

DOI 10.21008/j.1897-0737.2019.100.0010

Janusz KOWALSKI\*, Jakub PEKSIŃSKI\*\*, Grzegorz MIKOŁAJCZAK\*\*

## ZASTOSOWANIE METOD NUMERYCZNYCH W PROJEKTOWANIU GÓRNOPRZEPUSTOWYCH FILTRÓW CYFROWYCH 2D

W pracy przedstawiono metody projektowania dwuwymiarowych, filtrów górno-przepustowych bazujące na metodach numerycznych. Do wyznaczania współczynników filtru użyto: rozwinięcia w szereg Taylora funkcji dwóch zmiennych, metody współczynników nieoznaczonych oraz aproksymacji transmitancji filtru cyfrowego. Obliczone wartości współczynników wagowych masek filtrów są zgodne z prezentowanymi w literaturze przedmiotu. Przedstawiony materiał dydaktyczny może być wykorzystany na zajęciach z Metod Numerycznych do tworzenia wzorów przybliżonych a także z Cyfrowego Przetwarzania Sygnałów do projektowania filtrów 2D.

SŁOWA KLUCZOWE: filtry cyfrowe, metody numeryczne, przetwarzanie obrazów.

### 1. WSTĘP

Filtracja liniowa jest bardzo przydatna i często wykorzystywana w procesie cyfrowego przetwarzania. Wykorzystuje się ją do: usuwania szumów i zakłóceń z obrazu; zwiększenia ostrości obrazu; rekonstrukcji obrazu; eliminacji pewnych wad obrazu [1, 2].

Przy omawianiu filtracji linowej należy posłużyć się pojęciem funkcji splotu (konwolucji). Splot funkcji jest opisany następującym wzorem:

$$g(x) = (f \times h)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)h(t)dt \quad (1)$$

gdzie:  $f, h$  – splątane funkcje.

Jak wynika ze wzoru (1) splot jest zdefiniowany na całym obszarze zmiennej  $x$ , jednak funkcja  $h$  może mieć skończoną dziedzinę i wtedy splot wykorzystujący funkcję  $h$  realizuje proces filtracji [2]. W cyfrowym przetwarzaniu obrazu dziedzina jasności funkcji  $X(m,n)$  jest dwuwymiarowa i dyskretna. W takim przypadku wygodnie się jest posłużyć tzw. splotem dyskretnym opisanym zależnością:

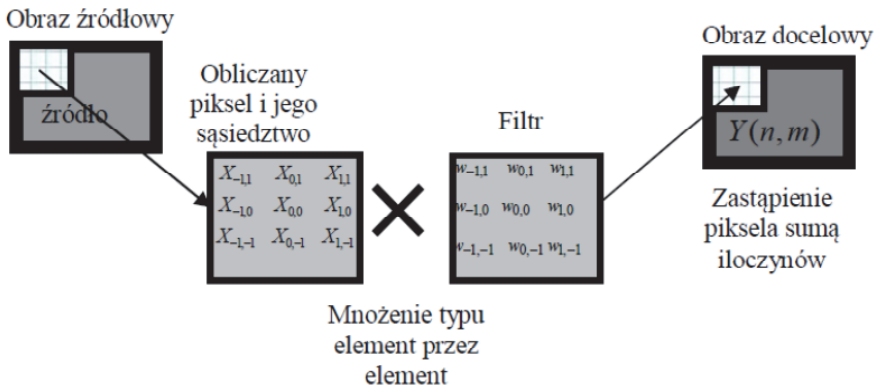
\* Pomorski Uniwersytet Medyczny w Szczecinie

\*\* Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie

$$Y(n, m) = \sum_{i, j \in k} X(n-i, m-j) w(i, j) \quad (2)$$

gdzie:  $k$  – otoczenie piksela;  $w(i, j)$  – wagi otoczenia  $k$  piksela  $(m, n)$ ;  $X(m, n)$  – jasność obrazu wejściowego.

Analizując zależność (2), wartość jasności nowego piksela  $Y(m, n)$  jest zależna od otaczających go pikseli przemnożonych przez odpowiednie wagi  $w(i, j)$ . Zatem filtr liniowy jest tablicą (maską) wartości współczynników  $w(i, j)$ .



Rys. 1. Graficzne przedstawienie splotu

Zgodnie z oznaczeniami z rys. 1 i wzorem (2) wartość jasności nowego piksela wynosi:

$$Y(n, m) = X_{-1,-1} \cdot w_{-1,-1} + X_{0,-1} \cdot w_{0,-1} + X_{1,-1} \cdot w_{1,-1} + \\ + X_{-1,0} \cdot w_{-1,0} + X_{0,0} \cdot w_{0,0} + X_{1,0} \cdot w_{1,0} + \\ + X_{-1,1} \cdot w_{-1,1} + X_{0,1} \cdot w_{0,1} + X_{1,1} \cdot w_{1,1} \quad (3)$$

Zatem możemy stwierdzić, że filtrem liniowym nazywamy zbiór wszystkich współczynników  $w(i, j)$  zebranych w tablicę zwaną maską filtru (jądrem). Wielkość maski może być dowolnie wybrana przez projektanta filtru, jednak najczęściej spotykanymi rozmiarami są maski  $3 \times 3$  i  $5 \times 5$ . Wartości współczynników  $w(i, j)$  maski filtru dobiera się zwykle tak, aby były one liczbami całkowitymi. Jest to związane z nakładem obliczeń (dla obrazu o rozmiarach  $640 \times 480$  pikseli i masce o rozmiarze  $3 \times 3$  należy wykonać aż 2764800 operacji arytmetycznych), dlatego nie jest obojętne, czy będą to operacje wykonywane na liczbach całkowitych czy ułamkowych. Dlatego w przypadku masek opartych na liczbach całkowitych po zakończeniu operacji filtracji należy dokonać operacji normalizacji. Dla współczynników maski filtru, w których jest spełniony warunek  $w(i, j) \geq 0$  stosuje się normalizację opisaną wzorem:

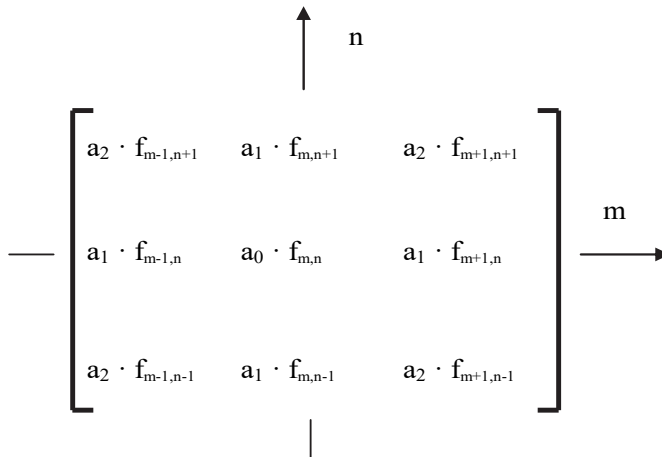
$$Y(n, m) = \frac{\sum_{i, j \in k} X(n-i, m-j)w(i, j)}{\sum_{i, j \in k} w(i, j)} \quad (4)$$

Istnieje wiele metod projektowania filtrów 2D lub inaczej mówiąc doboru współczynników wagowych  $w(i, j)$  maski filtru. Ich wybór decyduje o właściwościach filtru a tym samym zastosowaniu. Wśród sposobów projektowania można wyszczególnić: metoda korzystające z iloczynu wektorowego odpowiedzi impulsowych filtrów 1D, metoda okien czasowych oraz metoda częstotliwościowa [3]. Wymienione metody bazują na metodach projektowania filtrów 1D.

W pracy proponuje się by doboru współczynników wagowych, dokonać w oparciu o metody konstruowania wzorów przybliżonych, wykorzystywanych w metodach numerycznych [4]. Zagadnienie to polega na wyznaczeniu wielomianu o ustalonym stopniu, na podstawie siatki punktów.

## 2. FILTRY O ROZMIARZE 3x3

W tym rozdziale zostanie pokazany mechanizm projektowania masek filtrów górnoprzepustowych wykorzystujący metody numeryczne do konstruowania wzorów przybliżonych. W poszczególnych punktach przedstawione zostaną trzy metody rozwiązania tego zadania. Pierwsza bazująca na rozwinięciu w szereg Taylora funkcji dwóch zmiennych. Druga wykorzystująca transmitancję filtru dwuwymiarowego (2D). Natomiast jako trzecia zostanie rozpatrzona metoda współczynników nieoznaczonych [4].



Rys. 2. Maska filtru cyfrowego o rozmiarze 3x3

Na rys. 2 pokazano maskę filtru o rozmiarach  $3 \times 3$ , zgodnie z oznaczeniami, operacja filtracji opisana jest zależnością:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{0,0} = & a_0 \cdot f_{0,0} + a_1(f_{1,0} + f_{0,1} + f_{-1,0} + f_{0,-1}) + \dots \\ & \dots + a_2(f_{1,1} + f_{-1,-1} + f_{1,-1} + f_{-1,1}) \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie:  $f_{i,j}$  ( $i=-1,0,1; j=-1,0,1$ ) - wartość sygnału podlegającego filtracji.

Jak wynika z rys. 2 oraz wzoru (5), aby zaprojektować maskę filtru, należy wyznaczyć współczynniki  $a_0, a_1, a_2$ .

## 2.1. Rozwinięcie funkcji w szereg Taylora

Pierwszą metodą jest metoda bazująca na rozwinięciu w szereg Taylora funkcji dwóch zmiennych, który możemy przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) = & f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} k + \dots \\ & \dots + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} k^2 \right) + \dots \\ & \dots + \frac{1}{3!} \left( \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^3} h^3 + 3 \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^2 \partial y} h^2 k + 3 \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x \partial y^2} h k^2 + \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial y^3} k^3 \right) + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Zakłada się, że  $x = y = 0, h = k = 1$  oraz wprowadza oznaczenia:  $f_{0,0} = f(0,0)$ ;

$$\left. \frac{\partial^k f(x, y)}{\partial x^k} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \frac{\partial^k f_{0,0}}{\partial x^k}$$

Wzór (6) przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} f_{i,j} = & f_{0,0} + i \frac{\partial f_{0,0}}{\partial x} + j \frac{\partial f_{0,0}}{\partial y} + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 f_{0,0}}{\partial x^2} i^2 + 2 \frac{\partial^2 f_{0,0}}{\partial x \partial y} ij + \frac{\partial^2 f_{0,0}}{\partial y^2} j^2 \right) + \dots \\ & \dots + \frac{1}{3!} \left( \frac{\partial^3 f_{0,0}}{\partial x^3} i^3 + 3 \frac{\partial^3 f_{0,0}}{\partial x^2 \partial y} i^2 j + 3 \frac{\partial^3 f_{0,0}}{\partial x \partial y^2} ij^2 + \frac{\partial^3 f_{0,0}}{\partial y^3} j^3 \right) + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Ze wzorów (5) i (7) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \bar{f} = & (a_0 + 4a_1 + 4a_2) f_{0,0} + \dots \\ & \dots + (a_1 + 2a_2) \cdot \left[ \frac{\partial^2 f_{0,0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{0,0}}{\partial y^2} + \frac{1}{12} \left( \frac{\partial^4 f_{0,0}}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f_{0,0}}{\partial y^4} \right) \right] + a_2 \frac{\partial^4 f_{0,0}}{\partial x^4 \partial y^4} \end{aligned} \quad (8)$$

Z warunku wyzerowania sygnału oraz jego pochodnych otrzymujemy na podstawie równania (8), następujący układ równań:

$$\begin{cases} a_0 + 4a_1 + 4a_2 = 0 \\ a_1 + 2a_2 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Jest to układ jednorodny, który dla  $a_0 = a_1 = a_2 = 0$  posiada rozwiązanie zerowe. Chcąc uzyskać rozwiązanie inne niż zero należy ograniczyć się tylko do układu składającego się z dwóch równań a jeden z parametrów ustalić arbitralnie.

Pierwsze równanie z układu (9) musi pozostać, gdyż zapewnia zerowanie składowej stałej sygnału czyli należy pominąć drugie lub trzecie równanie. Wykonując to otrzymujemy dwa układy równań:

$$\begin{cases} a_0 + 4a_1 + 4a_2 = 0 \\ a_1 + 2a_2 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

oraz:

$$\begin{cases} a_0 + 4a_1 + 4a_2 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Przyjmując w układzie równań (10) wartość współczynnika  $a_1 = 2$  otrzymujemy filtr górnoprzepustowy o masce:

$$M1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Jeżeli w układzie równań (11) przyjmiemy wartość współczynnika  $a_1 = 1$  to otrzymamy następującą maskę filtru:

$$M2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Jak można zauważyć, jest to filtr górnoprzepustowy tzw. Laplace'a, którego zadaniem jest wykrywanie krawędzi [1].

## 2.2. Transmitancja filtru cyfrowego

Drugą metodą jest metoda polegająca na wykorzystaniu transmitancji filtru cyfrowego. W przypadku filtru cyfrowego (5), transmitancja jest opisana następującym wzorem:

$$\begin{aligned} H(z_1, z_2) = & a_0 + a_1(z_1 + z_2 + z_1^{-1} + z_2^{-1}) + \\ & + a_2(z_1 z_2 + z_1^{-1} z_2^{-1} + z_1 z_2^{-1} + z_1^{-1} z_2) \end{aligned} \quad (14)$$

Podstawiając za  $z_1 = e^{j\omega_1}$  i  $z_2 = e^{j\omega_2}$  otrzymamy zależność opisującą charakterystykę częstotliwościową tego filtru:

$$H(\omega_1, \omega_2) = a_0 + 2a_1(\cos(\omega_1) + \cos(\omega_2)) + 4a_2 \cos(\omega_1) \cos(\omega_2) \quad (15)$$

Wartości współczynników  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  wyznacza się z warunku maksymalnie płaskiej charakterystyki w punkcie  $\omega_1 = 0$  i  $\omega_2 = 0$ :

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) \Big|_{\substack{\omega_1=0 \\ \omega_2=0}} &= 0 \\ \frac{\delta^2 H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})}{\delta\omega_1^2} \Big|_{\substack{\omega_1=0 \\ \omega_2=0}} &= 0 \\ \frac{\delta^4 H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})}{\delta\omega_1^2 \delta\omega_2^2} \Big|_{\substack{\omega_1=0 \\ \omega_2=0}} &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Ze wzorów (14) i (15) otrzymuje się układ równań (9). Można zauważyć, że ta metoda jest znacznie mniej złożona obliczeniowo niż metoda polegająca na rozwinięciu w szereg Taylora.

Do podobnych wyników można dojść w inny sposób. Zakładając, że poszukiwane współczynniki filtra (5) mają aproksymować charakterystykę amplitudową o zadanej transmitancji, należy rozwinąć w szereg potęgowy zależność (15). Otrzymamy wówczas:

$$\begin{aligned} H(\omega_1, \omega_2) &\approx a_0 + 4a_1 + 4a_2 - \omega_1^2(a_1 + 2a_2) - \omega_2^2(a_1 + 2a_2) + \dots \\ &\dots + \frac{\omega_1^4}{12}(a_1 + 2a_2) + \frac{\omega_2^4}{12}(a_1 + 2a_2) + \omega_1^2\omega_2^2 a_2 + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Porównując powyższą zależność z transmitancją idealnego operatora Laplace'a, dla przyjętej siatki węzłów (rys.2), która wyraża się wzorem:

$$HL(\omega_1, \omega_2) = -(\omega_1^2 + \omega_2^2) \quad (18)$$

Korzystając z kryterium zgodności transmitancji (9) i transmitancji idealnej (18), możemy wyznaczyć następujące związki między poszczególnymi współczynnikami  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ :

$$\begin{cases} a_0 + 4a_1 + 4a_2 = 0 \\ a_1 + 2a_2 = 1 \end{cases} \quad (19)$$

Przyjmując wartość  $a_1 = 1$  otrzymamy wartości pozostałych współczynników:  $a_0 = -4$  i  $a_2 = 0$ . Jak można zauważyć otrzymamy filtr Laplace'a bazujący na pięciu punktach opisany równaniem (13).

### 2.3. Metoda współczynników nieoznaczonych

Trzecia metoda jest wykorzystuje metodę współczynników nieoznaczonych przedstawioną w [4]. Polega ona na podstawieniu do wzoru (5) funkcji testujących postaci:  $f(x,y) = 1$ ,  $f(x,y) = x^2$  (lub  $f(x,y) = y^2$ ),  $f(x,y) = x^2 y^2$  przy czym  $f_{0,0}$

przyjmuje wartość równą 0. O wyborze funkcji testujących tego typu w tym przypadku decyduje symetria poszukiwanego rozwiązania. Wartości funkcji testujących otrzymujemy podstawiając współrzędne maski filtru (5):

$$\begin{aligned}
 f(x, y) \equiv 1 &\Rightarrow f_{0,0} = 1, f_{1,0} = 1, f_{-1,0} = 1, f_{0,1} = 1, f_{0,-1} = 1, \\
 &\quad f_{-1,1} = 1, f_{1,1} = 1, f_{-1,-1} = 1, f_{1,-1} = 1 \\
 f(x, y) \equiv x^2 &\Rightarrow f_{0,0} = 0^2, f_{1,0} = 1^2, f_{-1,0} = (-1)^2, f_{0,1} = 0, f_{0,-1} = 0, \\
 &\quad f_{-1,1} = 1, f_{1,1} = 1, f_{-1,-1} = 1, f_{1,-1} = 1 \\
 f(x, y) \equiv x^2 y^2 &\Rightarrow f_{0,0} = 0^2 \cdot 0^2, f_{1,0} = 1^2 \cdot 0^2, f_{-1,0} = (-1)^2 \cdot 0^2 \\
 &\quad f_{0,1} = 0, f_{0,-1} = 0, f_{-1,1} = 1, f_{1,1} = 1, f_{-1,-1} = 1, f_{1,-1} = 1
 \end{aligned} \tag{21}$$

Podstawiając otrzymane wartości do równania (5) otrzymamy układ równań (22), który jest tożsamy z (9), natomiast został utworzony przy najmniejszym koszcie obliczeniowym.

$$\begin{cases} a_0 + 4a_1 + 4a_2 = 0 \\ 2a_1 + 4a_2 = 0 \\ 4a_2 = 0 \end{cases} \tag{22}$$

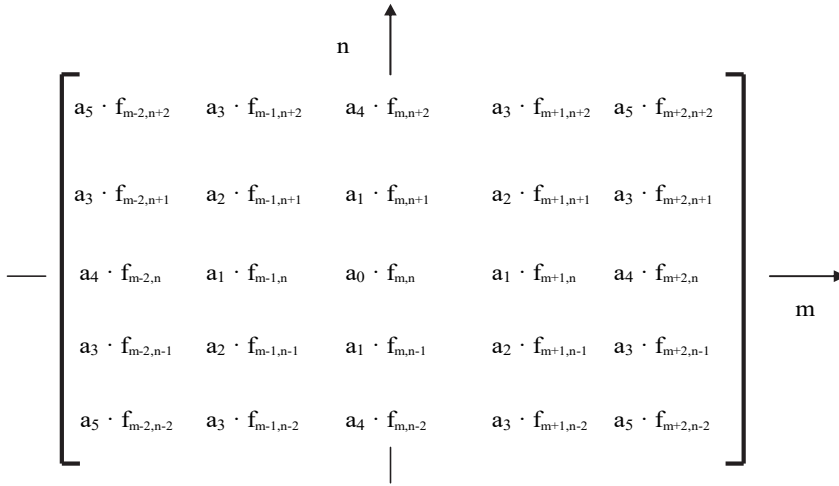
Jeżeli w powyższym układzie równań wykreślimy równanie drugie i trzecie oraz przyjmiemy, że  $a_1 = a_2 = 1$  to otrzymamy filtr o masce:

$$M3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

Prezentowane w pracy rozwiązania filtrów (12), (13), (23), są zgodne z filtrami prezentowanymi w literaturze np.[3]. Autorzy starali się tak dobrać wartości parametrów aby pokazać zgodność wyników. W rozdziale następnym prezentowane są filtry o większych rozmiarach maski.

### 3. FILTRY O WIĘKSZYCH ROZMIARACH MASKI

W rozdziale tym przedstawione zostaną maski filtrów o rozmiarze 5x5, których wagi wyznaczono korzystając z metody współczynników nieoznaczonych. Wykorzystano tę metodę, gdyż jak wspomniano w poprzednim rozdziale nakład obliczeń jest najmniejszy.



Rys. 3. Maska filtru cyfrowego o rozmiarze 5x5

Na rys. 3 pokazano maskę filtru o rozmiarach 5x5. Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami, operacja filtracji opisana jest zależnością:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{0,0} = & a_0 \cdot f_{0,0} + a_1(f_{1,0} + f_{0,1} + f_{-1,0} + f_{0,-1}) + a_2(f_{1,1} + f_{-1,-1} + f_{1,-1} + f_{-1,1}) + \dots \\ & \dots + a_3(f_{1,2} + f_{1,-2} + f_{-1,2} + f_{-1,-2} + f_{2,1} + f_{2,-1} + f_{-2,1} + f_{-2,-1}) + \dots \\ & \dots + a_4(f_{0,2} + f_{0,-2} + f_{2,0} + f_{-2,0}) + a_5(f_{2,2} + f_{-2,-2} + f_{2,-2} + f_{-2,2}) \end{aligned} \quad (24)$$

gdzie:  $f_{i,j}$  ( $i = -2, -1, 0, 1, 2; j = -2, -1, 0, 1, 2$ ) – wartość sygnału podlegającego filtracji.

Do wyznaczenia wartości wag filtru (24) wykorzystano funkcje testujące postaci:  $f(x,y) = 1$ ,  $f(x,y) = x^2$  (lub  $f(x,y) = y^2$ ),  $f(x,y) = x^2y^2$ ,  $f(x,y) = x^4$  (lub  $f(x,y) = y^4$ ),  $f(x,y) = x^2y^4$  (lub  $f(x,y) = x^4y^2$ ),  $f(x,y) = x^4y^4$ . Pominięto  $f(x,y) = x^6$  (lub  $f(x,y) = y^6$ ), gdyż otrzymany układ równań nie posiada rozwiązań. Dla przyjętych funkcji testujących, stosując metodę współczynników nieoznaczonych, otrzymuje się następujący układ równań:

$$\begin{aligned} f(x,y) \equiv 1 & \Rightarrow a_0 + 4a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 4a_4 + 4a_5 = 0 \\ f(x,y) \equiv x^2 & \Rightarrow a_1 + 2a_2 + 10a_3 + 4a_4 + 8a_5 = 0 \\ f(x,y) \equiv x^2y^2 & \Rightarrow a_2 + 8a_3 + 16a_5 = 0 \\ f(x,y) \equiv x^4 & \Rightarrow a_1 + 2a_2 + 34a_3 + 16a_4 + 32a_5 = 0 \\ f(x,y) \equiv x^2y^4 & \Rightarrow a_2 + 68a_3 + 256a_5 = 0 \\ f(x,y) \equiv x^4y^4 & \Rightarrow a_2 + 32a_3 + 256a_5 = 0 \end{aligned} \quad (25)$$



Z powyższego układu równań, po wykreśleniu ostatniego równania i przyjęciu, że  $a_5 = 1$ , otrzymamy następujące rozwiązanie  $a_0 = 36$ ,  $a_1 = -24$ ,  $a_2 = 16$ ,  $a_3 = -4$ ,  $a_4 = 6$ , które możemy przedstawić w postaci maski M4 filtru:

$$M4 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ -4 & 16 & -24 & 16 & -4 \\ 6 & -24 & 36 & -24 & 6 \\ -4 & 16 & -24 & 16 & -4 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Natomiast w przypadku wykreślenia równania:  $a_2 + 68a_3 + 256a_5 = 0$ , z układu równań (25) i podstawieniu za  $a_5 = 1$  otrzymamy poniższą maskę filtru M5:

$$M5 = \begin{bmatrix} 1 & -10 & 18 & -10 & 1 \\ -10 & 64 & -108 & 64 & -10 \\ 18 & -108 & 180 & -108 & 18 \\ -10 & 64 & -108 & 64 & -10 \\ 1 & -10 & 18 & -10 & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Chcąc uzyskać filtr o jeszcze większym rozmiarze maski np.  $7 \times 7$ , należy tak jak poprzednio określić położenie współczynników maski filtru, a następnie ułożyć równania wynikające z przyjęcia określonych funkcji testujących. Jeżeli zastosujemy podobne, jak w poprzednich przykładach, funkcje testujące możemy dojść do filtru o wartościach współczynników podanych poniżej:

$$M6 = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 15 & -20 & 15 & -6 & 1 \\ -6 & 36 & -90 & 120 & -90 & 36 & -6 \\ 15 & -90 & 225 & -300 & 225 & -90 & 15 \\ -20 & 120 & -300 & 400 & -300 & 120 & -20 \\ 15 & -90 & 225 & -300 & 225 & -90 & 15 \\ -6 & 36 & -90 & 120 & -90 & 35 & -6 \\ 1 & -6 & 15 & -20 & 15 & -6 & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Oczywiście to nie jest jedyne rozwiązanie postawionego zadania. Stawiając dodatkowe ograniczenia można uzyskać całkiem różne wyniki.

## PODSUMOWANIE

Przedstawione metody projektowania cyfrowych filtrów 2D, wykorzystujące znane z technik numerycznych algorytmy, są gotowymi przykładami do wykorzystania w przedmiocie Cyfrowego Przetwarzania Sygnałów (CPS). Przedsta-

wiają inne podejście do rozwiązania doboru współczynników wagowych masek filtrów dwuwymiarowych, które również prowadzą do typowych filtrów prezentowanych w literaturze przedmiotu.

## LITERATURA

- [1] Pratt W.K., Digital Image Processing Third Edition, New York Wiley 2001.
- [2] Tadeusiewicz R., Kohoroda P., Komputerowa Analiza i Przetwarzanie Obrazów, Wydawnictwo Fundacji i Rozwoju Telekomunikacji, Kraków 1997.
- [3] Zieliński T.P., Cyfrowe Przetwarzanie Sygnałów Od teorii do zastosowań, WKŁ Warszawa 2005.
- [4] Dahlquist G., Björck A., Metody Numeryczne, PWN, Warszawa, 1983.

### APPLICATION OF NUMERICAL METHODS IN THE DESIGN OF HIGH-PASS DIGITAL 2D FILTERS

The paper presents two-dimensional design methods, high-pass filters based on numerical methods. To determine the filter coefficients, we used: to develop the function of two variables in the Taylor series, the methods of indeterminate coefficients and approximation of the digital filter transmittance. The calculated values of weight coefficients of filter masks are consistent with those presented in the literature on the subject. Presented didactic material can be used in classes from Numerical Methods to create approximate patterns as well as from Digital Signal Processing for designing 2D filters.

*(Received: 25.01.2019, revised: 04.03.2019)*