



TECHNIKA TRANSPORTU SZYNOWEGO

Magdalena ATAMAN, Waclaw SZCZEŚNIAK

RUCHOME OBCIĄŻENIE CIĄGŁE NA BELCE SPOCZYWAJĄCEJ NA TRÓJPARAMETROWYM PODŁOŻU INERCYJNYM – CZEŚĆ I ROZWIĄZANIA ANALITYCZNE

Streszczenie

W referacie podano rozwiązanie analityczne równania ruchu niejednorodnej, sprężystej belki swobodnie podpartej, z dużą siłą osiową, spoczywającej na inercyjnej, sprężystej warstwie podłoża trójparametrowego Własowa-Leontiewa z półnieskończonym, równomiernie rozłożonym obciążeniem ciągłym, poruszającym się ze stałą prędkością. Zadanie ma praktyczne zastosowanie w nawierzchniach i mostach kolejowych obciążonych pociągami poruszającymi się z dużymi prędkościami.

WSTĘP

We współczesnej komunikacji pociągi dużych i bardzo dużych prędkości - TGV (Train à Grande Vitesse) i AGV (Automotrice à Grande Vitesse) odgrywają coraz większą rolę w transporcie pasażerów. Czas przejazdu takim pociągiem jest porównywalny z czasem podróży samolotem. Dodatkowo stacje kolejowe położone są na ogół w centrum miast, co eliminuje uciążliwą podróż na lotnisko. Pociągi tego typu wymagają specjalnych silników napędowych dużych mocy, wózków, pudeł wagonów oraz odpowiedniej trakcji elektrycznej z jednej strony, z drugiej zaś strony, konstrukcja toru i podtorza kolejowego muszą spełniać rygorystyczne warunki techniczne w odniesieniu do parametrów toru, nierówności toru, stanów przemieszczeń, naprężeń i odkształceń w jego konstrukcji.

Niezwykle istotnym zagadnieniem, mającym zasadniczy wpływ na bezpieczny transport pociągami dużych prędkości ma stateczność dynamiczna. Tak duże prędkości powodują, poza zjawiskiem podciśnienia, znaczący wzrost osiowych sił ściskających, które, obok wysokich temperatur, mogą wywołać zjawisko utraty stateczności toru - zjawiskodynamiczne wyboczenia toru.

1. MODEL INERCYJNEGO PODŁOŻA WŁASOWA I RÓWNANIE RUCHU BELKI

Zadaniu dynamicznemu belki na podłożach odkształcalnych poświęcono w literaturze przedmiotu pewnie setki prac, między innymi [1-16] i [22-30]. Mniej publikacji dotyczy ruchomych obciążeń na belce z dużą siłą osiową. Zadanie to jest analizowane od czasów

pierwszych prac Timoshenki [17-21] i [31-34] z początku XX wieku. Model podłoża inercyjnego Własowa, w przypadku zagadnienia liniowego (belka), opisuje następujące równanie [14]:

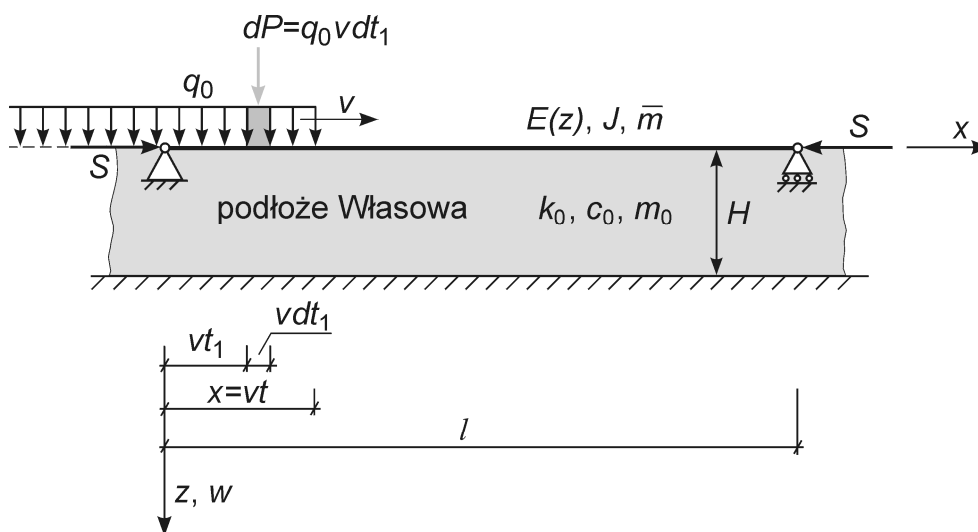
$$p(x,t) = k_0 w(x,t) - 2c_0 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + m_0 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}, \quad (1)$$

w którym $p(x,t)$ jest reakcją dynamiczną podłoża, a k_0 , c_0 i m_0 są parametrami podłoża:

$$k_0 = \frac{E_0 s_{11}}{1 - \nu_0^2}, \quad c_0 = \frac{E_0 r_{11}}{4(1 + \nu_0)}, \quad E_0 = \frac{E_{gr}}{1 - \nu_{gr}^2}, \quad \nu_0 = \frac{\nu_{gr}}{1 - \nu_{gr}^2}, \quad (2)$$

$$s_{11} = b \int_0^H \left[\frac{\partial \psi(z)}{\partial z} \right]^2 dz, \quad r_{11} = b \int_0^H \psi^2(z) dz, \quad m_0 = \hat{m}_0 b \int_0^H \psi^2(z) dz, \quad \hat{m}_0 = \frac{\gamma_0}{g},$$

gdzie b jest szerokością belki, \hat{m}_0 jest gęstością masy podłoża inercyjnego, γ_0 jest ciężarem objętościowym gruntu, E_{gr} jest modułem sprężystości Younga gruntu, zaś ν_{gr} jest liczbą Poissona warstwy gruntu. W równaniu (1) współczynnik k_0 odpowiada współczynnikowi sprężystości występującemu w modelu Winklera, c_0 uwzględnia ścinanie w warstwie sprężystej, natomiast m_0 uwzględnia inercję podłoża.



Rys. 1. Belka Bernoulliego-Eulera z dużą siłą osiową na inercyjnym podłożu Leontiewa-Własowa pod ruchomym półnieskończonym obciążeniem ciągłym

Po wykorzystaniu wzoru na odpór gruntu (1), równanie ruchu belki o zmiennym module sprężystości, przedstawionej na rysunku 1, zapisujemy w następującej formie

$$\overline{EJ} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (S - 2c_0) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\overline{m} + m_0) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k_0 w = q_0 [1 - H(x - vt)], \quad (3)$$

gdzie:

$$- H(x-vt) = \begin{cases} 0 & \text{przy } x < vt, \\ 1 & \text{przy } x > vt, \end{cases}$$

$$- \overline{EJ} - \text{zmodyfikowana sztywność belki na zginanie, według wzoru } \overline{EJ} = \int_{\frac{h}{2}-e}^{\frac{h}{2}} b \tilde{z}^2 E(\tilde{z}) d\tilde{z},$$

w którym e wyznacza położenie osi obojętnej,

- \bar{m} – masa belki przypadająca na jednostkę długości,
- S – duża siła osiowa.

Warunki brzegowe w przypadku analizowanej belki są następujące:

$$w(x,t)|_{x=0} = 0, \quad w(x,t)|_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{\partial w(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial w(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0. \quad (4)$$

Przy założeniu, że rozwiązanie równania (3) odpowiada n -tej postaci drgań własnych spełniającej warunki brzegowe (4), w postaci

$$w_n(x,t) = W_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (5)$$

oraz, że w chwili początkowej spełnione są zerowe warunki początkowe:

$$w(x,t)|_{t=0} = 0, \quad \text{i} \quad \left. \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (6)$$

Wyrażenie na ugięcie belki, od ruchomej siły skupionej P zapisujemy w następujący sposób:

$$w(x,t) = \frac{2P}{(\bar{m} + m_0)l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n(\alpha_n^2 - \omega_n^2)} \sin \lambda_n x (\alpha_n \sin \omega_n t - \omega_n \sin \alpha_n t), \quad (7)$$

$$\text{gdzie: } \lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \quad \alpha_n = \frac{n\pi v}{l}, \quad \omega_n^2 = \frac{\lambda_n^4 \overline{EJ} - (S - 2c_0)\lambda_n^2 + k_0}{\bar{m} + m_0}.$$

Jeśli, $\omega_n = 0$, to otrzymujemy $S = S_{kr} = \lambda_n^2 \overline{EJ} + 2c_0 + \frac{k}{\lambda_n^2}$. Z kolei jeśli $c_0 = 0$, to, przy

$\lambda_n = \sqrt[4]{\frac{k}{\overline{EJ}}}$ w belce o nieskończonej długości na podłożu Winklera mamy: $S_{kr}^{\min} = \sqrt{2 \overline{EJ} k}$,

$$\text{oraz } v_{kr}^2 = \frac{S_{kr}}{\bar{m}} = \frac{2}{\bar{m}} \sqrt{\overline{EJ} k}.$$

Ponieważ przy $\alpha_n \rightarrow \omega_n$ dla dowolnego wyrazu szeregu (5) otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, to ugięcie belki w przypadku rezonansu zapisujemy stosując do i -tego składnika szeregu regułę de l'Hospitala

$$w(x,t) = \frac{2P}{(\bar{m} + m_0)l} \sum_{n=1}^{i-1} \frac{1}{\omega_n(\alpha_n^2 - \omega_n^2)} \sin \lambda_n x (\alpha_n \sin \omega_n t - \omega_n \sin \alpha_n t) +$$

$$+ \frac{P}{(\bar{m} + m_0)l \omega_i^2} (\sin \omega_i t - \omega_i t \cos \omega_i t) \sin \lambda_i x +$$

$$+ \frac{2P}{(\bar{m} + m_0)l} \sum_{n=i+1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n(\alpha_n^2 - \omega_n^2)} \sin \lambda_n x (\alpha_n \sin \omega_n t - \omega_n \sin \alpha_n t). \quad (8)$$

Ponieważ czas przejazdu siły skupionej jest ograniczony $t = \frac{l}{v}$, to i -ty składnik rezonansowy we wzorze (8) ma jednak wartość skończoną.

Równanie (3) obowiązuje w przypadku, gdy ruchoma siła skupiona znajduje się na belce, tj. przy $vt \in \langle 0, l \rangle$ i jest ważne przy prędkości obciążenia $v < v_{kr}$. Prędkość krytyczną v_{kr} łatwo wyznaczyć z powyższego rozwiązania zakładając, że mianownik pod szeregiem trygonometrycznym jest równy zeru:

$$\alpha_n^2 = \omega_n^2 \quad \Rightarrow \quad v_{kr} = \sqrt{\frac{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \bar{EJ} + 2c_0 - S}{m + m_0} + \frac{k_0 l^2}{(n\pi)^2 (m + m_0)}}. \quad (9)$$

Ostatni wzór, przy $S = 0$ jest następujący:

$$v_{kr} = \sqrt{\frac{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \bar{EJ} + 2c_0}{m + m_0} + \frac{k_0 l^2}{(n\pi)^2 (m + m_0)}}. \quad (10)$$

Po zjechaniu ruchomej siły z konstrukcji belka wykonuje drgania swobodne. Równanie ruchu belki jest wtedy równaniem jednorodnym z warunkami początkowymi wynikającymi z rozwiązania (8) w chwili $t = \frac{l}{v}$

$$\ddot{\bar{W}}_n(t) + \omega_n^2 \bar{W}_n(t) = 0, \quad \text{przy } vt > l. \quad (11)$$

Rozwiązanie równania (11) zapisujemy następująco

$$\bar{w}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (K_n \cos \omega_n t + L_n \sin \omega_n t) \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad \text{przy } vt > l. \quad (12)$$

Stałe K_n i L_n wyznaczymy korzystając z warunków początkowych drgań swobodnych:

$$w(x,t)\Big|_{t=\frac{l}{v}} = \bar{w}(x,t)\Big|_{t=\frac{l}{v}}, \quad \frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=\frac{l}{v}} = \frac{\partial \bar{w}(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=\frac{l}{v}}. \quad (13)$$

W przypadku ruchomego obciążenia ciągłego wykorzystujemy rozwiązanie (7) zapisując różniczkę siły elementarnej $dP = q_0 v dt_1$. Zmieniając teraz w rozwiązaniu (7) t na t_1 , a następnie całkując (7) względem t_1 w granicach $(0, t)$ otrzymujemy rozwiązanie w przypadku ruchomego obciążenia ciągłego półnieskończonego w następującej formie:

$$w(x,t) = \frac{2q_0 v}{\bar{m}l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2 \alpha_n} \left[1 + \frac{1}{\omega_n^2 - \alpha_n^2} (\alpha_n^2 \cos \omega_n t - \omega_n^2 \cos \alpha_n t) \right] \sin \lambda_n x. \quad (14)$$

Rozwiązanie (14) jest inne niż (7) i stanowi istotę tego referatu. Jest zrozumiałe zatem, że w przypadku rezonansu zmianie ulega rozwiązanie (8):

$$\begin{aligned} w(x,t) = & \frac{2q_0 v}{\bar{m}l} \sum_{n=1}^{i-1} \frac{1}{\omega_n^2 \alpha_n} \left[1 + \frac{1}{\omega_n^2 - \alpha_n^2} (\alpha_n^2 \cos \omega_n t - \omega_n^2 \cos \alpha_n t) \right] \sin \lambda_n x + \\ & + \frac{q_0 v}{\bar{m}l \alpha_i^3} \left[2(1 - \cos \alpha_i t) - t \alpha_i \sin \alpha_i t \right] \sin \lambda_i x + \\ & + \frac{2q_0 v}{\bar{m}l} \sum_{n=1}^{i+1} \frac{1}{\omega_n^2 \alpha_n} \left[1 + \frac{1}{\omega_n^2 - \alpha_n^2} (\alpha_n^2 \cos \omega_n t - \omega_n^2 \cos \alpha_n t) \right] \sin \lambda_n x. \end{aligned} \quad (15)$$

W przypadku, gdy czoło obciążenia zjedzie z belki drgania układu są ustalone i opisane równaniem ruchu

$$\overline{EJ} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (S - 2c_0) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\bar{m} + m_0) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k_0 w = q_0. \quad (16)$$

Rozwiązaniem równania (16) jest funkcja

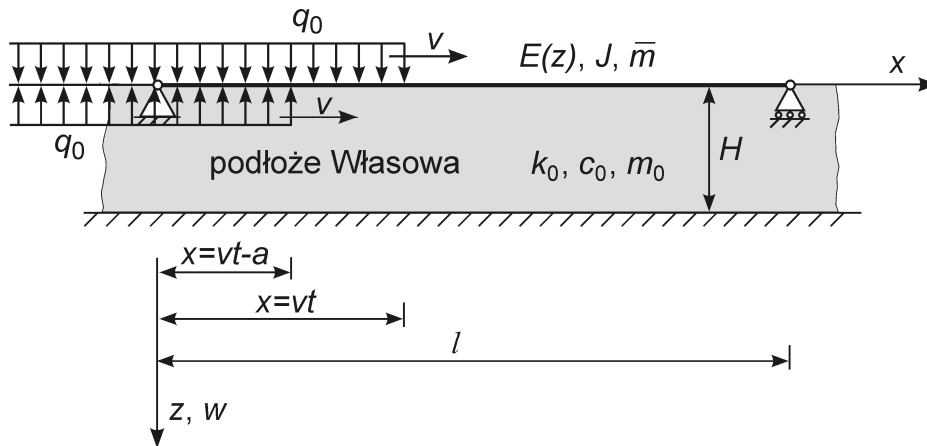
$$\bar{w}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\tilde{K}_n \cos \omega_n t + \tilde{L}_n \sin \omega_n t \right) + \frac{2q_0}{n\pi \bar{m} \omega_n^2} \left[1 + (-1)^{n+1} \right] (1 - \cos \omega_n t) \right\} \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (17)$$

Stałe całkowania \tilde{K}_n i \tilde{L}_n wyznaczamy z warunków początkowych identycznych z wzorami (13).

W przypadku obciążenia rozłożonego na odcinku o długości a , zgodnie z zasadą superpozycji obowiązującą w układach sprężystych rozwiązanie zadania jest sumą dwóch rozwiązań belki pod obciążeniami półnieskończonymi (rys. 2). Zmieniając w rozwiązaniu (14) czas t na $t - \frac{a}{v}$ otrzymujemy rozwiązanie

$$w_1\left(x, t - \frac{a}{v}\right) = \frac{2q_0 v}{\bar{m} l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2 \alpha_n} \left\{ 1 + \frac{1}{\omega_n^2 - \alpha_n^2} \left[\alpha_n^2 \cos \omega_n \left(t - \frac{a}{v} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. - \omega_n^2 \cos \alpha_n \left(t - \frac{a}{v} \right) \right] \right\} \sin \lambda_n x. \quad (18)$$

Ostatecznie ugięcie belki obciążonej na odcinku o długości a jest równe $w - w_1$.



Rys. 2. Schemat dynamiczny belki Bernoulliego-Eulera na podłożu Leontiewa-Własowa do wyznaczenia drgań wywołanych przejazdem obciążenia ciągłego o skończonej długości a

PODSUMOWANIE

Rozwiązanie (15) podane w dwóch przypadkach – braku rezonansu i rezonansu może mieć zastosowanie w zadaniach dotyczących dynamiki układu tor kolejowy – podtorze – podłoże gruntowe. Rozważana belka jest niejednorodna, obciążona dodatkowo dużą siłą osiową a podłoże jest inercyjne, co odpowiada rzeczywistej konstrukcji toru i podtorza. Wyznaczono siły krytyczne i prędkości krytyczne układu, co stanowi oryginalny element opracowania. Otrzymane rozwiązanie analityczne jest łatwe do zaprogramowania na komputerze. Wyniki obliczeń przedstawiono w drugiej części opracowania. Otrzymane rozwiązanie łatwo zaadaptować do przypadku ruchomego obciążenia ciągłego rozłożonego na odcinku o skończonej długości (rys. 2).

UNIFORMLY DISTRIBUTED MOVING LOAD ON THE BEAM RESTING ON THE INERTIAL THREE-PARAMETER FOUNDATION – PART I ANALYTICAL SOLUTIONS

Abstract

In the paper non-homogenous beam on inertial foundation subjected to axial forces and moving load is analysed. Equation of motion of the beam is derived and analytical solution of the problem is presented. Critical force and critical speed of the system is determined. The resulting solution is easy to program on computer. The results of calculations will be presented in the second part of the study. Obtained solutions may have practical application in dynamics of bridges and dynamics of railways for high speed trains.

BIBLIOGRAFIA

1. Ataman M.: *Drgania belek i płyt poprzecznie niejednorodnych na podłożach odkształcalnych wymuszone obciążeniami ruchomymi*. OW PW, Warszawa 2010.
2. Ataman M.: *Wpływ bezwładności taboru, nawierzchni kolejowej i podłoża na ich stateczność i prędkości krytyczne pociągów o dużych prędkościach*. Logistyka 3/2012, str. 29-34.
3. Ataman M., Szcześniak W.: *Drgania niejednorodnej belki swobodnie podpartej z dużą siłą osiową na podłożu inercyjnym, wywołane obciążeniem ruchomym*. „Theoretical Foundations of Civil Engineering”, Vol. 20, pp. 43-50, Ed. by W. Szcześniak OW PW, Warsaw 2012.
4. Bogacz R., Popp K.: *Dynamics and stability of train-track systems*. Proc. of 2nd Int. Conf. on Rec. Adv. Struct. Dyn. Southampton 1984, pp. 709-721.
5. Genin J., Ting E.C.: *Vehicle-guideway interaction problems*. The Shock and Vibration Digest. Vol. 11, No 12, Dec. 1979, pp. 3-9.
6. Jemielita G., Szcześniak W.: *Sposoby modelowania podłoża*. Prace Naukowe PW, Budownictwo z. 120, WPW, Warszawa 1993
7. Jones R., Xenophontos J.: *On the Vlasov and Kerr foundation models*. Acta Mechanica 25, 1976, pp. 45-49.
8. Popp K., Bogacz R.: *Dynamic und Bewegungsstabilität von Zug-Gleis Systemen*. VDI – Berichte, 1984, 510, pp. 197-203.
9. Szcześniak W., Ataman M.: *Pewien sposób znajdowania zamkniętej postaci drgań czysto wymuszonych w zadaniu Kryłowa*. Theoretical Foundations of Civil Engineering-IX, 2001, pp. 413-432.
10. Szcześniak W.: *Analiza statyczna, dynamiczna i stateczność nawierzchni drogowej i kolejowej*. Prace Naukowe Politechniki Radomskiej. Transport nr 2(11), Radom 2000, str. 57-83.
11. Szcześniak W.: *Drgania belki Timoshenki po wpływie równomiernie rozłożonego, inercyjnego, ciągłego obciążenia ruchomego. Model ciągły konstrukcji*. Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo, z. 112, OWPW, Warszawa 1990, str. 77-118.
12. Szcześniak W.: *Drgania belki Timoshenki po wpływie równomiernie rozłożonego, inercyjnego, ciągłego obciążenia ruchomego. Model dyskretny konstrukcji*. Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo, z.112, OWPW, Warszawa 1990, str. 119-132.
13. Szcześniak W.: *O pewnej częstotliwości krytycznej w zagadnieniu własnym belki Timoshenki*. IV Konferencja „Komputerowe Systemy Wspomagania Nauki, Przemysłu i Transportu. TRANSCOMP 2000, pp.431-440.
14. Szcześniak W.: *Wpływ siły osiowej oraz ścinania podłoża na amplitudy drgań belki nieskończonej pod obciążeniem ruchomym*. Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo nr 56, Warszawa 1977, str. 19-36.
15. Szcześniak W.: *Wybrane zagadnienia kolejowe*. Prace Naukowe PW, Budownictwo z. 129, WPW, 1995
16. Szcześniak W.: *Zastosowanie równań Lagrange’a drugiego rodzaju w zagadnieniu dynamicznym belki Timoshenki pod obciążeniem ruchomym*. Rozprawy Inżynierskie – Engineering Transactions, 1990, 38 (3-4), pp. 591-633.
17. Timoshenko S.: *The forced vibrations of tie-roads*. (1941 Applied Mechanics, Theodore von Karman Anniversary Volume), In the Collected Papers of Stephen P. Timoshenko. McGraw-Hill, 1953, pp. 610-614.
18. Timoshenko S.P.: *Method of analysis of statical and dynamical stresses in rail*. Proceedings of the Second International Congress for Applied Mechanics, Zurich Switzerland, 1926, pp. 407-418.

19. Timoshenko S.P.: *On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars*. Philosophical Magazine, 41, 1921, pp.744-746.
20. Timoshenko S.P.: *On transverse vibrations of bars of uniform cross section*. Philosophical Magazine, 43, 1922, pp. 125-131.
21. Timoshenko S.P.: *Vibration Problems in Engineering*. D. Van Nostrand Company, Princetown 1956.
22. Ting E.C., Genin J., Ginsberg J.H.: *Dynamic interaction of bridge structures and vehicles*. The Shock and Vibration Digest, Vol. 7, No 11, 1975, pp. 61-69.
23. Ting E.C.: *Unified formulation of two-parameter foundation model*. ZAMM 53, 1973 pp. 636-637
24. Власов В.З., Леонтев Н.Н.: *Балки, плиты и оболочки на упругом основании*. Г.И.Ф.М.Л., Москва, 1960.
25. Дмитриев А.С.: *Колебания балки Тимошенко при движении сосредоточенной силы*. Труды ЛИСИ 1982, стр. 41-48.
26. Львовский В.М., Львовский Б.В.: *Контактная задача для кругового штампа на двухслойном основании*. Сопротивление Материалов и Теория Сооружений, выпуск 38 Киев 1976, стр. 34-41.
27. Львовский В.М.: *Колебания балочной плиты, лежащей на нелинейном упругом массивном основании, под действием подвижной нагрузки*. Известия Высших Учебных Заведений, Строительство и Архитектура, No. 9, 1970, стр. 37-45.
28. Львовский В.М.: *Колебания бесконечной балки, лежащей на упругом массивном основании и работающей в простатвенных условиях, под действием равномерно движущейся нагрузки*. Известия Высших Учебных Заведений, Лесной Журнал, No. 5, 1963, стр. 56-67.
29. Львовский В.М.: *О равномерном движении сосредоточенной нагрузки по бесконечной балке, лежащей на упругом массивном двухслойном основании*. Известия Высших Учебных Заведений, Лесной Журнал, No. 2, 1964, стр. 81-88.
30. Моргаевский А.Б., Кожемякина И.Ф.: *Решение задачи о динамическом воздействии подвижной нагрузки с учетом сдвига и инерции вращения*. Динамика и прочность машин вып. 23, 1976, с. 23-27.
31. Тимошенко С.П.: *К вопросу о вибрациях рельс*. Известия Электротехнического Института, 1915, т. 13, стр. 117 Отд. оттиск, Петроград 1915, 17 строн.
32. Тимошенко С.П.: *К вопросу о прочност рельс*. Отд. оттиск, Петроград, тип. А.Э. Коллинса. 1915, 42 строн.
33. Тимошенко С.П.: *О динамических напряжениях в рельсах*. Вестник инженеров, 1915, т. 1, No. 4, стр. 143-152.
34. Тимошенко С.П.: *Устойчивость стержней, пластин и оболочек*. Издат. Наука, Москва 1971.

Autorzy:

dr inż. Magdalena ATAMAN – Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Warszawska
prof. dr hab. inż. Waclaw SZCZEŚNIAK – Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Warszawska

Niniejsza praca jest współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego, projekt „Program Rozwojowy Politechniki Warszawskiej” realizowany przez Centrum Studiów Zaawansowanych.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



KAPITAŁ LUDZKI
 NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
 EUROPEJSKI
 FUNDUSZ SPOŁECZNY

