{\pi h}{\sqrt{(12(1-\nu^2))}} \sqrt{E/\sigma_{pl}} \quad (f)$$

gdzie, $c = \frac{1}{2}b_e$ - szerokość efektywna współpracującej ścianki.

Stosowane w normach np. AISI:1996, EC3:1996, PN-B-03207, wzory do wyznaczania szerokości efektywnej są oparte na formule Wintera. [3]



Rys. 10. szerokość współpracująca [5].

graniczne zaś obciążenie wynosi [5]:

$$P_{gr} = 2ch\sigma_{pl} = \frac{\pi h^2 \sqrt{E\sigma_{pl}}}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}$$

Z powyższego związku wynika, że obciążenie graniczne nie zależy od szerokości b płyty i jest proporcjonalne do kwadratu jej grubości. Większą zgodność można uzyskać wprowadzając do tego wzoru zamiast współczynnika [5]:

$$\frac{\pi}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} = 1,9, \text{ przy } \nu = 0,3 \quad (h)$$

zmienny współczynnik C , zależny od wymiarów i właściwości materiału płyty:

Z uwzględnieniem powyższego współczynnika C , wzór (w) na graniczne obciążenia przybiera postać [5]:

$$P_{gr} = Ch^2 \sqrt{E\sigma_{pl}}$$

W przypadku ściskania cienkościennych skrzynek o przekroju kwadratowym krawędzie skrzynek pozostają przy wyobczeniu proste, wskutek czego warunki zbliżone są do założeń przyjętych we wzorze:

$$P_{gr} = 0,867a'h\sigma_{pl} + \left(1,02E \frac{h^3}{\sigma_{pl}}\right)$$

PODSUMOWANIE

Kres nośności ustroju określana przez wartość obciążenia granicznego P_{gr} jest jednocześnie maksymalną siłą P_{max} , jaka występuje podczas zginięcia ustroju. Pojawia się ona na początku przebiegu zmian postaciowych struktury energochłonnej i stanowi o wartości siły niezbędnej do powstania pierwszej fałdy i dalszej absorpcji energii w procesie deformacji.

Zakładając, że o nośności ustroju świadczy jego najsłabsze ogniwo, w przypadku rozpatrywanych struktur, przy zginaniu, część ścianek profilu prostokątnego jest ściskana, część rozciągana, a na część działa moment gnący. W procesie ściskania, granica nośności ustroju P_{gr} jest zdeterminowana granicą plastyczności R_e materiału i wsp. $k=4$, przy ściankach na które działa moment gnący wsp. $k=23,9$, a w procesie rozciągania granicą wytrzymałości R_m . Z powyższego wynika, że najsłabszym ogniwem w zginanym ustroju jest nośność ścianki ściskającej.

BIBLIOGRAFIA

1. Piekarczyk M.: Zginane stalowe dźwigary skrzynkowe w stanie pracy nadkrytycznej. Praca doktorska, Kraków, 1991.
2. Kasiak M.: Stateczność środników zginanych stref blachownic w świetle teorii, norm, analiz numerycznych i eksperymentalnych. Praca doktorska, Gdańsk, 2015.
3. Czepizak D.: Nośność graniczna lokalnie wzmocnionych wieloprzęsłowych blach fałdowych. Praca doktorska, Wrocław 2006.
4. Chodor L.: Płyty cienkościenne i nośność nadkrytyczna. Wykład 7 - pdf, Politechnika Świętokrzyska.
5. Timoshenko S.P., Gere J.M.: Teoria stateczności sprężystej. Arkady, Warszawa 1963.
6. PN-90/B-03200. Konstrukcje stalowe. Obliczenia statyczne i projektowanie.
7. PN-B-03207:2002. Konstrukcje z kształtowników i blach profilowanych na zimno. Projektowanie i wykonanie.

Mathematical model for determining the limit load capacity of an energy-intensive profile of class 4

The article discusses the process of stress and strain changes for an energy-intensive profile with a square cross-section as a result of axial compression, expressed using a mathematical apparatus that allows determination of the load-bearing capacity of such a profile, the use of which in the form of stringers is found in modern automotive body constructions. Elements, such as the so-called a zone of controlled crumpling, taking over part of the impact energy, at the same time being responsible for the progressive nature of the deformation of this area.

Autor:

mgr inż. **Dominik Gałdyński** - Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie, Katedra Eksploatacji Pojazdów Samochodowych, dominik.galdynski@zut.edu.pl