



Stabilność rozwiązania zagadnienia brzegowego niestacjonarnego profilu temperatury w przegrodzie budowlanej

MARIUSZ OWCZAREK, WERONIKA RADZIKOWSKA-JUŚ

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Inżynierii Lądowej i Geodezji,
ul. gen. S. Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa, mowczarek@wat.edu.pl

Streszczenie. Jedną z uniwersalnych, a zarazem prostych metod numerycznego rozwiązywania zadań nieustalonego przewodzenia ciepła w obudowie budynku jest metoda objętości skończonych. Jednak przy sformułowaniu jawnym konieczne jest dobranie kroku czasowego gwarantującego stabilność rozwiązania. W tym artykule wartość takiego kroku czasowego została określona z warunku zerowej różnicy pomiędzy teoretycznym a numerycznym rozwiązaniem dla danej geometrii ściany. Rozpatrzono wpływ współczynnika przewodzenia ciepła ściany na długość kroku. Warunki brzegowe przyjęte w artykule odpowiadały obciążeniom ogniowym ściany schronu.

Słowa kluczowe: stabilność numeryczna, budowle schronowe, profil temperatury w ścianie

DOI: 10.5604/12345865.1157328

1. Niestacjonarny rozkład temperatury w ścianie

Rozkład temperatury w przypadku jednowymiarowego nieustalonego przewodzenia ciepła jest opisany równaniem różniczkowym Fouriera.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (1.1)$$

gdzie: $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ — dyfuzyjność termiczna.

Zewnętrzna krawędź ściany o temperaturze początkowej T_s styka się z gazem o temperaturze T_p , warunek brzegowy można zapisać:

$$q_s = \alpha(T_s - T_p), \quad (1.2)$$

Zakładamy, że ściana jest jednowarstwowa. Niech $T_p > T_s$, wtedy ściana będzie się ogrzewać. Jeśli ściana ma znaczną grubość, to można przez pewien czas trwania procesu traktować ją jako przestrzeń półnieskończoną. Założenie to będzie prawdziwe do momentu, aż front podwyższonej temperatury nie dotrze do wewnętrznej krawędzi ściany. Dla takiego przypadku znane jest rozwiązanie analityczne [1, 3]:

$$\frac{T - T_s}{T_p - T_s} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) - \exp\left(\frac{\alpha}{\lambda}x + \frac{\alpha^2 a}{\lambda^2}t\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + \frac{\alpha}{\lambda}\sqrt{at}\right). \quad (1.3)$$

Problem może być też rozwiązany wieloma metodami numerycznymi. Ze względu na prostotę użycia i dokładność zadawania warunków brzegowych wybrano metodę objętości skończonych. Jej zasada polega na podzieleniu przestrzeni na elementy, a następnie bilansowaniu strumieni ciepła w każdym elemencie. Zmiana entalpii elementu w przedziale czasu Δt jest równa bilansowi strumieni ciepła wymienianego przez granicę elementu i wewnętrznych źródeł ciepła. Jeśli nie ma przemian fazowych, ciśnienie jest stałe oraz układ nie wykonuje pracy, to entalpia jest jednoznacznie określona od temperatury. Ścianę podzielono na elementy o jednakowej szerokości. Bilans ciepła elementu i -tego w chwili czasowej n -tej określa wzór:

$$\frac{m_i c_{pi} (T_i^n - T_i^{n-1})}{\Delta t} = Q_{el}, \quad (1.4)$$

gdzie Q_{el} jest sumą strumieni ciepła przez granicę elementu.

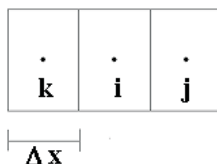
Ze wzoru (1.4) można w bezpośredni sposób wyznaczyć temperaturę w aktualnej chwili czasowej, mając temperatury w chwili poprzedniej.

$$T_i^n = T_i^{n-1} + \frac{Q_{el}}{m_i c_i} \Delta t. \quad (1.5)$$

Schemat jawny jest łatwy do implementacji, ale wymaga odpowiedniego kroku czasowego. Długość tego kroku jest ograniczona od góry, powyżej pewnej wartości rozwiązanie jest niestabilne.

2. Stabilność schematu jawnego metody objętości skończonych (MOS)

Klasyyczny warunek stabilności metody można wyprowadzić z założenia fizycznej poprawności równań różnicowych [2]. Przy jednowymiarowym podziale na elementy o szerokości Δx w analizowanej ścianie jak na rysunku 1.



Rys. 1. Podział na objętości skończone

Równanie (1.4) można w takim przypadku zapisać w postaci:

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{K_{ki}\Delta t}{m_i c_{pi}} (T_k^n - T_i^n) + \frac{K_{ji}\Delta t}{m_i c_{pi}} (T_j^n - T_i^n), \quad (2.1)$$

gdzie: K_{ki} , K_{ji} są przewodnościami cieplnymi odpowiednio między elementami k , i oraz j .

Następnie przekształcamy równanie (2.1) tak, aby otrzymać współczynniki przy poszczególnych temperaturach. Każdy z tych współczynników musi być dodatni. Ujemny współczynnik oznacza, że temperatura w rozpatrywanym elemencie i -tym spada, a równocześnie rośnie w elementach sąsiednich. Jest to niefizyczne. Po przekształceniu równania (2.1) można wykazać, że tylko jeden ze współczynników stojący przy temperaturze T_i mógłby przybrać wartość ujemną. Zapisując warunek, że musi on być większy od zera, mamy:

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{m_i c_{pi}} (K_{ki} + K_{ji}) \right) > 0. \quad (2.2)$$

Stąd warunek na krok czasowy Δt :

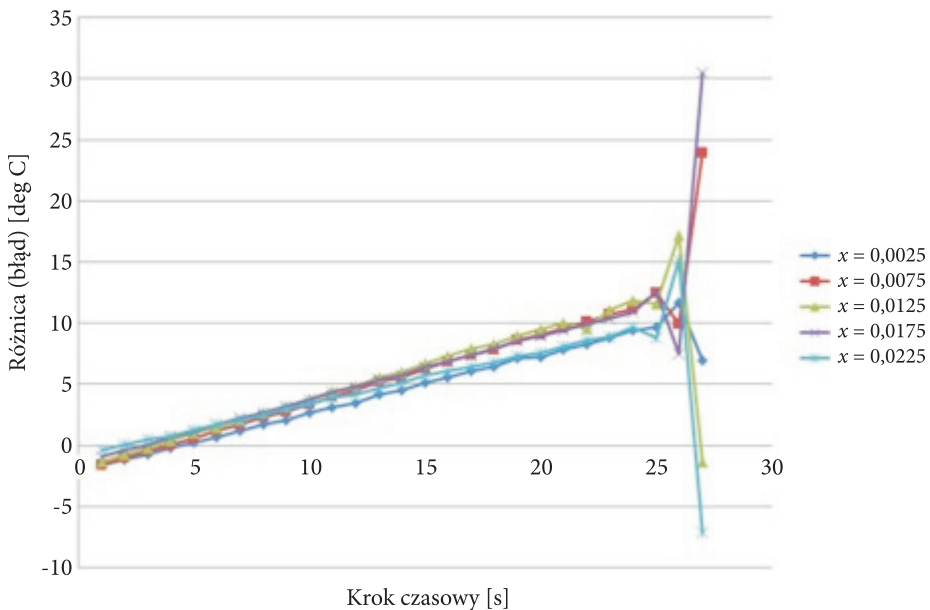
$$\Delta t < \frac{m_i c_{pi}}{K_{ki} + K_{ji}}. \quad (2.3)$$

Ponieważ znane jest rozwiązanie teoretyczne określone wzorem (1.3) można zaproponować warunek stabilności polegający na równości rozwiązania numerycznego T_{ni} i teoretycznego T_{ti} w danej chwili czasu.

$$T_{ti}(t) = T_{ni}(t). \quad (2.4)$$

3. Analiza stabilności według proponowanego kryterium

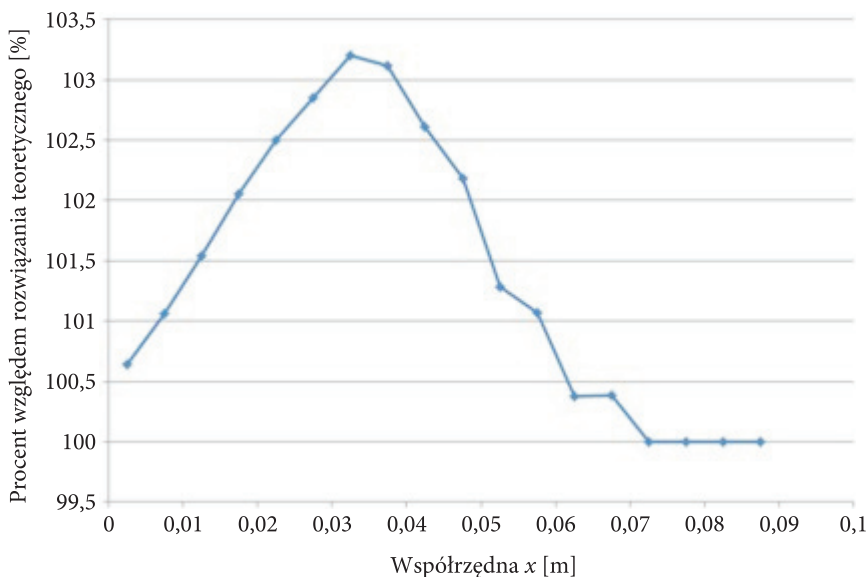
W pierwszym etapie analizy wykonano obliczenia za pomocą MOS, stosując kroki czasowe od 1 sekundy do 29 sekund. Założono, że materiał ściany ma współczynnik $\lambda = 0,35 \text{ W/(mK)}$, gęstość $\rho = 700 \text{ kg/m}^3$ i ciepło właściwe 1000 J/(kgK) . Współczynnik przejmowania ciepła między powietrzem a ścianą $\alpha = 25 \text{ W/(m}^2\text{K)}$. Szerokość elementów Δx wynosiła $0,005 \text{ m}$. Teoretyczny, porównawczy przebieg temperatury otrzymano z równania (1.3). Obliczono błąd zdefiniowany jako (2.4) w punktach odpowiadających węzłom kolejnych elementów bilansowych. Wykresy błędów dla wybranych długości kroków przedstawia rysunek 2.



Rys. 2. Różnica między rozwiązaniem teoretycznym i numerycznym dla różnych głębokości w ścianie

Z powodu czytelności rysunku wykreślono wartości dla kroków czasowych od 1 do 27 sekund. Widoczne są dwa przedziały o różnym charakterze zmienności błędów. W pierwszym przedziale błąd rośnie w sposób niemal liniowy, w drugim zaś następuje gwałtowna utrata stabilności i skok błędów. Dla konkretnego kroku czasowego z pierwszego przedziału trudno jest oszacować błąd, nie mając porównania z rozwiązaniem teoretycznym. Dopiero przekraczając graniczny krok, tutaj około 25 sekund, błędy w rozwiązaniu stają się widoczne. Jednak dla takiego kroku pozornie poprawne wyniki mogą być już obarczone błędem rzędu 10°C . Porównajmy wyniki z maksymalnym krokiem czasowym ze wzoru (2.3) z rozwiązaniem teoretycznym. Dla przyjętych parametrów fizycznych i wymiarów elementów

otrzymujemy $\Delta t = 12,3$ sekundy. Rysunek 3 przedstawia różnicę w procentach pomiędzy rozwiązaniem teoretycznym a numerycznym dla czasu 492 sekund dla kolejnych współrzędnych x w głąb ściany. Zastosowano krok czasowy $\Delta t = 12$ sekund.



Rys. 3. Stosunek wartości numerycznej do teoretycznej w procentach — wyjaśnienie w tekście

Z rysunku 2 widać, że zerowa różnica pomiędzy wynikiem teoretycznym i numerycznym występuje przy kroku czasowym mniejszym niż 5 sekund. Wartość tego kroku jest też zależna od głębokości w ścianie. W dalszym ciągu analizowano wartości kroku czasowego, dla którego różnica temperatury teoretycznej i numerycznej wynosi zero dla różnych wartości współczynnika przewodzenia ciepła.

4. Zależność wartości stabilnego kroku czasowego od współczynnika przewodzenia ciepła materiału

Obliczono długość kroku czasowego Δt_0 , dla którego błąd przybiera wartość zero dla czterech wartości współczynnika przewodzenia ciepła i trzech wartości współrzędnej x . Przyjęte wartości x wynikają z szerokości elementów objętości skończonych, która jak poprzednio wynosiła $\Delta x = 0,005$. Ponieważ rozmiary elementów mają wpływ na stabilny krok czasowy, otrzymane wyniki są ważne dla przyjętego Δx . Dla porównania obliczono maksymalny krok czasowy według wzoru (2.3). Wyniki zestawiono w tabeli 1.

TABELA 1

Krok czasowy Δt z zerowym błędem dla wybranych wartości współczynnika przewodzenia ciepła i współrzędnej x

Współczynnik λ	0,35	0,45	0,55	0,65
Maksymalny Δt [s]	12,5	9,7	8	6,7
$\Delta t_0 (x = 0,0025 \text{ m})$ [s]	4,5	3,2	2,5	2,25
$\Delta t_0 (x = 0,0075 \text{ m})$ [s]	3,83	3	2,2	1,83
$\Delta t_0 (x = 0,0125 \text{ m})$ [s]	3,33	2,6	2	1,67

5. Wnioski

Warunek równości rozwiązań daje zawsze ostrzejsze wymagania co do maksymalnej długości kroku czasowego. Z warunku stabilności krok zależy tylko od właściwości elementu, to znaczy jest stały w obszarze jednorodnego materiału ze stałym podziałem siatki. Dla warunku przedstawionego w pracy krok zmienia się dla kolejnych elementów w jednowarstwowej ścianie. Zależy więc nie tylko od właściwości elementów, ale też od lokalnych warunków wymiany ciepła. Zaletą schematu jawnego jest przede wszystkim elastyczność i łatwość formułowania zadania, co przekłada się na czas potrzebny do uzyskania rozwiązania. Jednak warunkiem użyteczności otrzymanych wyników jest przyjęcie odpowiedniego kroku czasowego. Maksymalna długość kroku dla której nie następuje jeszcze widoczna niestabilność, nie gwarantuje dużej dokładności wyników.

Warunek stabilności równań jest łatwiejszym do wyznaczenia kryterium, aczkolwiek wyniki dla takiego kroku mogą być obciążone błędem rzędu kilku punktów procentowych. Dobierając krok według kryterium z artykułu, otrzymamy wyniki zgodne z rozwiązaniem teoretycznym w wybranym punkcie, w pozostałych mogą one posiadać pewien błąd. Zagadnienie doboru kroku jest więc skomplikowane i wymaga dalszych badań.

Artykuł opracowany na podstawie referatu prezentowanego na XXVIII Międzynarodowej Konferencji Naukowo-Technicznej „Ekomilitaris 2014”, Zakopane 9-12.09.2014 r.



Artykuł wpłynął do redakcji 8.12.2014 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano 30.01.2015 r.

LITERATURA

- [1] WIŚNIEWSKI S., WIŚNIEWSKI S.W., *Wymiana ciepła*, WNT, Warszawa, 2009.
- [2] SZARGUT J. (red.), *Modelowanie numeryczne pól temperatury*, WNT, 1992.

- [3] TALER J., DUDA P., *Rozwiązywanie prostych i odwrotnych zagadnień przewodzenia ciepła*, WNT, 2003.

M. OWCZAREK, W. RADZIKOWSKA-JUŚ

Solution stability of unsteady boundary problem of building wall temperature profile

Abstract. One of the most simplest and versatile methods for numeric solving of the problems of transient heat conduction in the building envelope is the finite volume method. In explicit scheme, however, there is a problem of assuming correct time step for solution stability. In this article, stable step value was determined from the condition of zero difference between the theoretical and numerical solution for the particular geometry of the wall. The influence of the thermal conductivity on the step length has been evaluated. Condition for the correctness of solutions obtained from the analysis in this article is sharper than the condition of equations stability according to the literature. For the boundary conditions, the adopted solution can be applied to the study of resistance of buildings shelters to long fire.

Keywords: numerical stability, shelter buildings, the temperature profile in the wall

