

ZMIANA POŁOŻENIA UKŁADU ODWRÓCONEGO WAHADŁA PRZY UŻYCIU STEROWANIA ŚLIZGOWEGO

Mirosław TOMERA

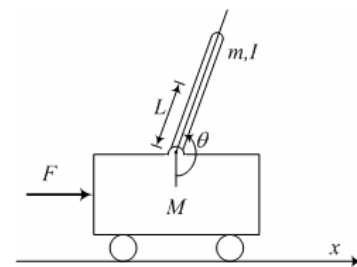
Akademia Morska w Gdyni, Wydział Elektryczny, ul. Morska 83, 81-225 Gdynia
tel: +48 58 690 1471 fax: +48 58 690 1445 e-mail: tomera@am.gdynia.pl

Streszczenie: W referacie przedstawione zostało sterowanie ślizgowe zastosowane do zmiany położenia wózka w układzie odwróconego wahadła. Obiekt sterowania jest nieliniowy, o dwóch stopniach swobody (kąt ustawienia wahadła i pozycja wózka) i jednym wejściu (siła przyłożona do wózka). Zadanie sterowania polega na takim przemieszczaniu położenia wózka, aby wraz z jego zmianami, pręt wahadła balansował w położeniu pionowym i nie przewrócił się. Model matematyczny obiektu składa się z czterech nieliniowych równań stanu. Sterowanie ślizgowe zazwyczaj stosowane jest do obiektów drugiego rzędu, zapisywanych w postaci zmiennych fazowych. Dlatego też w przypadku układu odwróconego wahadła konieczna była dekompozycja problemu i zastosowane zostało dwuwarstwowe sterowanie ślizgowe. W części równoważnej sterowania rozważone zostały regulatory: liniowo-kwadratowy (LQR) i proporcjonalno-całkująco-różniczkujący (PID), które są powszechnie stosowane do sterowania procesami dynamicznymi. Uzyskane układy sterowania ślizgowego są odporne na wpływ działających zakłóceń. Wyniki badań symulacyjnych pokazują efektywność pracy zaproponowanych struktur układów sterowania.

Słowa kluczowe: sterowanie ślizgowe, LQR, odwrócone wahadło.

1. WPROWADZENIE

Układ odwróconego wahadła ma własności nieliniowego modelu czwartego rzędu, jest niestabilny, wielowymiarowy, i może być traktowany jako typowy problem sterowania do analizowania nowoczesnych teorii sterowania. Sterowanie tego typu układami, z użyciem metod klasycznych, jest zadaniem stosunkowo trudnym. Związane jest to głównie z tym, że jest to problem nieliniowy o dwóch stopniach swobody ruchu (kąt ustawienia pręta wahadła i pozycja wózka) i tylko jednym wejściem sterowania [7]. Obecnie stosowane są różne typy układów odwróconych wahadeł: liniowe, obrotowe, z pojedynczym przegubem lub wieloprzegubowe [1]. W niniejszej pracy, do rozważań nad algorytmem sterowania ślizgowego, rozpatrzony został liniowy układ odwróconego wahadła z pojedynczym przegubem, który został schematycznie pokazany na rysunku 1. Pręt przytwierdzony jest do wózka, którego droga poruszania się jest ograniczona, i balansuje pionowo w wyniku siły przykładanej do wózka. Wózek jest jednocześnie przemieszczany do pewnego zadanego położenia na swojej drodze.



Rys. 1. Układ odwróconego wahadła

Celem niniejszej pracy jest zaprezentowanie metody sterowania ślizgowego, zastosowanego do przemieszczania wózka wraz z przytwierdzonym, pionowo balansującym prętem. Główna idea zastosowanego sterowania ślizgowego polega na tym, że sygnał sterujący jest sumą sterowania równoważnego u_{eq} i sterowania przełączającego u_{sw} [2].

$$u(t) = u_{eq}(t) + u_{sw}(t) \quad (1)$$

Synteza sterowania przełączającego związana jest z zaprojektowaniem stabilnej powierzchni ślizgania, natomiast synteza sterowania równoważnego polega na zaprojektowaniu takiego sterowania, które przeprowadzi stany układu na wybraną powierzchnię ślizgania w skończonym czasie. Sterowanie równoważne zajmuje się kierowaniem dynamiką układu, natomiast sterowanie przełączające usuwa zakłócenia. Jako sterowanie równoważne może zostać wybrany dowolny algorytm, który będzie w stanie śledzić trajektorię zadaną z pewną określoną dokładnością.

Do realizacji sterowania równoważnego wybrane zostały regulatory najczęściej stosowane w praktyce: liniowo-kwadratowy (LQR) i proporcjonalno-całkująco-różniczkujący (PID). Do syntezy parametrów tych regulatorów zastosowany został zlinearyzowany model matematyczny układu odwróconego wahadła. Linearyzacja przeprowadzona została w niestabilnym punkcie pracy, tzn. przy pionowo ustawionym pręcie wahadła, gdyż takiego stanu dotyczy cel sterowania.

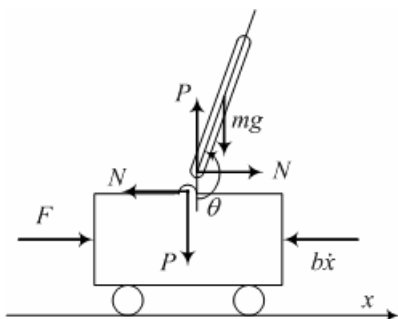
W pracy dokonano porównania pomiędzy uzyskanymi i badanymi strukturami regulatorów ślizgowych zastosowanych do sterowania układem odwróconego wahadła. Dynamika modelu i wymagania projektowe zostały zaczerpnięte ze strony internetowej Uniwersytetu z Michigan [3].

2. MODEL MATEMATYCZNY UKŁADU ODWRÓCONEGO WAHADŁA

Układ odwróconego wahadła składa się z wózka z zamocowanym na przegubie prętem, który schematycznie pokazany został na rysunku 1. Przemieszczanie się wózka o masie M następuje pod wpływem przykładanej do niego siły F , przy czym siła ta musi być tak umiejętnie przykładana aby zamocowane na nim wahadło nie przewróciło się, czyli nie może odchylić się od pionu o więcej niż o kilka stopni.

2.1. Analiza sił oraz równania ruchu

Równania różniczkowe opisujące układ odwróconego wahadła, wyprowadzone zostały dla schematu pokazanego na rysunku 2. W celu dokładniejszej analizy sił działających na obiekt, model wahadła przedstawiony został w postaci dwóch swobodnych brył. Zarówno wózek jak i wahadło mają po jednym stopniu swobody (odpowiednio x i θ). Równania różniczkowe zostaną wyprowadzone w oparciu o drugą zasadę dynamiki Newtona ($F = ma$).



Rys. 2. Ilustracja wahadła w postaci dwóch brył

Dla ruchu wzdłużnego, po zsumowaniu sił działających na bryłę wózka w kierunku poziomym, otrzymuje się następujące równanie ruchu:

$$M \cdot \ddot{x} = \sum F_i = F - b\dot{x} - N \quad (2)$$

Dynamika ruchu obrotowego wahadła związana jest z momentami, działającymi skręcająco na pręt wahadła

$$I\ddot{\theta} = \sum \tau_i = -PL \sin \theta - NL \cos \theta \quad (3)$$

Aby dokładnie określić model dynamiki układu odwróconego wahadła, konieczne jest określenie interakcji sił P i N , działających pomiędzy wózkiem i wahadłem. Siły te związane są z przemieszczaniem się środka pręta wahadła w kierunku poziomym x i pionowym y . Dynamika przemieszczania się środka pręta wahadła w kierunku poziomym x , opisana jest wzorem

$$m \cdot \ddot{x}_p = N \quad (4)$$

natomiast w kierunku pionowym y

$$m \cdot \ddot{y}_p = P - mg \quad (5)$$

Jednakże współrzędne położenia środka pręta wahadła (x_p , y_p) ściśle są powiązane z kątem nachylenia wahadła θ . Dlatego też ich pochodne mogą zostać wyrażone

w zależności od pochodnych kąta θ . Najpierw wyprowadzone zostaną pochodne w osi x

$$x_p = x + L \sin \theta \quad (6)$$

$$\dot{x}_p = \dot{x} + L\dot{\theta} \cos \theta \quad (7)$$

$$\ddot{x}_p = \ddot{x} - L\dot{\theta}^2 \sin \theta + L\ddot{\theta} \cos \theta \quad (8)$$

następnie pochodne w osi y

$$y_p = -L \cos \theta \quad (9)$$

$$\dot{y}_p = L\dot{\theta} \sin \theta \quad (10)$$

$$\ddot{y}_p = L\dot{\theta}^2 \cos \theta + L\ddot{\theta} \sin \theta \quad (11)$$

Podstawiając wyrażenie (8) do zależności (4), otrzymuje się równanie opisujące siłę N

$$N = m(\ddot{x} - L\dot{\theta}^2 \sin \theta + L\ddot{\theta} \cos \theta) \quad (12)$$

natomiast po podstawieniu wyrażenia (11) do równania (5), otrzymuje się zależność na siłę P

$$P = m(L\dot{\theta}^2 \cos \theta + L\ddot{\theta} \sin \theta + g) \quad (13)$$

Równanie opisujące dynamikę ruchu wózka w osi poziomej uzyskuje się po podstawieniu wyrażenia na siłę N , opisaną wzorem (12) do zależności (2)

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + mL\ddot{\theta} \cos \theta - mL\dot{\theta}^2 \sin \theta = F \quad (14)$$

Ostateczne równanie opisujące dynamikę zmian kąta obrotu wahadła uzyskiwane jest przez podstawienie wyprowadzonych zależności na siły N (12) i P (13) do wzoru (3)

$$(I + mL^2)\ddot{\theta} + mgL \sin \theta = -mL\ddot{x} \cos \theta \quad (15)$$

2.2. Nieliniowe równania dynamiczne

W celu zamodelowania w programach symulacyjnych, uzyskanego modelu matematycznego układu odwróconego wahadła, opisanego równaniami (14) i (15), wyprowadzone zostały nieliniowe równania dynamiczne. W pierwszej kolejności z równania (14) wyznaczona została druga pochodna współrzędnej x wózka (\ddot{x}) i uzyskane wyrażenie podstawione zostało do równania (15). W ten sposób uzyskano następujące nieliniowe równanie drugiego rzędu

$$\ddot{\theta} = \frac{- (M + m)mgL \sin \theta - m^2 L^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta}{q_1} + \frac{mLb\dot{x} \cos \theta - mL \cos \theta \cdot F}{q_1} \quad (16)$$

gdzie: $q_1 = I(M+m) + mL^2 + m^2 L^2 \sin^2 \theta$

W podobny sposób uzyskane zostało drugie nieliniowe równanie drugiego rzędu. Z równania (15), wyznaczona została druga pochodna kąta wychylenia wahadła ($\ddot{\theta}$) i uzyskane wyrażenie podstawione zostało do równania (14).

$$\ddot{x} = \frac{-b(I + mL^2)\dot{x} + m^2gL^2 \sin \theta \cos \theta}{q_1} + \frac{mL(I + mL^2)\dot{\theta}^2 \sin \theta + (I + mL^2) \cdot F}{q_1} \quad (17)$$

gdzie: $q_1 = I(M+m) + mL^2 + m^2L^2 \sin^2 \theta$. Równania (16) i (17) stanowią podstawę do wyprowadzenia nieliniowych równań stanu. W tym celu przyjęto następujący wektor stanu, który reprezentuje położenia i prędkości wahadła oraz wózka.

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [\theta \ \dot{\theta} \ x \ \dot{x}]^T \quad (18)$$

Na podstawie równań (16) oraz (17) wyprowadzone zostały nieliniowe równania stanu, opisujące zależności zachodzące pomiędzy wahadłem a wózkiem.

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (19)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{-mgL(M+m) \cdot \sin x_1 - 0.5m^2L^2 \sin 2x_1 \cdot x_2^2}{q_2} + \frac{mLb \cos x_1 \cdot x_4 - mL \cos x_1 \cdot u}{q_2} \quad (20)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (21)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{-b(I + mL^2)x_4 + 0.5m^2gL^2 \sin 2x_1}{q_2} + \frac{(I + mL^2)mLx_2^2 \sin x_1 + (I + mL^2) \cdot u}{q_2} \quad (22)$$

gdzie: $q_2 = I(M+m) + mL^2 + m^2L^2 \sin^2 x_1$, natomiast $u = F$ jest sterowaniem polegającym na przyłożeniu określonej siły do wózka.

2.3. Równania zlinearyzowane

Liniaryzacja równań stanu pozwala na zapisanie ich w postaci następującego układu macierzowo- wektorowego

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (23)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + Du(t) \quad (24)$$

Liniaryzacja nieliniowych równań różniczkowych (19)-(22) dokonana została wokół punktu równowagi wahadła $\theta = \pi$. W tym celu z powyższych, nieliniowych równań stanu usunięte zostały składniki zawierające zmienne stanu występujące w kwadratach, natomiast funkcje

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{mgL(M+m)}{I(M+m) + MmL^2} & 0 & 0 & \frac{-mLb}{I(M+m) + MmL^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{m^2gL^2}{I(M+m) + MmL^2} & 0 & 0 & \frac{-(I+mL^2)b}{I(M+m) + MmL^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ mL \\ I(M+m) + MmL^2 \\ 0 \\ I + mL^2 \\ I(M+m) + MmL^2 \end{bmatrix} \cdot u \quad (25)$$

trygonometryczne zastąpione zostały funkcjami liniowymi w następujący sposób: $\sin \theta \approx -\theta$, $\cos \theta \approx -1$, $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \approx 2\theta$. Uzyskane w ten sposób liniowe równania stanu zapisano w postaci macierzowej (25). Takiej samej liniaryzacji poddane zostały pojedyncze równania różniczkowe opisujące model matematyczny układu odwróconego wahadła opisane wzorami (13) i (14). W tym przypadku uzyskane zostały następujące równania zlinearyzowane

$$(I + mL^2)\ddot{\theta} - mgL\theta = mL\ddot{x} \quad (26)$$

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} - mL\ddot{\theta} = u \quad (27)$$

2.4. Transmitancje operatorowe

W oparciu o zlinearyzowane równania (26) i (27) wyznaczone zostały transmitancje operatorowe opisujące zależności pomiędzy przyłożoną siłą wzdłużną do wózka F , a zmianą jego współrzędnych położenia x i zmianą kąta wychylenia wahadła θ . W pierwszej kolejności zlinearyzowane równania (26) i (27) poddane zostały przekształceniu operatorowemu Laplace'a

$$(I + mL^2)s^2\theta(s) - mgL\theta(s) = mLs^2X(s) \quad (28)$$

$$(M + m)s^2X(s) + bsX(s) - mLs^2\theta(s) = U(s) \quad (29)$$

Po wyznaczeniu $X(s)$ z równania (29) i podstawieniu uzyskanej zależności do równania (28) uzyskano pierwszą transmitancję

$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{\frac{mL}{q_3}s}{s^3 + \frac{b(I + mL^2)}{q_3}s^2 - \frac{mgL(M+m)}{q_3}s - \frac{mgLb}{q_3}} \quad (30)$$

gdzie: $q_3 = I(M+m) + mL^2$. W podobny sposób uzyskana została druga transmitancja opisująca zależność pomiędzy siłą wzdłużną przyłożoną do wózka, a zmianą jego położenia. W tym celu z równania (28) wyznaczona została zależność na $\theta(s)$ i podstawiona do równania (29)

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{\frac{I + mL^2}{q_3}s^2 - \frac{mgL}{q_3}}{s^4 + \frac{b(I + mL^2)}{q_3}s^3 - \frac{mgL(M+m)}{q_3}s^2 - \frac{mgLb}{q_3}s} \quad (31)$$

gdzie: $q_3 = I(M+m) + mL^2$. W dalszych obliczeniach wykorzystane zostały wartości parametrów układu odwróconego wahadła uzyskane ze strony internetowej [3] i parametry te znajdują się w tabelicy 1.

Tablica 1. Wartości parametrów układu odwróconego wahadła

Zmienna	Parametr	Wartość	Jednostka
M	Masa wózka	0.5	kg
m	Masa wahadła	0.2	kg
b	Współczynnik tarcia	0.1	N/m/s
L	Długość wahadła	0.3	m
I	Bezwładność wahadła	0.006	kgm ²
g	Przyśpieszenie ziemskie	9.81	m/s ²

3. REGULATORY NOMINALNE

W podrozdziale tym przedstawiona została synteza regulatorów nominalnych, wypracowujących równoważną część składową sygnału sterującego u_{eq} , dla projektowanego regulatora ślizgowego działającego w oparciu o wzór (1).

3.1. Regulator LQR

W literaturze można znaleźć różne metody wykorzystane do sterowania układem odwróconego wahadła. W tym podrozdziale opisany zostanie regulator LQR (Linear Quadratic Regulator). Do wyznaczenia wzmacnień regulatora LQR

$$u_{eq}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (32)$$

pozwalającego na przemieszanie wózka przy utrzymywaniu pionowego położenia pręta wahadła (Rys. 3), przyjęto następujący model matematyczny układu odwróconego wahadła:

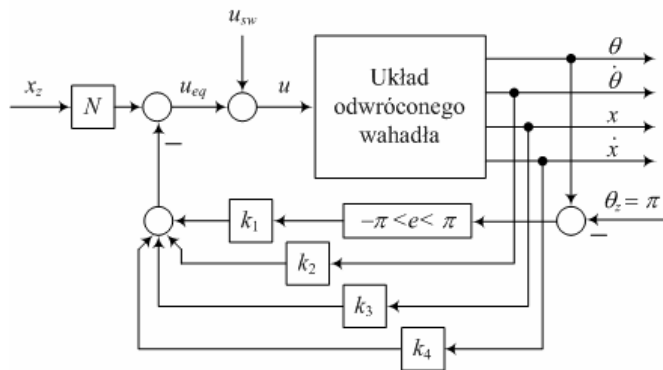
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 31.2136 & 0 & 0 & -0.4545 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2.6755 & 0 & 0 & -0.1818 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4.5455 \\ 0 \\ 1.1882 \end{bmatrix} \cdot u(t) \quad (33)$$

$$y(t) = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + 0 \cdot u(t) \quad (34)$$

Problem regulatora LQR rozwiązywany jest przy następujących założeniach [5]:

1. Wszystkie stany $\mathbf{x}(t)$ są dostępne, tzn. że są mierzone przez czujniki;
2. Układ jest sterowalny i obserwowalny.

W celu sprawdzenia sterowalności i obserwowalności zastosowane zostały funkcje Matlab'a `obsv(A,C)` i `ctrb(A,B)`. Wyniki tych badań wypadły pozytywnie. Regulator LQR zaliczany jest do tzw. sterowania optymalnego i wyznaczany jest w oparciu o liniowe równania dynamiczne oraz kwadratowy wskaźnik jakości, zapisywany w postaci następującej funkcji



Rys. 3. Schemat blokowy regulatora LQR, wyznaczającego sterowanie równoważne

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)dt \quad (35)$$

gdzie $\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^T$ oraz $\mathbf{R}=\mathbf{R}^T$ są parametrami wazącymi sygnały zmiennych stanu oraz sygnałów sterujących i zarazem stroją regulator. W oparciu o posiadane liniowe równania dynamiczne wyznacza się macierz wzmacnień regulatora LQR

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S} \quad (36)$$

która pozwala na minimalizację kwadratowego wskaźnika jakości (35). Macierz \mathbf{S} wyznaczana jest w wyniku rozwiązania algebraicznego równania Riccati'ego

$$\mathbf{S}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{S} + \mathbf{Q} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S} = 0 \quad (37)$$

Proces minimalizacji kwadratowego wskaźnika jakości (35) obejmuje rozwiązanie równania Riccati'ego, które to zadanie może zostać wykonane przy użyciu funkcji `lqr` znajdującej się w Matlabie ($\mathbf{K} = \text{lqr}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}, \mathbf{R})$). Wartości parametrów macierzy \mathbf{Q} i \mathbf{R} zostały wyznaczone przy użyciu reguły Bryson'a ([6], strona 493)

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}, \quad R = 1 \quad (38)$$

Zastosowanie funkcji Matlab'a `lqr` pozwoliło na wyznaczenie następujących wartości parametrów regulatora

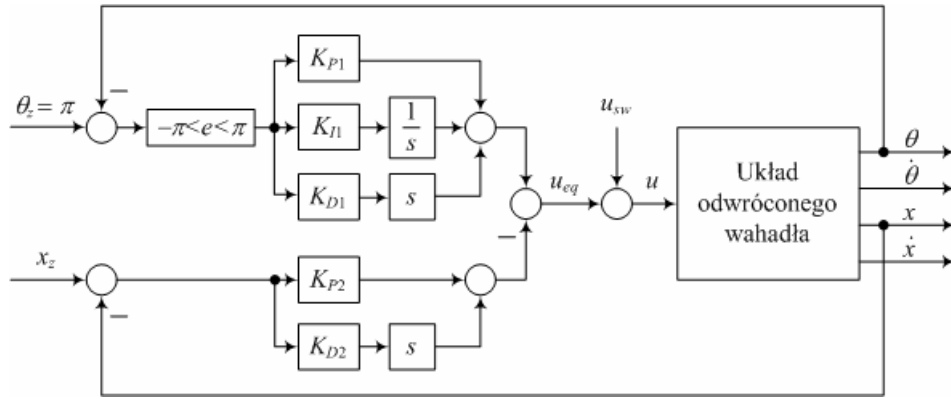
$$\mathbf{K} = [34.1735 \ 6.7443 \ -2.5 \ -5.5706]^T \quad (39)$$

Dodatkowo jeszcze wyznaczone zostało wzmacnienie skalujące sygnał zadany położenia wózka, w oparciu o następujące wzory

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_x \\ \mathbf{N}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$N = N_u + \mathbf{K}\mathbf{N}_x = -2.5 \quad (41)$$

Zaprojektowany układ sterowania został zamodelowany w Simulinku w układzie pokazanym na rysunku 3. Blok oznaczony jako 'Układ odwróconego wahadła' zawiera model matematyczny obiektu opisany równaniami (19)-(22).



Rys. 4. Schemat blokowy regulatora PID-PD, wyznaczającego sterowanie równoważne

3.2. Regulator PID-PD

Możliwe jest uzyskanie sterowania położeniem wózka w układzie odwróconego wahadła z wykorzystaniem regulatorów typu PID. Wyjściowy sygnał sterujący regulatora typu PID jest zazwyczaj wyznaczany na podstawie różnicy pomiędzy wartością zadaną i pomierzoną wartością wyjściową. W przypadku układu odwróconego wahadła istnieje konieczność stabilizacji pionowego położenia pręta wahadła θ i zadanego położenia wózka x , do którego na przegubie przytwierdzony jest pręt. Spełnienie tych wymagań wiąże się z zastosowaniem dwóch oddzielnych regulatorów typu PID, po jednym dla każdej wartości zadanej, co zostało pokazane na rysunku 4, gdzie K_p , K_I oraz K_D są odpowiednio wzmocnieniami: proporcjonalnym (P), całkującym (I) i różniczkującym (D).

Do stabilizacji pionowego położenia wahadła, zastosowany został regulator PID o transmitancji

$$G_{PID}(s) = K_{p1} + \frac{K_{I1}}{s} + sK_{D1} = \frac{K_{D1}s^2 + K_{p1}s + K_{I1}}{s} \quad (42)$$

Synteza wartości parametrów tego regulatora przeprowadzona została z wykorzystaniem linii pierwiastkowych i transmitancji opisanej wzorem (30). W tym celu transmitancja regulatora (42) została przekształcona do postaci opisanej wzorem (43)

$$G_{PID}(s) = k \frac{(s-z_1)(s-z_2)}{s} = \frac{ks^2 - k(z_1+z_2)s + kz_1z_2}{s} \quad (43)$$

Wymagania nałożone na projektowaną odpowiedź skokową były następujące: maksymalne przeregulowanie ($M_P < 5\%$), czas regulacji ($t_R < 2$ s). Z porównania współczynników w licznikach wzorów (42) i (43) wyznaczone zostały wartości parametrów regulatora PID służącego do stabilizacji pionowego położenia pręta wahadła $K_{p1} = 22$, $K_{I1} = 18$ oraz $K_{D1} = 4$.

Dobór parametrów regulatora PD do stabilizacji położenia wózka x

$$G_{PD}(s) = K_{p2} + sK_{D2} \quad (44)$$

przeprowadzony został ręcznie w Simulinku, metodą prób i doświadczeń, na modelu nieliniowym. W tym przypadku okazało się, że dynamika modelu liniowego, opisanego transmitancją (31) bardzo mocno odbiegała od dynamiki modelu nieliniowego (17) w tym torze i nie powiodła się synteza znanymi metodami analitycznymi. W wyniku strojenia ręcznego przyjęte zostały następujące wartości

parametrów regulatora PD: $K_{p2} = 2$, $K_{D2} = 1$. Po sprawdzeniu stabilności transmitancji wypadkowej układu regulacji w torze x , składającej się z regulatora PD (44) i transmitancji (31) okazało się, że jeden biegun znajduje się w prawej półpłaszczyźnie co sugerowałoby, że zaprojektowany układ regulacji nie powinien pracować stabilnie. Jednak w badaniach symulacyjnych wykazana została poprawna praca regulatora PD z dobranymi parametrami, który zapewniał stabilne przemieszczanie położenia wózka w układzie odwróconego wahadła.

4. REGULATOR PRZEŁĄCZAJĄCY

W podrozdziale tym przedstawiona została synteza sterowania przełączającego u_{eq} , będąca nieliniową częścią składową, projektowanego regulatora ślizgowego, działającego w oparciu o wzór (1). Sterowanie przełączające zazwyczaj stosowane jest w układach nieliniowych drugiego rzędu, które w przestrzeni stanów są zapisywane w następującej postaci kanonicznej

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (45a)$$

$$\dot{x}_2(t) = f(\mathbf{x}(t)) + b(\mathbf{x}(t)) \cdot u(t) \quad (45b)$$

$$y(t) = x_1(t) \quad (45c)$$

gdzie $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ jest wektorem stanu, $f(\mathbf{x})$ oraz $b(\mathbf{x})$ są funkcjami nieliniowymi, u jest sterowaniem.

Jednakże, model matematyczny układu odwróconego wahadła składa się z czterech równań, które w postaci ogólnej można zapisać następująco

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (46a)$$

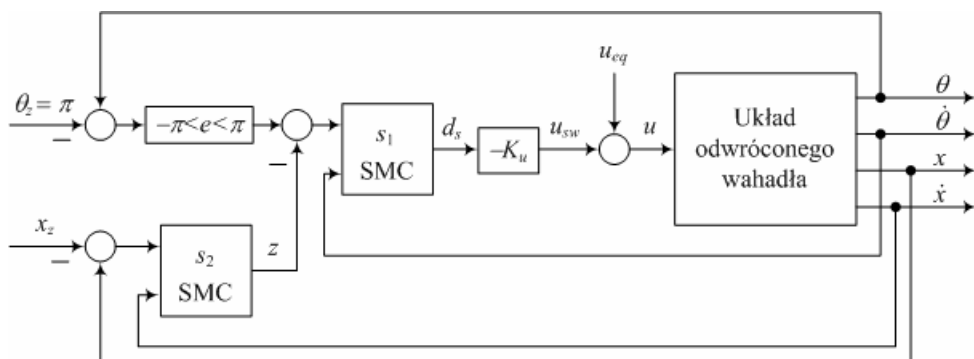
$$\dot{x}_2(t) = f_1(\mathbf{x}(t)) + b_1(\mathbf{x}(t)) \cdot u(t) \quad (46b)$$

$$\dot{x}_3(t) = x_4(t) \quad (46c)$$

$$\dot{x}_4(t) = f_2(\mathbf{x}(t)) + b_2(\mathbf{x}(t)) \cdot u(t) \quad (46d)$$

gdzie $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ jest wektorem stanu, $f_1(\mathbf{x})$, $f_2(\mathbf{x})$ oraz $b_1(\mathbf{x})$, $b_2(\mathbf{x})$ są funkcjami nieliniowymi, natomiast u jest sterowaniem.

W podrozdziale tym wykorzystana zostanie idea "odległości ze znakiem", wyprowadzona w pracy [4] (rozdział 3, strona 337).



Rys. 5. Schemat blokowy sterowania przełączającego, wykorzystujący dwuwarstwową powierzchnię ślizgania

Dla równania (46) zostaną zdefiniowane dwie linie przełączania

$$s_1 = c_1(x_1 - z) + x_2 \quad (47)$$

$$s_2 = c_2 x_3 + x_4 \quad (48)$$

gdzie: $x_1 = \theta - \theta_z$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x_3 = x - x_z$, $x_4 = \dot{x}$. Celem sterowania jest przeprowadzanie stanu układu do początkowego punktu równowagi. Zmienne linii przełączania s_1 i s_2 są stopniowo redukowane do zera, w tym samym czasie, przez zmienną pośrednią z .

W równaniu (47) z jest wartością wyprowadzaną z s_2 , według następującej zależności

$$z = Z_u \text{sat}(s_2 / \Phi) \quad (49)$$

Φ jest warstwą przełączania zmiennej s_2 , natomiast definicja funkcji $\text{sat}(\cdot)$ jest następująca

$$\text{sat}(\phi) = \begin{cases} -1 & \text{dla } \phi \leq -1 \\ \phi & \text{dla } |\phi| < 1 \\ 1 & \text{dla } \phi \geq 1 \end{cases} \quad (50)$$

Sygnał wyjściowy regulatora przełączającego u_{sw} wyznaczany jest w oparciu o poniższy wzór

$$u_{sw} = -K_u d_s = -K_u \frac{s_1}{\sqrt{1 + c_1^2}} \quad (51)$$

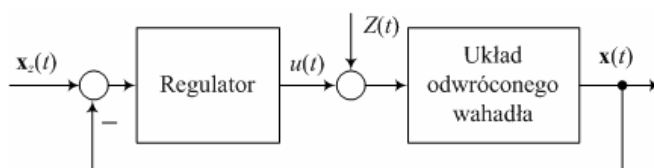
Zaproponowana struktura regulatora przełączającego u_{sw} , wykorzystana do sterowania położeniem wózka w układzie odwróconego wahadła, przedstawiona została na rysunku 5.

W wyniku przeprowadzonych badań symulacyjnych dobrane zostały parametry regulatora przełączającego $c_1 = 0.5$, $c_2 = 5$, $\Phi = 0.5$, $Z_u = 1$, $K_u = 2$.

5. BADANIA ZAPROJEKTOWANYCH UKŁADÓW STEROWANIA ŚLIZGOWEGO

Złożenie regulatora nominalnego, pokazanego na rysunku 3 lub 4 oraz regulatora przełączającego pokazanego na rysunku 5, daje w efekcie projektowany regulator ślizgowy. Badania zaprojektowanych regulatorów przeprowadzone zostały w środowisku obliczeniowym Matlab/Simulink, w układzie sterowania przedstawionym na rysunku 6 i obejmowały dwa przypadki: (a) brak zakłóceń $Z(t) = 0$; (b) obecność zakłóceń stałych $Z(t) = 0.2 \cdot 1(t)$,

oddziałujących na wózek równoległe z siłą sterująca $u(t)$. Analizowana próba testowa obejmowała zmianę położenia



Rys. 6. Schemat blokowy zaprojektowanych układów sterowania

wózka o 1 metr i rozpatrzone zostały cztery typy regulatorów: (a) regulator LQR bez włączonej części przełączającej (LQR); (b) regulator LQR z włączoną częścią przełączającą (LQR+SMC); (c) regulator PID-PD bez włączonej części przełączającej (PID-PD); (d) regulator PID-PD z włączoną częścią przełączającą (PID-PD+SMC). Z regulatorem ślizgowym ma się do czynienia wówczas gdy włączona jest część przełączająca. Uzyskane wyniki sterowania przy braku zakłóceń przedstawione zostały na rysunku 7, natomiast w obecności zakłóceń pokazane zostały na rysunku 8. Zmienne wykreślone na tych rysunkach (7 i 8) zarejestrowane zostały co 0.01 sekundy, uzyskując w ten sposób $N = 1500$ pomierzonych próbek w badanym odcinku stabilizacji.

Ocena jakości pracy rozważanych układów regulacji polegała na ocenie wskaźników jakości definiowanych na podstawie odpowiedzi skokowej i były to: maksymalne przeregulowanie M_p , czas regulacji t_R mierzony przy strefie dokładności $\Delta = 2\%$. Dodatkowo na podstawie zarejestrowanych wartości współrzędnej położenia wózka i sygnału sterującego wyznaczone zostały następujące funkcjonaly:

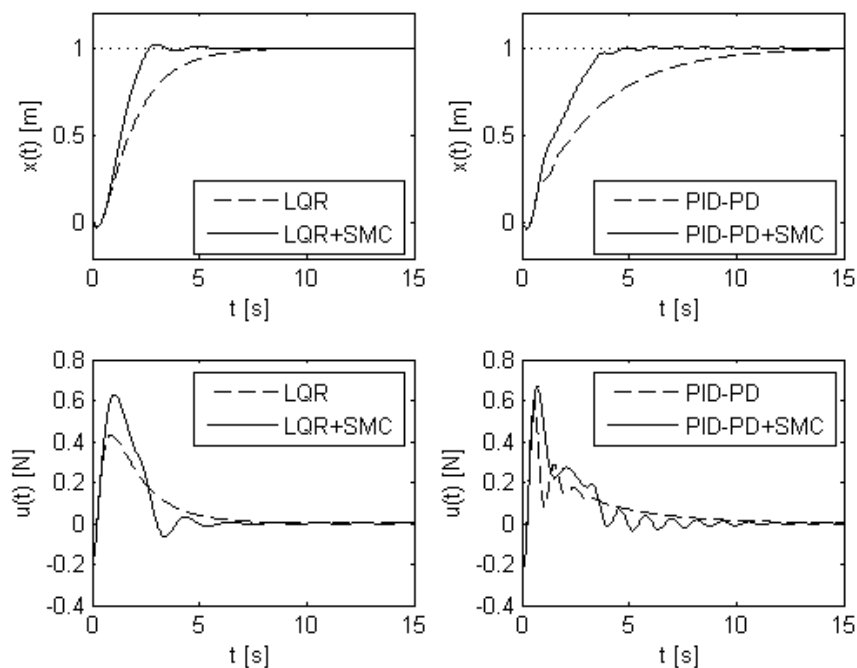
$$J_E = \sum_{k=1}^N |e(k)| \quad J_u = \sum_{k=1}^N |u(k)|, \quad (52)$$

gdzie: $e(k) = x_{zad}(k) - x(k)$ jest uchybem regulacji, natomiast $u(k)$ siłą przykładaną do wózka. Wskaźniki jakości wyznaczone dla prób testowych bez zakłóceń znajdują się w tabelicy 2, natomiast z zakłóceniami w tabelicy 3.

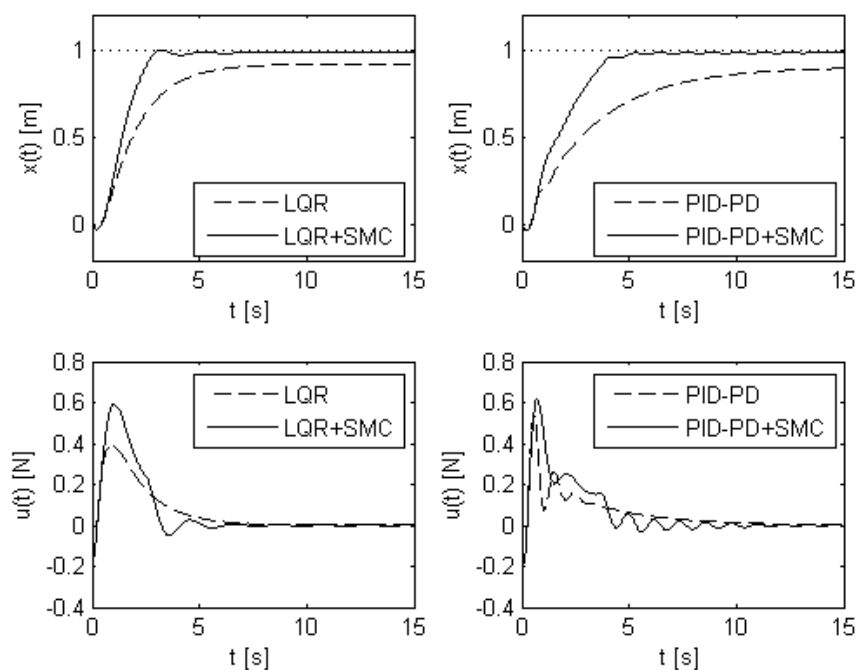
W badaniach przeprowadzonych w układzie sterowania bez zakłóceń, w próbach przeprowadzonych z dowolnym regulatorem, uchyb w stanie ustalonym był równy zero ($e_u = 0$). Przy czym włączenie części przełączającej do dowolnego regulatora nominalnego (LQR lub PID-PD) spowodowało skrócenie czasu regulacji. Po dodaniu zakłócenia o stałej wartości wyniki badań układu sterowania z regulatorami nominalnymi charakteryzowały się

niezerowym uchybem w stanie ustalonym. Włączenie części przełączającej pozwalało na zredukowanie uchybu w stanie

ustalonym bardzo blisko zera.



Rys. 7. Porównanie wyników sterowania położeniem układu odwróconego wahadła, przy braku zakłóceń



Rys. 8. Porównanie wyników sterowania położeniem układu odwróconego wahadła, w obecności zakłóceń

Analizując wyniki zawarte w tablicach 2 i 3, widać że najkrótszy czas regulacji (t_R) i najmniejszy całkowy wskaźnik jakości (J_E) związany z dokładnością sterowania, uzyskany został dla regulatora ślizgowego w którym część nominalną reprezentował regulator LQR.

6. WNIOSKI KOŃCOWE

W rozważanej pracy zamieszczone zostało wyprowadzenie modelu matematycznego układu odwróconego wahadła, zarówno w postaci nieliniowych

równań różniczkowych opisujących dynamikę wózka i pręta wahadła, jak również wyprowadzenie nieliniowych równań dynamicznych i ich linearyzacja. W oparciu o model zlinearyzowany wyprowadzone zostały dwie transmitancje operatorowe, pierwsza dla zmian kąta ustawienia wahadła, natomiast druga dla zmian położenia wózka, obydwie pod wpływem siły przyłożonej do wózka układu odwróconego wahadła. Uzyskane nieliniowe równania dynamiczne zamodelowane zostały w Simulinku.

Tablica 2. Wskaźniki oceny jakości sterowania uzyskane z wykresów czasowych pokazanych na rysunku 7 (bez zakłóceń)

Typ układu regulacji	M_p	t_R	J_E	J_u	e_u
	[%]	[s]	[-]	[-]	[-]
LQR	0	6.81	219.2	104.3	0
LQR + SMC	2.1	3.08	144.5	114.2	0
PID-PD	0	11.36	331.3	105.9	0
PID-PD + SMC	0.5	4.48	176.8	116.6	0

Tablica 3. Wskaźniki oceny jakości sterowania uzyskane z wykresów czasowych pokazanych na rysunku 8 (z zakłóceniami)

Typ układu regulacji	M_p	t_R	J_E	J_u	e_u
	[%]	[s]	[-]	[-]	[-]
LQR	0	6.81	321.7	95.9	0.08
LQR + SMC	1.69	2.79	171.0	110.3	0.02
PID-PD	0	11.36	448.8	95.3	0.11
PID-PD + SMC	0.36	4.84	210.8	113.0	0.02

W oparciu o zlinearyzowane równania dynamiczne zaprojektowany został pierwszy regulator nominalny którym był regulator liniowy LQR. Drugim regulatorem nominalnym był regulator PID-PD, składający się z połączenia równoległego: regulatora PID do stabilizacji pionowego położenia pręta wahadła i regulatora PD do stabilizacji położenia wózka. Synteza regulatora PID dokonana została z wykorzystaniem transmitancji dla tego toru i z zastosowaniem linii pierwiastkowych. Parametry regulatora PD zostały dobrane ręcznie.

Wyznaczenie części przełączającej wymagało dekompozycji powierzchni ślizgania do dwóch warstw, każda z nich zastosowana została do oddzielnego toru. Pierwsza warstwa do stabilizacji toru związanego z położeniem wahadła, natomiast druga do stabilizacji położenia wózka.

W pracy zamieszczone zostały badania regulatora ślizgowego zastosowanego do sterowania pozycją wózka

w układzie odwróconego wahadła. Badane były dwie konfiguracje regulatora ślizgowego, w pierwszej z nich regulatorem nominalnym był regulator LQR, natomiast w drugim PID-PD. Uzyskane wyniki badań porównane zostały z równoważnymi wynikami otrzymanymi z zastosowaniem regulatorów nominalnych będących częścią składową regulatorów ślizgowych.

Wyniki przeprowadzonych badań pozwalają stwierdzić, że zastosowanie regulatora ślizgowego pozwala na uzyskanie lepszych wyników sterowania, aniżeli zastosowanie samego regulatora LQR lub układu regulatorów PID-PD. W układzie regulacji z regulatorem ślizgowym z częścią nominalną LQR uzyskano najlepsze wyniki, zarówno w przypadku braku zakłóceń jak i ich obecności uchyb był zawsze prawie równy zero, jak również czas regulacji (t_R) był najkrótszy.

7. BIBLIOGRAFIA

1. Banrejee A., Nigam M.J.: Designing of Proportional Sliding Mode Controller for Linear one Stage Inverted Pendulum, Power Engineering and Electrical Engineering, Vol. 9, No. 2, pp. 84-89, 2011.
2. Bhavsar P., Kumar V.: Trajectory Tracking of Linear Inverted Pendulum using Integral Sliding Mode Control, Intelligent Systems and Applications, Vol. 6, pp. 31-38, 2012.
3. Carnegie Mellon, University of Michigan, (<http://www.engin.umich.edu/group/ctm>)
4. Chen S.-Y., Yu F.-M., Chung H.-Y.: Decoupled fuzzy controller design with single-input fuzzy logic, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 129, No. 3, pp. 335-342, 2002.
5. Eide R., Egelid P.M., Stamso A., Karimi H.R.: LQG Control Design for Balancing an Inverted Pendulum Mobile Robot, Intelligent Control and Automation, Vol. 2, pp. 160-166, 2011.
6. Franklin G.F., Powell D.J., Emami-Naeini A.: Feedback Control of Dynamic Systems, 5th edition, Pearson Prentice Hall, 2006.
7. Nasir A.N.K., Raja Ismail R.M.T., Ahmad M.A.: Performance Comparison between Sliding Mode Control (SMC) and PD-PID Controllers for a Nonlinear Inverted Pendulum System, World Academy of Science, Engineering and Technology, Vol. 46, pp. 358-363, 2010.

POSITION CHANGING OF INVERTED PENDULUM SYSTEM USING A SLIDING MODE CONTROL

Key-words: sliding mode control, LQR, inverted pendulum.

The paper presents sliding mode control, which was used to change the position of the cart in the inverted pendulum system. The plant of control is non-linear, with two degrees of freedom (the angle of the pendulum and the position of the cart) and one input (force applied to the cart). The task is to control the movement of the cart position to get along with his changes, balancing the pendulum rod in the upright position. The mathematical model of the object consists of four nonlinear equations of state. Sliding mode control is normally applied to the second-order systems, presented in the canonical form. Therefore, in the case of an inverted pendulum system, the decomposition of the problem was necessary and two-layer sliding mode control was applied. In the equivalent part of the control, two controllers were considered: linear quadratic regulator (LQR) and Proportional-Integral-Derivative (PID), which are commonly used to control dynamic processes. The resulting sliding mode control systems are robust to the influence of disturbance input. The results of simulation studies show the effectiveness of the work of the proposed structures of control systems.