

Mirosław WCIŚLIK*
Karol SUCHENIA*

ANALIZA HOLONOMICZNOŚCI UKŁADU ELEKTROMECHANICZNEGO NA PRZYKŁADZIE PRZEŁĄCZALNEGO SILNIKA RELUKTANCYJNEGO

W artykule przedstawiono metodykę formowania równań ruchu układu elektromechanicznego. Badania przedstawiono na przykładzie jednofazowego silnika reluktancyjnego. Przeprowadzono pomiary parametrów obwodu elektrycznego silnika w funkcji kąta obrotu. Zbudowano stanowisko umożliwiające określenie stałej elektromechanicznej. Na osi wirnika zamocowano prostopadle metalowy pręt, który umożliwił oscylacje układu mechanicznego. Na podstawie oscylacji tego wahadła przy zasilaniu prądem stałym uzwojenia wyznaczono parametry układu elektromechanicznego. W pracy przedstawiono charakterystyki i parametry równania ruchu dynamiki silnika. Porównano parametry równania ruchu otrzymanego z eksperymentu z równaniami ruchu Lagrange'a drugiego rzędu. Przedstawiono metodykę otrzymywania tego równania wraz z dyskusją holonomiczności układów elektromechanicznych.

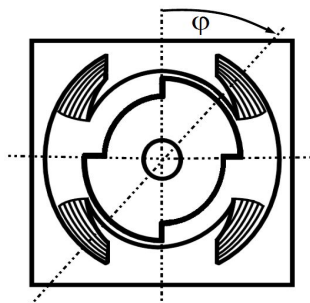
SŁOWA KLUCZOWE: silnik reluktancyjny, nieholonomiczność, równania ruchu, funkcja Lagrange'a

1. WSTĘP

Przełączalne silniki reluktancyjne charakteryzują się wytrzymałą konstrukcją niezawierającą magnesów trwałych. Nadają się one do pracy w trudnych warunkach środowiskowych oraz w aplikacjach, gdzie wymagana jest duża prędkość obrotowa. Dzięki strukturze bezszczotkowej nie wymagają częstej konserwacji. Szeroki zakres mocy w przystępnej cenie przekłada się na obszar zastosowań zarówno w przemyśle jak i w urządzeniach domowych [1].

Silniki reluktancyjne posiadają także wady. Podstawową wadą są tętnienia momentu obrotowego, które wynikają z zasady działania, sterowania i niesymetrycznej struktury magnetycznej wirnika tego silnika. Wpływ tych zjawisk może być zmniejszony poprzez dobór geometrii silnika i użycie odpowiedniej metody sterowania [2]. Analizę i modelowanie silnika reluktancyjnego utrudnia nieliniowość parametrów spowodowana przez asymetrię magnetyczną [3]. Dlatego do analizy układu elektromechanicznego wybrano silnik reluktancyjny o jednej parze biegunów stojana i wirnika – rys. 1.

* Politechnika Świętokrzyska.



Rys. 1. Schemat poglądowy analizowanego silnika

Silnik ten startuje tylko przy pewnych kątach wirnika, co stanowi jego wadę, ale obwód elektryczny opisany jest tylko jednym równaniem. Upraszcza to analizę, modelowanie oraz weryfikację doświadczalną modelu matematycznego. Modele matematyczne silników elektrycznych składają się z równań opisujących obwody elektryczne oraz układ mechaniczny. Równanie mechaniczne zapisywane jest w postaci [4]:

$$J \cdot \frac{d\omega}{dt} + k \cdot \omega + T_L = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial L(\varphi)}{\partial \varphi} \cdot i^2 \quad (1)$$

gdzie: J - moment bezwładności, k - współczynnik tarcia, T_L - moment obciążenia, i - wartość prądu, $\partial L(\varphi)/\partial \varphi$ - pochodna indukcyjności w funkcji kąta.

Równanie elektryczne przyjmuje postać [1]:

$$\frac{d}{dt}(L(\varphi) \cdot i) + R_s \cdot i = U_s \quad (2)$$

gdzie: R_s - rezystancja uzwojenia, L - indukcyjność uzwojenia, φ - kąt obrotu.

Mnożąc równanie (1) przez prędkość kątową, uzyskuje się równanie bilansu mocy

$$\frac{1}{2} J \cdot \frac{d\omega^2}{dt} + k \cdot \omega^2 + T_L \cdot \omega = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial L(\varphi)}{\partial \varphi} \cdot \omega \cdot i^2 \quad (3)$$

Rozwijając pochodną w równaniu (2) i mnożąc je przez prąd i otrzymuje się:

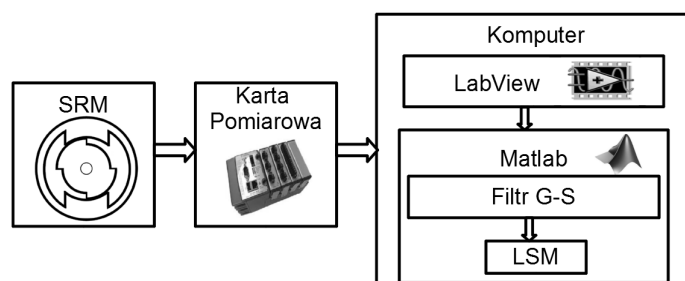
$$\frac{1}{2} L(\varphi) \cdot \frac{di^2}{dt} + \frac{\partial L(\varphi)}{\partial \varphi} \cdot \omega \cdot i^2 + R_s \cdot i^2 = U_s \cdot i \quad (4)$$

Składnik z prawej strony równania (3) reprezentuje natężenie energii przekazywanej z układu elektrycznego. Pierwszy ze składników równania (4) określa natężenie zmiany energii magnetycznej kumulowanej w indukcyjności silnika. Drugi zaś oznacza natężenie energii przekazywanej do układu mechanicznego. Należy zauważyć, że natężenie energii przekazywanej do układu mechanicznego w równaniu (4) jest inne niż natężenie energii przekazywanej z układu elektrycznego w równaniu (3). Aby sprawdzić poprawność równań przeprowadzono pomiary parametrów silnika reluktancyjnego.

2. IDENTYFIKACJA PARAMETRÓW

W celu określenia parametrów elektrycznych modelu przełączalnego silnika reluktancyjnego w zależności od kąta obrotu przeprowadzono pomiary w stanie statycznym ($\omega = 0$). Badania przeprowadzono wykorzystując karty pomiarowe National Instruments oraz programy LabView i Matlab – Simulink. Mierzono prąd i napięcie uzwojenia silnika w funkcji kąta obrotu. Do identyfikacji parametrów zbudowano stanowisko badawcze zawierające wspomniany wyżej przełączalny silnik reluktancyjny.

Dla sprawdzenia, jak zmienia się indukcyjność i rezystancja stojana w zależności od kąta obrotu wirnika jednofazowego silnika reluktancyjnego przeprowadzono identyfikację tych parametrów w funkcji kąta obrotu wirnika zasilając uzwojenia napięciem przemiennym 50 Hz. Schemat blokowy układu wyznaczenia parametrów silnika przedstawiono na rysunku 2. Wartości napięcia, prądu i kąta obrotu przełączalnego silnika reluktancyjnego odczytywano jednocześnie za pomocą kart pomiarowych NI 9225 i NI 6216 firmy National Instruments. Karty obsługiwane były przez aplikacje programu LabView. Wyniki pomiarów zapisywano w pliku tekstowym. Następnie, pliki z danymi wczytywano do programu Matlab i przetwarzano za pomocą filtra Golaya - Savitzky'ego w celu wyznaczenia pochodnych prądu i wyeliminowania zakłóceń.



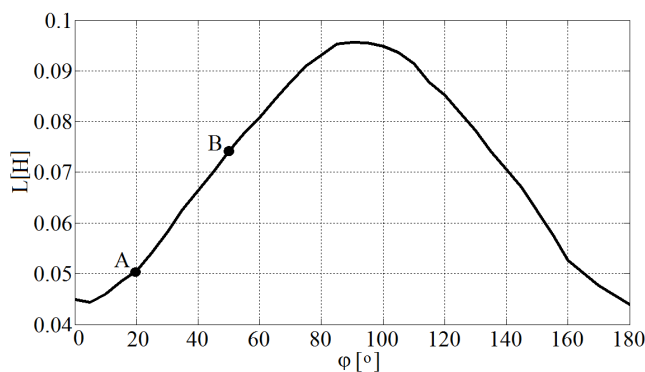
Rys. 2. Schemat blokowy układu pomiaru parametrów silnika reluktancyjnego

Wykorzystując metodą najmniejszych kwadratów obliczono parametry schematu zastępczego silnika reluktancyjnego. Do wyznaczenia parametrów zastępczych wykorzystano równanie w postaci:

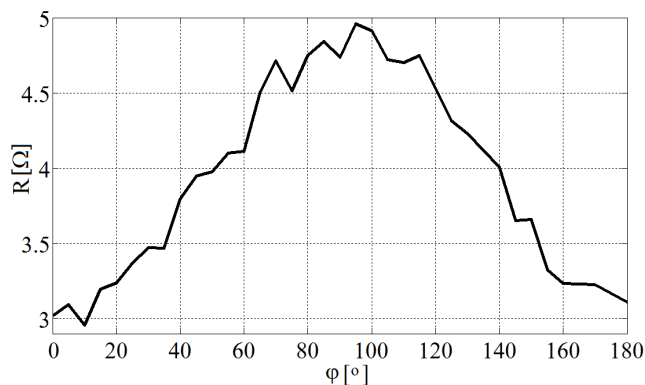
$$L \frac{di}{dt} + Ri = U \quad (5)$$

Mierząc, co 5 stopni prąd i napięcie na uzwojeniu silnika oraz określając pochodną prądu po czasie, wyznaczono charakterystykę indukcyjności w funkcji kąta obrotu – rysunek 3 oraz charakterystykę rezystancji w funkcji kąta

obrotu – rysunek 4. Ze względu na symetrię silnika badania układu zrealizowano dla kąta obrotu w zakresie 0 - 180 stopni:



Rys. 3. Zależność indukcyjności w funkcji kąta obrotu



Rys. 4. Zależność rezystancji w funkcji kąta obrotu

Wyznaczono średnią wartość pochodnej indukcyjności względem kąta dla narastającej części liniowej charakterystyki, na rysunku 3, między 20° a 75° wynosi ona:

$$\frac{dL(\varphi)}{d\varphi} \cong 0.0395 \frac{H}{rad} \quad (6)$$

Do identyfikacji współczynników elektromechanicznych posłużono się innym układem mechanicznym, ponieważ pomiar tych parametrów w trakcie wirowania silnika jest dość złożony – rysunek 5. Na osi wirnika zamocowano stalowy pręt, który wraz z wirnikiem tworzy wahadło fizyczne. Szeregowo z cewką stojana połączony jest rezystor R używany do pomiaru prądu płynącego przez uzwojenie stojana przy znanym napięciu zasilania silnika. Na wale silnika umieszczono także enkoder absolutny do pomiaru kąta wychylenia wirnika względem stojana.

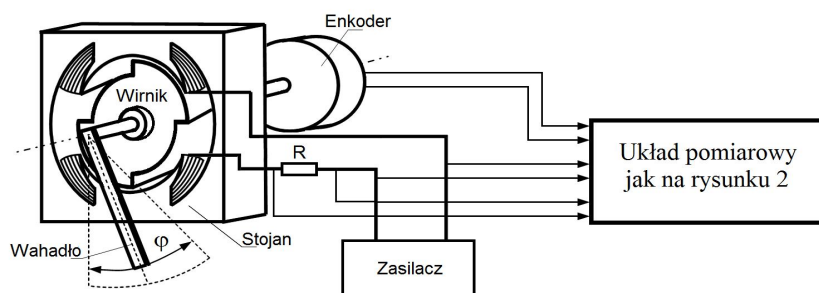
Zasilając obwód stojana stabilizowanym prądem powoduje się wychylenie wahadła o pewien kąt, który zależy od kąta położenia biegunów stojana względem kierunku przyciągania ziemskiego. Przykładając do wahadła siłę zewnętrzną o charakterze impulsowym, wywołuje się ruch oscylacyjny w pewnym zakresie kąta obrotu. Pomiary wykonuje się tak, aby zmiany indukcyjności na rysunku 3 były dla narastającej części liniowej charakterystyki [5].

Do identyfikacji współczynników, jakie występują w równaniach ruchu, wykorzystano zależności (7) i (8). Pominęto współczynnik indukcyjności, ponieważ pochodna prądu nie będzie występować.

$$w1 \cdot i + w2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot i = U_s \quad (7)$$

$$w3 \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + w4 \cdot \text{sign} \frac{d\varphi}{dt} + w5 \cdot i^2 = \frac{m \cdot g \cdot l \cdot \sin(\varphi)}{2} \quad (8)$$

gdzie: $w1$ – rezystancja silnika (R), $w2$, $w5$ – pochodna indukcyjności w funkcji kąta obrotu wirnika ($\partial L(\varphi)/\partial \varphi$), $w3$ – moment bezwładności wirnika i wahadła (J), $w4$ – współczynnik tarcia (k), φ – kąt obrotu silnika, i – wartość prądu, U_s – napięcie zasilania, m – masa pręta, g – przyspieszenie ziemskie, l – długość pręta.



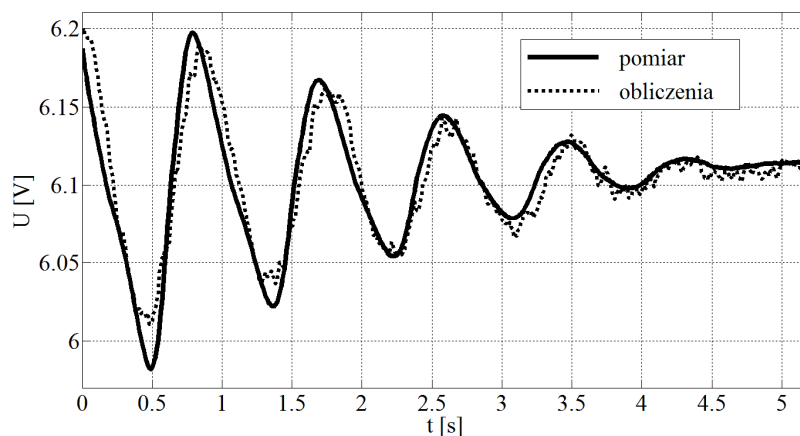
Rys. 5. Układ pomiarowy parametrów silnika reluktancyjnego

Układ z rysunku 5 zasilono napięciem stałym ze stabilizacją prądu. Przepływający prąd oddziałuje na wirnik silnika powodując jego obrót, wychylenie wahadła o kąt φ . Wartość prądu tak dobrano, aby wychylenie wahadła znajdowało się w połowie dodatniego nachylenia charakterystyki indukcyjności w funkcji kąta punkt B na rysunku 2. Wirnik ustawiono w taki sposób, aby pozycja pionowa wahadła odpowiadała na charakterystyce z rysunku 2 kątowi obrotu równemu 20° (punkt A). Wartość prądu płynącego przez uzwojenie stojana przyjęto tak, aby wychylenie od pionu wahadła wynosiło 30° , co odpowiada punktowi równowagi (punkt B) o kącie obrotu 50° - rysunek 2. Odchylając ręcznie wahadło od punktu równowagi wywołano oscylacje wahadła względem tego punktu.

Wyznaczono przebieg aproksymujący wielkości z prawej strony równań. Na podstawie pomiaru napięcia U_s , prądu i , kąta obrotu φ oraz pochodnych kąta w

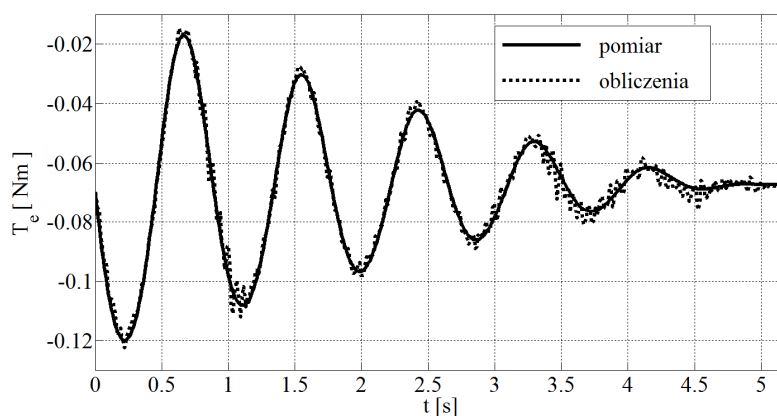
funkcji czasu, parametry w_1, \dots, w_5 zostały zidentyfikowane. Przebieg napięcia na uzwojeniu, mierzony i jego aproksymację obliczone na podstawie równania (7) przedstawiono na rysunku 6.

Kształt uzyskanych przebiegów wskazuje, że występuje tłumienie liniowe, co wiąże się z tarcieniem suchym opisanym funkcją signum prędkości obrotowej w równaniu (8).



Rys. 6. Przebieg oscylacji napięcia na uzwojeniach stojana

Analogiczny przebieg czasowy momentu mechanicznego obciążenia dla równania (8) przedstawiono na rysunku 7.



Rys. 7. Przebieg oscylacji równania mechanicznego

Na podstawie pomiarów współczynniki równania (3) wynoszą:

$$w_1 = 3.28 \Omega \quad w_2 = 0.0199 \frac{H}{rad}$$

Współczynniki równania (4) wynoszą:

$$w_3 = 0.003 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad w_4 = 0.0028 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}} \quad w_5 = 0.0197 \frac{\text{H}}{\text{rad}}$$

Można zauważyć, że współczynnik w_2 w równaniu (7) i współczynnik w_5 w równaniu (8) są bardzo zbliżone i równe są połowie pochodnej indukcyjności w funkcji kąta, wyznaczonej z charakterystyki indukcyjności – rysunek 3. Korelacja pomiędzy napięciem zmierzonym a obliczonym wynosi 0.9307. Dla równania mechanicznego jest równa 0.9925.

Doświadczenie wykazało, że w równaniu (7), pochodną indukcyjności w funkcji kąta, należy pomnożyć przez współczynnik $\frac{1}{2}$. Zatem równanie obwodu elektrycznego powinno mieć postać:

$$U_s = L(\varphi) \frac{di}{dt} + R_s \cdot i + \frac{1}{2} \cdot \frac{dL(\varphi)}{d\varphi} \cdot \omega \cdot i \quad (9)$$

Równanie (9), które wynika z doświadczenia różni się od powszechnie znanego w literaturze równania Lagrange'a drugiego rzędu [1-4].

3. ANALIZA RÓWNAŃ RUCHU I HOLOMOMICZNOŚCI PRZEŁĄCZALNEGO SILNIKA RELUKTANCYJNEGO Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ LAGRANGE'A

Do opisu układów elektromechanicznych, najczęściej stosowana jest funkcja Lagrange'a [6]. Funkcja ta opisywana jest przez współrzędne uogólnione i prędkości uogólnione, jako różnica energii kinetycznej i potencjalnej w postaci:

$$fL = T - V \quad (10)$$

gdzie: T – energia kinetyczna, V – energia potencjalna.

W układach elektromechanicznych energia potencjalna najczęściej nie występuje. Funkcja Lagrange'a nie uwzględnia dopływu i odpływu energii. Opisuje relacje między poszczególnymi współrzędnymi uogólnionymi i ich pochodnymi. Stąd o holonomiczności należałoby dyskutować na podstawie funkcji Lagrange'a układu jednorodnego i zachowawczego. O odpływie i dopływie energii decydują dodatkowe siły potencjalne i siły dysypacji, które można później uwzględnić. Wyróżniając spośród współrzędnych uogólnionych współrzędne elektryczne (ładunki) q_e i mechaniczne (kąty) q_m funkcję Lagrange'a układu można zapisać:

$$fL = \frac{1}{2} L(q_m) \cdot \left(\frac{dq_e}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} J \cdot \left(\frac{dq_m}{dt}\right)^2 \quad (11)$$

Na podstawie funkcji Lagrange'a otrzymuje się równanie d'Alamberta – Lagrange'a [7]. Dla układu elektromechanicznego można je zapisać w postaci:

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_e}\right) \delta q_e + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial T}{\partial q_m}\right) \delta q_m = 0 \quad (12)$$

gdzie: δq_e , δq_m – wariacje współrzędnej elektrycznej i mechanicznej.

Zgodnie z [7 str. 90] tylko dla układu holonomicznego wariacje δq_e i δq_m w równaniu d'Alamberta – Lagrange'a są niezależne i tylko dla takiego układu otrzymuje się równanie Lagrange'a drugiego rodzaju w postaci:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (13)$$

Przyjmując, jako wariacje współrzędnych uogólnionych pochodne czasowe tych współrzędnych, równanie (12) staje się równaniem bilansu mocy:

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_e} \right) \dot{q}_e + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial T}{\partial q_m} \right) \dot{q}_m = 0 \quad (14)$$

Jeżeli dany układ jest układem holonomicznym to równanie (14) powinno być spełnione. Podstawiając do równania (14) funkcję Lagrange'a (11) w stanie ustalonym, przyjmując $\dot{q}_e = i = const$ oraz $\dot{q}_m = \omega = const$ otrzymuje się:

$$\frac{\partial L(\varphi)}{\partial \varphi} \cdot \omega \cdot i^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial L(\varphi)}{\partial \varphi} \cdot \omega \cdot i^2 \neq 0 \quad (15)$$

Bilans mocy dla zależności (15) jest różny od zera, a więc równanie d'Alamberta – Lagrange'a dla układu holonomicznego nie jest spełnione, dlatego należy przyjąć, że układ elektromechaniczny jest układem nieholonomicznym.

Jeżeli układ dynamiczny posiada n współrzędnych uogólnionych, ale równania tego układu zawierają tylko $m < n$ tych współrzędnych i wszystkie prędkości uogólnione, to układ ten jest nieholonomiczny [7 str. 107-108]. Podobną cechę mają równania układu elektromechanicznego. W równaniach nie występują uogólnione współrzędne elektryczne – ładunki elektryczne. Dlatego można powiedzieć, że o nieholonomiczności tych układów decyduje równanie elektryczne.

W [8 str. 173-174] przedstawiono, że procedura taka jak dla układów holonomicznych może być zastosowana dla układów nieholonomicznych pod warunkiem uwzględnienia poprawki w tych równaniach.

„Będziemy traktowali układ z więzami jak układ bez więzów zakładając, że działają na niego pewne siły zewnętrzne, mianowicie takie siły które spowodują, że układ będzie „posłuszny” więzom. Taki sposób postępowania ma tę zaletę, że współrzędne ... (uogólnione) można wtedy uważać za niezależne, więzy wystąpią teraz jako skutki działania dodatkowych sił, a nie związki pomiędzy współrzędnymi. Aby więc otrzymać równania ruchu układu z więzami, można skorzystać z równań Lagrange'a włączając do nich te dodatkowe siły” [8 str. 174]. W rozważanym przypadku, jako siły Q_N .

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_e} + Q_N \right) \delta q_e + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial T}{\partial q_m} \right) \delta q_m = 0 \quad (16)$$

W [7] można znaleźć podobną procedurę postępowania. Polega ona na przyjęciu, że jeżeli układ jest nieholonomiczny, to wprowadza się wektor reakcji więzów nieholonomicznych w postaci dodatkowego wyrażenia $Q_N \neq 0$ i wówczas

równanie d’Alamberta – Lagrange’a jest w postaci (16). Po modyfikacji, tekst z [7 str. 92] można przedstawić następująco: jeżeli Q_N jest uogólnioną siłą reakcji w ruchu układu nieholonomicznego to równanie (16) opisuje również ruch pewnego układu holonomicznego z energią kinetyczną T i uogólnionymi siłami reakcji Q_N .

Na podstawie równania (16) oraz energii kinetycznej układu można wyznaczyć poprawkę Q_N . Przyjmując, jak poprzednio za wariacje współrzędnych uogólnionych pochodne tych współrzędnych, oraz uwzględniając poprawkę uzyskuje się:

$$\frac{\partial L(\varphi)}{\partial \varphi} \cdot \omega \cdot i^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial L(\varphi)}{\partial \varphi} \cdot \omega \cdot i^2 + Q_N \cdot i = 0 \quad (17)$$

Wynika, że poprawka Q_N powinna wynosić:

$$Q_N = -\frac{1}{2} \frac{\partial L(\varphi)}{\partial \varphi} \cdot \omega \cdot i \quad (18)$$

Jeżeli poprawkę Q_N uwzględnimy w równaniu elektrycznym to uzyskamy równanie w postaci:

$$L(\varphi) \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial L(\varphi)}{\partial \varphi} \cdot \omega \cdot i + R_s \cdot i = U_s \quad (19)$$

Można zauważyć, że równanie (19) i równanie (9) wyznaczone na podstawie pomiarów są tej samej postaci. Mnożąc równanie (19) przez prąd i otrzymano równanie:

$$\frac{1}{2} L(\varphi) \cdot \frac{di^2}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial L(\varphi)}{\partial \varphi} \cdot \omega \cdot i^2 + R_s \cdot i^2 = U_s \cdot i \quad (20)$$

które jest fizycznie interpretowalne i spełnia bilans mocy urządzenia elektromechanicznego.

4. WNIOSKI

W rozważanym silniku reluktancyjnym moc bilansuje się dopiero po uwzględnieniu w równaniu części elektrycznej dodatkowego napięcia, które odgrywa rolę „siły” korekty nieholonomiczności silnika. Napięcie odgrywa rolę siły dla współrzędnej uogólnionej w postaci ładunku elektrycznego. Dopiero wtedy, dla wariacji przemieszczeń uogólnionych w postaci pochodnych czasowych współrzędnych uogólnionych, moce w badanym silniku bilansują się. Dzięki poprawce związanej z nieholonomicznością silnika, w postaci dodatkowej „siły uogólnionej” (napięcia) moc przekazywana do układu mechanicznego jest równa mocy przekazywanej z układu elektrycznego.

Oznacza to, że silnik ten jest układem nieholonomicznym. Uwzględniając powyższe, równanie opisujące obwód elektryczny dla silnika reluktancyjnego powinno być postaci (9), jako układu nieholonomicznego.

LITERATURA

- [1] Wilamowski B. M., Irwin J., Power electronics and motor drivers, CRC, 2011.
- [2] Tanujaya M., Lee D.H, An Y. J., Ahn J. W., A Novel 6/5 Switched Reluctance Motor with Short Flux Path: Concept, Design and Analysis, Journal of International Conference on Electrical Machines and Systems, No.1, 2012, p.47-53.
- [3] Mhatli K., Salah B. B., Improved Modeling of Switched Reluctance Motor Including Mutual and Saturation Effects, 15th IEEE Mediterranean Electrotechnical Conference, IEEE 2010, p.1470-1475.
- [4] Tomczewski K., Symulacja pracy napędu z nowym układem zasilania przełączalnego silnika reluktancyjnego, Przegląd Elektrotechniczny, 2009, s.242-245.
- [5] Wciślik M., Suchenia K.: Model i bilans mocy czynnej przełączalnego silnika reluktancyjnego, Przegląd Elektrotechniczny, 2014, s.217-220.
- [6] Landau L. D., Lifszyc J. M., Mechanika, PWN, Warszawa 2007.
- [7] Nejmark J. I., Fufajew N. A., Dynamika układów nieholonomicznych, WNT, Warszawa 1971.
- [8] Bishop R. E. D., Gladwell G. M. L., Michaelson S., Macierzowa analiza drgań, WNT, Warszawa 1972.

ANALYSIS HOLONOMICITY OF ELECTROMECHANICAL SYSTEM ON THE EXAMPLE PF RELUCTANCE MOTOR

The paper deals with a single-phase reluctance motor used to test the motion equations of an electromechanical system. The identification of the motor electric parameters as a function of the rotation angle of the rotor was carried out using AC 50 Hz voltage source. A mechanical part of the system was designed as a physical pendulum containing the motor rotor and metal bar mounted on rotor axis. The parameters of the mechanical part were measured during the pendulum oscillations. The work presents the characteristics and motion equation parameters of the motor dynamics. The reluctance motor motion equation does not fulfill the power balance. The parameters of the motion equations obtained from the experiment and from the second order Lagrange's equations are compared. The derivation of motion equation, together with a discussion of holonomicity of electromechanical systems is also presented.