

# **Metoda wielostrzałowa w analizie stateczności niepryzmatycznych słupów wielosegmentowych**

**Ryszard Hołubowski<sup>1</sup>, Andrzej Merena<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> *Instytut Inżynierii Lądowej, Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego, Politechnika Wrocławska, e-mail: ryszard.holubowski@pwr.wroc.pl*

<sup>2</sup> *Biuro projektowe AQ7 sp. z o.o., e-mail: andrzej.merena@o2.pl*

**Streszczenie:** W pracy omówiono zastosowanie metody wielostrzałowej pod kątem użycia jej do analizy stateczności niepryzmatycznych słupów przegubowo-przegubowych o skokowo zmiennej sztywności, obciążonych siłą skupioną przyłożoną do górnego węzła. Przedstawiono wyniki analiz numerycznych dla przykładowego trzysegmentowego słupa, rozwiązując układ równań różniczkowych o zmiennych współczynnikach z parametrem. Otrzymane wyniki porównano z rozwiązaniem uzyskanym za pomocą programu SOFiSTiK bazującego na metodzie elementów skończonych. Z przeprowadzonych analiz wynika, że uwzględnienie zmian sztywności na długości może w istotny sposób wpłynąć na wartości obciążeń krytycznych i w konsekwencji zmienić nośność słupa. Zaletą zaproponowanej metody jest jej wysoka efektywność oraz łatwość opisu zmian sztywności.

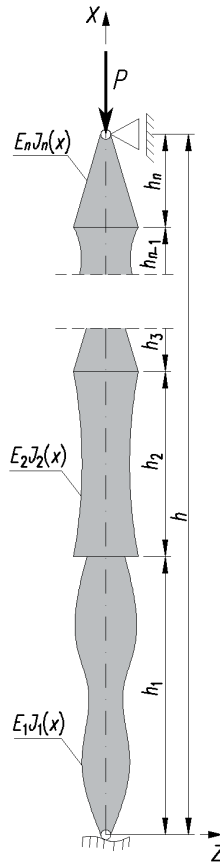
**Słowa kluczowe:** analiza stateczności, niepryzmatyczne słupy wielosegmentowe, metoda strzałów.

## **1. Wprowadzenie**

Współczesne tendencje projektowe do poszukiwania oryginalnych form architektonicznych w połączeniu z nowoczesnymi metodami wytwarzania powodują, iż konstrukcje przybierają coraz to bardziej wyszukane kształty. Również materiał nie jest ograniczeniem, a wręcz stosuje się różne jego kombinacje, tworząc elementy hybrydowe. Czynniki te komplikują niekiedy projektowanie, utrudniając racjonalne wymiarowanie konstrukcji. Problemów nastrocza określenie realnych wartości współczynników długości wyboeczeniowej i zwichrzeniowej.

Trudności w uzyskaniu ścisłych rozwiązań wymuszają korzystanie z metod przybliżonych. Powszechnie w rozwiązaniach zagadnień stateczności wykorzystuje się metodę elementów skończonych, która w przypadku wielosegmentowego pręta o silnie zmieniającym się na długości przekroju poprzecznym, wymusza gęsty podział na elementy skończone. W pracy zaproponowano alternatywne podejście bazujące na rozwiązaniu układu równań różniczkowych osi odkształconej pręta z wykorzystaniem metody wielostrzałowej. Umożliwia ona rozwiązywanie układów zwyczajnych równań różniczkowych na drodze numerycznego całkowania. Jej dobra efektywność pozwala na analizowanie szerokiego zakresu problemów spotykanych w budownictwie. Pai i Palazotto [1], analizując duże przemieszczenia elastycznych belek, wykorzystali metodę wielostrzałową, podając rozwiązania statyczne dla różnych warunków podparcia i obciążenia. Uproszczoną wersję metody strzałów

zastosował Chen [2] do rozwiązania równania różniczkowego opisującego drgania własne ściskanego pręta niepryzmatycznego. Li i Zhou [3] zastosowali metodę strzałów do analizy nieliniowych drgań kołowych płyt ortotropowych. Ribeiro [4] opisał drgania wymuszone harmonicznymi belek i płyt z uwzględnieniem nieliniowości geometrycznych. Ibrahim i in. [5] zaproponowali zmodyfikowaną metodę strzałów do wyznaczenia odpowiedzi dynamicznych izotropowych i kompozytowych belek zakrzywionych wzbudzanych okresowo zmienną siłą skupioną. W pracy [6] Glabisz przedstawił rozwiązania problemu stateczności oraz drgań własnych prętów niepryzmatycznych za pomocą metody jednostrzałowej z wykorzystaniem programu Mathematica. Razem z Hołubowskim w [7] opisał wpływ wypukłości niepryzmatycznych słupów drewnianych na wartości obciążeń krytycznych i ich nośności.



Rys. 1. Schemat analizowanych słupów.

## 2. Sformułowanie problemu

Omawiane w artykule słupy (rys. 1) przeanalizowano jako podparte obustronnie przegubowo, zakładając, w ogólnym przypadku, dowolną liczbę segmentów, z których każdy może być wykonany z innego materiału (stal, aluminium, drewno, żelbet). Poszczególne części słupa mogą się łączyć ze sobą w sposób ciągły lub skokowy, a moment bezwładności każdej z nich opisany jest dowolną funkcją

ciągłą zależną od zmiennej geometrycznej  $x$ . Założono, że oś podłużna pręta przebiega przez środki ciężkości przekrojów poprzecznych. Obciążenie stanowi pionowa siła skupiona przyłożona osiowo do górnego węzła słupa. Przyjęto, że kierunek tej siły pozostaje pionowy również po wyboczeniu się słupa. Ze względu na niewielki wpływ na wartość siły krytycznej, ciężar własny pominięto.

### 3. Analiza stateczności z wykorzystaniem metody wielostrzałowej

Równania różniczkowe opisujące oś odkształconą słupa w poszczególnych segmentach mają następującą postać [8]

$$\begin{aligned} E_1 I_1(x) z_1''(x) + P z_1(x) &= 0, \quad \text{dla } x \in [x_1, x_2] \\ E_2 I_2(x) z_2''(x) + P z_2(x) &= 0, \quad \text{dla } x \in [x_2, x_3] \\ &\dots \\ E_n I_n(x) z_n''(x) + P z_n(x) &= 0, \quad \text{dla } x \in [x_n, x_{n+1}] \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie  $n$  jest liczbą segmentów,  $E_n$  modułem Younga,  $I_n(x)$  funkcją opisującą przebieg zmienności momentu bezwładności na długości segmentu, zaś  $P$  siłą ściskającą. Ciągłość słupa w punktach styku segmentów zapewniają warunki

$$\begin{aligned} z_1(x_2) &= z_2(x_2) \quad \text{oraz} \quad z_1'(x_2) = z_2'(x_2), \\ z_2(x_3) &= z_3(x_3) \quad \text{oraz} \quad z_2'(x_3) = z_3'(x_3), \\ &\dots \\ z_{n-1}(x_n) &= z_n(x_n) \quad \text{oraz} \quad z_{n-1}'(x_n) = z_n'(x_n). \end{aligned} \quad (2)$$

W zagadnieniach stateczności warunki brzegowe wynikające ze sposobu podparcia pręta, są zwykle określone w różnych punktach dziedziny rozwiązania, co uniemożliwia bezpośrednie numeryczne całkowanie równań (1). Podobna sytuacja występuje w przypadku analizowanego przegubowo-przegubowego słupa pokazanego na rys. 1, dla którego możemy zapisać dwa warunki kinematyczne

$$z_1(0) = 0 \quad (3.1)$$

$$z_n(h) = 0 \quad (3.2)$$

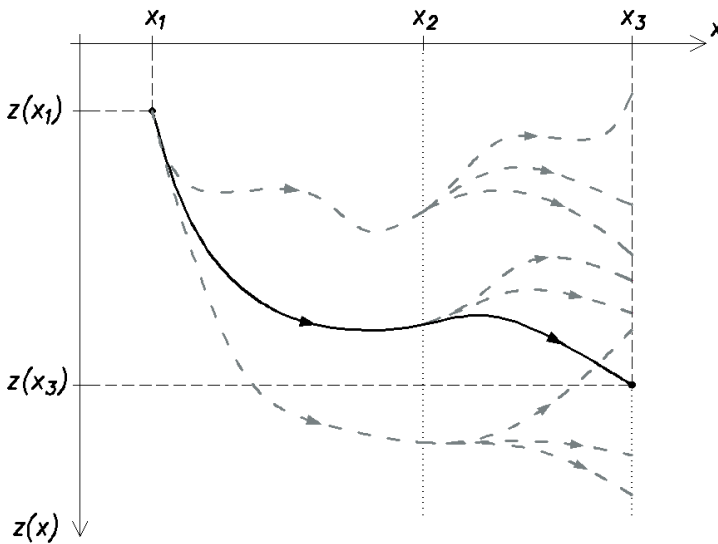
określone w dwóch różnych punktach – w węźle początkowym i końcowym słupa. Aby umożliwić rozpoczęcie procedury numerycznego całkowania przyjęto, że kąt obrotu słupa u jego podstawy jest znany i wynosi

$$z_1'(0) = 1 \quad (4)$$

Założenie to w żaden sposób nie wpływa na wartość siły krytycznej, stanowi jedynie pewną szczególną normalizację postaci wybożenia. Uzyskanie nietrywialnego rozwiązania któregośkolwiek z równań (1) przy jednoczesnym zachowa-

niu warunków ciągłości (2) jest równoznaczne z wybočeniem się słupa lub jego części. Formę utraty stateczności opisuje zbiór funkcji  $z_1(x)$ ,  $z_2(x)$ , ...,  $z_n(x)$ . Niezerowe rozwiązania równań (1) można uzyskać wykorzystując wielostrzałową wersję metody strzałów.

Idea metody strzałów [6], [9], [10] polega na zastąpieniu zagadnienia brzegowego przez zagadnienie początkowe. W analizowanym przypadku, po wprowadzeniu warunku normalizacji, zagadnienie początkowe opisują warunki (3.1) i (4). Procedura poszukiwania obciążenia krytycznego (pierwszego i kolejnych) będzie zatem polegać na takim doborze wartości siły  $P$ , aby spełniony był warunek (3.2). Ponieważ funkcja opisująca sztywność giętną słupa nie jest ciągła na długości rozpatrywanego przedziału całkowania, wyodrębniono podprzedziały o długościach odpowiadających długościom segmentów słupa, w których moment bezwładności zmienia się w sposób ciągły. Następnie wyznaczono szereg rozwiązań równań różniczkowych (1) – strzałów – dla różnych wartości parametru  $P$  w obrębie każdego z podprzedziałów, zachowując jednocześnie warunki ciągłości (2) na granicach. Wartości współczynnika  $P$ , dla których spełniony jest warunek (3.2), są poszukiwanymi obciążeniami krytycznymi. Opisany schemat procedury wyznaczania sił krytycznych zilustrowano na rys. 2, gdzie liniami przerywanymi oznaczono nieudane – z uwagi na niespełnienie warunku końcowego – próby doboru parametru  $P$ .



Rys. 2. Graficzna interpretacja metody wielostrzałowej.

#### 4. Analizy numeryczne

Za obiekt badań posłuży trzysegmentowy, przegubowo-przegubowy słup pokazany na rys. 3 obciążony siłą skupioną przyłożoną do górnego węzła. Zmienny na wysokości przekrój poprzeczny słupa jest kołowy. Funkcje opisujące zmiany promienia w dolnym i górnym segmencie są wielomianami czwartego stopnia, natomiast segment środkowy jest pryzmatyczny. Przyjęto, że cały słup jest wykonany z drewna klasy C22, zatem moduł sprężystości w każdym segmencie jest stały i zgodnie z postanowieniami norm PN-EN 1995-1-1:2010 [11] i PN-EN 338:2011

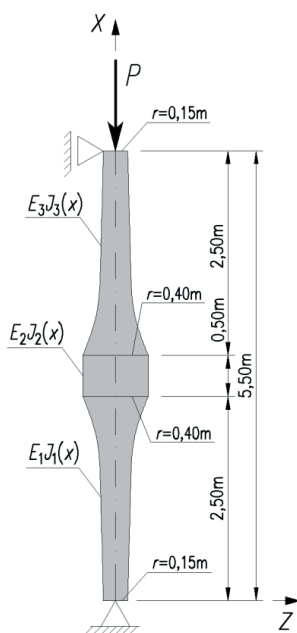
[12] wynosi  $E_{0,05} = 6,7$  GPa. Biorąc pod uwagę, że moment bezwładności przekroju kołowego jest określony wzorem:  $I(x) = \pi r^4(x)/4$ , funkcje opisujące przebieg zmian sztywności giętej w skrajnych segmentach są wielomianami szesnastego stopnia, natomiast w strefie centralnej sztywność słupa jest stała

$$E_1 I_1(x) = 1675\pi (0,1500 - 0,0155x + 0,1161x^2 - 0,1071x^3 + 0,0317x^4)^4 \text{ [MNm}^2\text{]}$$

$$E_2 I_2(x) = 134,7115 \text{ [MNm}^2\text{]} \quad (5)$$

$$E_3 I_3(x) = 1675\pi (14,7283 - 12,6125x + 4,0957x^2 - 0,5895x^3 + 0,0317x^4)^4 \text{ [MNm}^2\text{]}$$

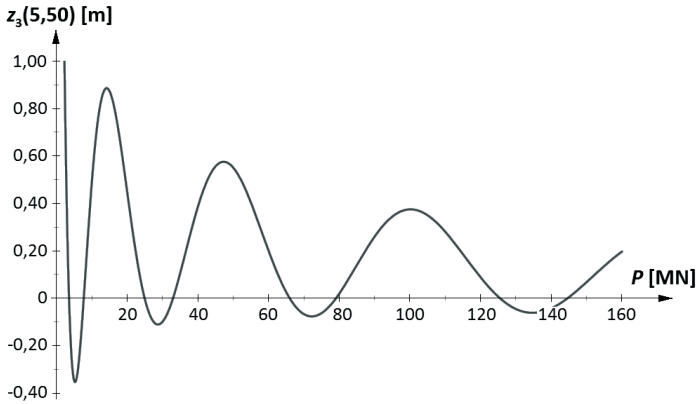
Po podstawieniu relacji (5) do równań (1) i uwzględnieniu warunków ciągłości w punktach styku segmentów (2) oraz warunków brzegowych (3.1) i (3.2) wynikających ze sposobu podparcia słupa, otrzymuje się układ trzech równań różniczkowych o zmiennych współczynnikach z parametrem  $P$ . Wartości parametru  $P$ , będące kolejnymi poziomami obciążeń krytycznych, wyznaczono na podstawie sformułowanego w poprzednim punkcie algorytmu metody wielostrzałowej, przy czym numeryczne całkowanie równań różniczkowych przeprowadzono za pomocą programu Mathematica.



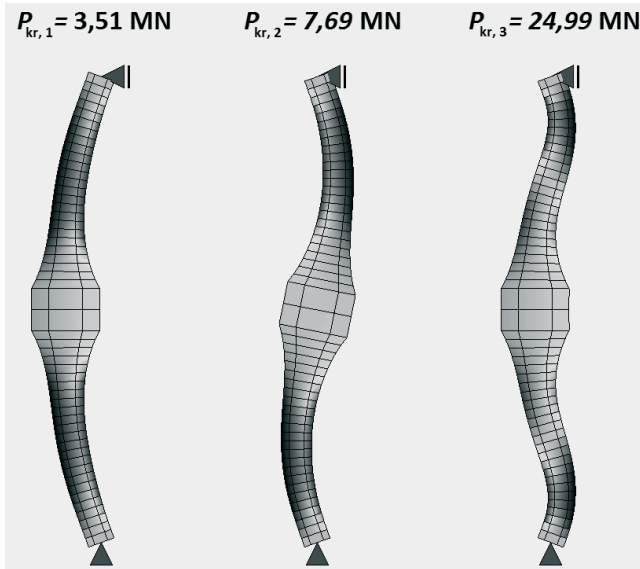
Rys. 3. Schemat statyczny rozpatrywanego słupa.

Na rys. 4 przedstawiono wykres funkcji  $z_3(x = 5,50\text{ m})$  zależnej od parametru  $P$ , opisującej przemieszczenie górnego węzła słupa w miejscu jego podparcia. Ponieważ, zgodnie z warunkiem (3.2), przemieszczenie w tym punkcie musi być równe zero, dlatego też pierwiastki funkcji  $z_3(x = 5,50\text{ m})$  są poszukiwanymi wartościami obciążeń krytycznych. Przebieg funkcji  $z_3(x = 5,50\text{ m})$  ma charakter zanikający z pulsacją, co powoduje, że przyrosty kolejnych sił krytycznych są coraz to większe, przy czym

przesunięcie wykresu ku górze sprawia, że dwie kolejne wartości obciążeń krytycznych są zbliżone. W tab. 1 zestawiono osiem pierwszych sił krytycznych analizowanego słupa, podając w kolumnie 3 wartości obliczone za pomocą programu SOFiSTiK, bazującego na metodzie elementów skończonych. Błąd względny pomiędzy uzyskanymi wynikami nie przekracza 0,5%. Tak dobrą zbieżność obu rozwiązań otrzymano dopiero przy podziale słupa na 52 płaskie, prętowe elementy skończone o trzech stopniach swobody w węźle. Czas obliczeń w obu modelach jest zbliżony i wynosi kilka sekund. Na rys. 5 pokazano trzy pierwsze formy utraty stateczności analizowanego słupa, o kształcie zbliżonym do postaci wyboczeń przegubowo-przegubowego pręta pryzmatycznego. Zwiększenie sztywności słupa w strefie centralnej, skutkuje znacznym (w przypadku pierwszej postaci ponad czterokrotnym) zwiększeniem wartości obciążenia krytycznego, w stosunku do pręta o stałym promieniu przekroju poprzecznego  $r = 0,15$  m, stanowiącego rdzeń analizowanego słupa – patrz tab. 1.



Rys. 4. Wykres funkcji przedstawiającej punkty trafień ostatniej serii strzałów.



Rys. 5. Trzy pierwsze postaci wyboczenia i odpowiadające im siły krytyczne.

Tabela 1. Wartości sił krytycznych w [MN].

Nr	Rozpatrywany słupek		Rdzeń słupa
	$P_{kr}^{\text{Mathematica}}$	$P_{kr}^{\text{SOFiSTiK}}$	$P_{kr}$
1	3,498	3,510	0,869
2	7,675	7,686	3,477
3	24,901	24,994	7,823
4	32,944	33,043	13,907
5	65,972	66,222	21,729
6	79,099	79,360	31,290
7	125,504	125,981	42,589
8	144,663	145,181	55,627

## 5. Wnioski

Zaproponowana wielostrzałowa metoda analizy stateczności prętów niepryzmatycznych o skokowo zmiennej sztywności pozwala wyznaczać wartości obciążeń krytycznych dowolnie ukształtowanych słupów przegubowo-przegubowych, obciążonych siłą skupioną przyłożoną do górnego węzła. W rozważanym przykładzie przyjęto, że cały słupek wykonany jest z tego samego materiału, lecz przedstawiona metoda umożliwia efektywne badanie znacznie bardziej złożonych przypadków, gdy nie tylko moment bezwładności, ale także moduł sprężystości zmienia się w sposób funkcyjny w obrębie poszczególnych segmentów. Z przeprowadzonych analiz numerycznych wynika, że uwzględnienie zmian sztywności na długości może w istotny sposób wpłynąć na wartość siły krytycznej, co w konsekwencji może zwiększyć nośność słupa [7]. Bardzo dobra zgodność otrzymanych wyników z wartościami uzyskanymi w programie SOFiSTiK potwierdza poprawność sformułowanego algorytmu. Zaletą metody wielostrzałowej, w stosunku do powszechnie stosowanej metody elementów skończonych, jest łatwość opisu zmian sztywności oraz uniknięcie konieczności gęstego podziału układu na elementy, niezbędnego w przypadku, gdy funkcja określająca przebieg zmian sztywności jest szybkozmienna. Możliwe jest również wykorzystanie metody strzałów do rozwiązywania zagadnień stateczności słupów o innych, niż przyjęto w przykładzie, warunkach podparcia, co pokazano w pracy [6].

## Literatura

- [1] Pai P.F., Palazotto A.N. *Large-deformation analysis of flexible beams*. International Journal of Solids and Structures 33(9) (1996) 1335-1353.
- [2] Chen R.S. *Evaluation of natural vibration frequency of a compression bar with varying cross-section by using the shooting method*. Journal of Sound and Vibration 201(4) (1997) 520-527.
- [3] Li S.R., Zhou Y.H. *Shooting method for non-linear vibration and thermal buckling of heated orthotropic circular plates*. Journal of Sound and Vibration 248(2) (2001) 379-386.
- [4] Ribeiro P. *Non-linear forced vibrations of thin/thick beams and plates by the finite element and shooting methods*. Computers and Structures 82 (2004) 1413-1423.
- [5] Ibrahim S.M., Patel B.P., Nath Y. *Modified shooting approach to the non-linear periodic forced response of isotropic/composite curved beams*. International Journal of Non-Linear Mechanics 44 (2009) 1073-1084.

- [6] Glabisz W. *Mathematica w zagadnieniach mechaniki konstrukcji*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2003.
- [7] Hołubowski R., Glabisz W. *Analiza stateczności drewnianych niepryzmatycznych słupów o przekroju kołowym*. Inżynieria i Budownictwo 10 (2012) 549-551.
- [8] Życzkowski M. *Stateczność prętów i ustrojów prętowych*, w: *Mechanika techniczna t. 9. Wytrzymałość elementów konstrukcyjnych*. (red. Życzkowski M.) PWN, Warszawa 1988, s. 242-368.
- [9] Zwillinger D. *Handbook of Differential Equations*. Academic Press, 1997.
- [10] Stoer J., Bulirsch R. *Introduction to Numerical Analysis*. Springer-Verlag, New York 1993.
- [11] PN-EN 1995-1-1:2010 *Eurokod 5 – Projektowanie konstrukcji drewnianych – Część 1-1: Postanowienia ogólne – Reguły ogólne i reguły dotyczące budynków*.
- [12] PN-EN 338:2011 *Drewno konstrukcyjne – Klasy wytrzymałości*.

## **Multiple shooting method in stability analysis of non-prismatic multi-segment columns**

Ryszard Hołubowski<sup>1</sup>, Andrzej Merena<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Institute of Civil Engineering, Faculty of Civil Engineering, Wrocław University of Technology, e-mail: ryszard.holubowski@pwr.wroc.pl*

<sup>2</sup> *AQ7 Design Office, e-mail: andrzej.merena@o2.pl*

**Abstract:** The application of multiple shooting method in stability analysis of non-prismatic multi-segment columns with pinned ends loaded with a concentrated force applied to the upper node has been presented. Numerical analyses were carried out for an exemplary three-segment column by solving the system of differential equations with variable coefficients and parameter. The results were compared with the solution obtained by using SOFiSTiK software based on the finite element method. The analyses show that considering the stiffness changes along the length can have a significant influence on the values of critical loads and thus change the resistance of the column. The advantage of the proposed method is its high efficiency and easy description of stiffness changes.

**Keywords:** stability analysis, non-prismatic multi-segment columns, shooting method.