

Mirosław WCIŚLIK\*  
Paweł STRZĄBAŁA\*

## ANALIZA SYMULACYJNA OBWODU PRĄDU PRZEMIENNEGO Z PROSTOWNIKIEM MOSTKOWYM

W pracy zaprezentowano sposób modelowania obciążenia nieliniowego w postaci układu prostownika mostkowego (mostka Graetza) z obciążeniem RC dla nieszywnego systemu zasilania. Został opracowany matematyczny model obwodu prądu przemiennego dla takiego obciążenia z uwzględnieniem zmiennych bezwymiarowych. Model rozważanego obwodu przeanalizowano wykorzystując system MATLAB/Simulink. Przebiegi prądów i napięć poddano analizie harmonicznym oraz wyznaczono wskaźniki jakości zasilania. Zaprezentowano charakterystyki prądowo – napięciowe rozważanego obciążenia dla zmiennych wartości obciążenia pojemnościowego układu prostownika. Na podstawie chwilowych wartości prądów i napięć w obwodzie sprawdzono przepływ mocy czynnej i biernej.

SŁOWA KLUCZOWE: prostownik mostkowy, obciążenie nieliniowe, modelowanie, moc czynna i bierna

### 1. WSTĘP

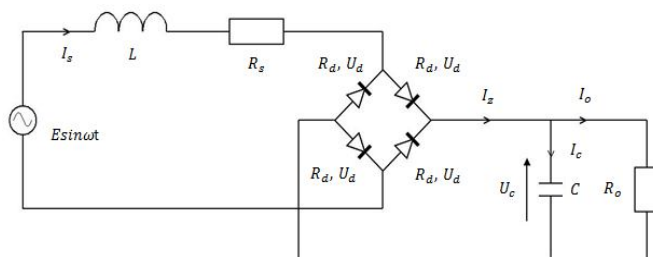
Składowe harmoniczne są jednym z głównych problemów składających się na zapewnienie właściwej jakości energii elektrycznej. Obciążenia nieliniowe natomiast są głównym źródłem ich propagacji w systemie zasilania. Energia przenoszona pierwszą harmoniczną w obciążeniu nieliniowym jest zamieniana na energie wyższych harmonicznym i zwracana do systemu zasilania. Liczba [1] obciążeń nieliniowych ciągle rośnie i szacuje się, że w ciągu kolejnych 10 lat ponad 60% wszystkich obciążeń użytkowych będą stanowić obciążenia nieliniowe. Dlatego wymagane są wiarygodne modele matematyczne, które w poprawny sposób opiszą zjawiska występujące w procesie przesyłu energii od producenta do konsumenta oraz pozwolą na ocenę oddziaływań obciążeń nieliniowych na system zasilania. Biorąc pod uwagę złożoność analiz oraz trudności z interpretacją zjawisk zachodzących w obwodzie z obciążeniem nieliniowym konieczna jest symulacja komputerowa tego obwodu.

---

\* Politechnika Świętokrzyska.

Do właściwej oceny interakcji obciążeń nieliniowych i systemu zasilania tj. propagacji wyższych harmonicznych oraz mocy biernej, konieczne jest opracowanie modelu obwodu, który umożliwi taką analizę. W tym celu opracowano model matematyczny obwodu prądu przemiennego z prostownikiem mostkowym.

Schemat obwodu, który poddano analizie prezentuje rysunek 1. Obwód ten zawiera prostownik mostkowy, który jest obciążony kondensatorem  $C$  i rezystancją obciążenia  $R_o$ . Prostownik mostkowy zasilany jest napięciem sinusoidalnym o pulsacji  $\omega$ , poprzez szeregowo połączoną indukcyjność  $L$  i rezystancję  $R_s$ , które modelują szeregową impedancję m.in. systemu zasilania.



Rys. 1. Schemat analizowanego obwodu z prostownikiem mostkowym

Indukcyjność  $L$  jest to suma indukcyjności systemu zasilania oraz dodatkowej indukcyjności szeregowej. Rozwiązanie to różni się od tych znanych z literatury [2 i 3], w których dodatkowa indukcyjność szeregową jest uwzględniana, ale na wyjściu prostownika. Prezentowany model obwodu daje możliwość symulacji pracy prostownika zarówno w trybie przerywanym jak również ciągłym.

## 2. MODEL MATEMATYCZNY OBWODU

Model obwodu prądu przemiennego z prostownikiem mostkowym z rysunku 1 opisano następującymi równaniami:

$$L \frac{dI_s}{dt} = E \cdot \sin(\omega t) - I_s \cdot (R_s + 2R_d) - (2U_d + U_c) \cdot \text{sign}(I_s) \quad (1)$$

$$C \frac{dU_c}{dt} = |I_s| - \frac{1}{R_o} \cdot U_c \quad (2)$$

gdzie:  $I_s$  – chwilowa wartość prądu płynąca przez układ prostowniczy, indukcyjność  $L$  oraz rezystancje  $R_s$ ,  $R_d$  – rezystancja szeregową diody w stanie przewodzenia,  $U_d$  – spadek napięcia diody w stanie przewodzenia,  $U_c$  – napięcie wyjściowe z prostownika.

Model matematyczny prostownika (mostka Graetza) utworzono wykorzystując funkcję signum prądu  $I_s$ , dla której współczynnikiem proporcjonalności jest suma spadków napięć na pojemności  $C$  oraz dwu przewodzących diodach mostka. Z prostownika wychodzi wartość bezwzględna prądu, która filtrowana jest na równoległe połączonych: kondensatorze  $C$  oraz rezystancji obciążenia  $R_o$ .

Liczba parametrów ( $R_d, R_s, R_o, L, C, \omega, t, E, U_d$ ), które uwzględniono w proponowanym opisie matematycznym powoduje, że model takiego obwodu jest rozbudowany oraz jego analiza jest utrudniona. W celu uproszczenia eksperymentu symulacyjnego oraz analizy otrzymanych wyników wprowadzono skalowanie czasu oraz zmienne odniesienia:

$$\tau = \omega t; \quad X = \omega L; \quad I_m = \frac{E}{X}; \quad Y = \omega C \quad (3)$$

Następnie wykorzystując zmienne i parametry bezwymiarowe:

$$i_s = \frac{I_s}{I_m}; \quad u_d = \frac{U_d}{E}; \quad u_c = \frac{U_c}{E} \quad (4)$$

$$r_z = \frac{R_s + 2R_d}{\omega L}; \quad r_o = \frac{R_o}{\omega L}; \quad c = XY = \omega^2 LC; \quad (5)$$

równania modelu obwodu zapisano w następującej postaci bezwymiarowej:

$$\frac{di_s}{d\tau} = \sin(\tau) - i_s \cdot r_z - (2u_d + u_c) \cdot \text{sign}(i_s) \quad (6)$$

$$\frac{du_c}{d\tau} = \frac{1}{c \cdot r_o} (|i_s| \cdot r_o - u_c) \quad (7)$$

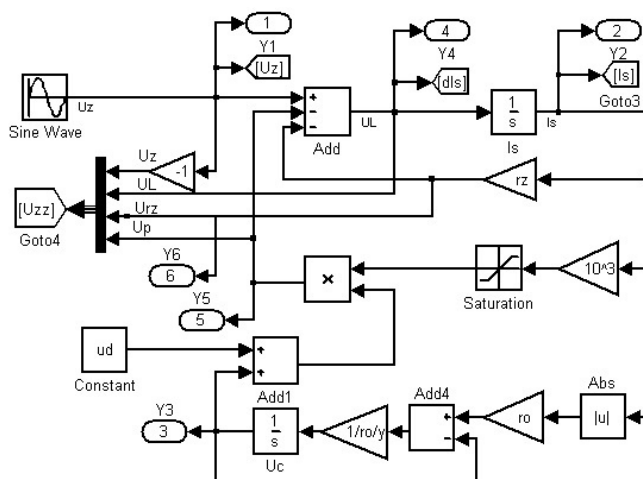
Zastosowane przekształcenia znacznie zredukowały liczbę parametrów wejściowych, których początkowa liczba była 9 natomiast po przekształceniach jest ich tylko 5 ( $r_o, c, r_z, u_d, \tau$ ).

### 3. MODEL OBWODU W SIMULINKU

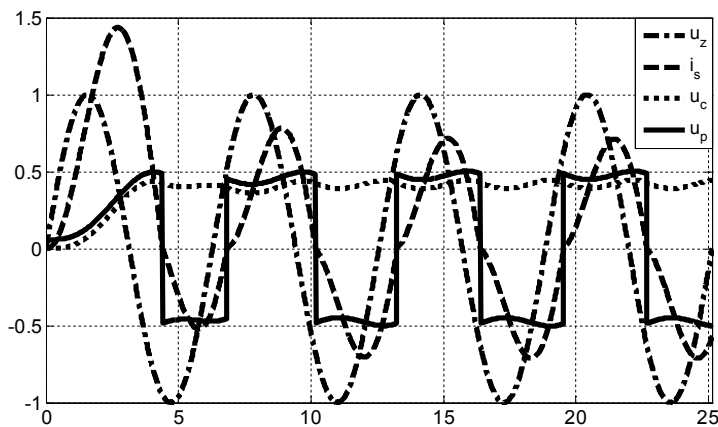
Wykorzystując równania (6) i (7) zapisane w postaci bezwymiarowej utworzono schemat operacyjny rozważanego obwodu w programie Simulink, który przedstawiono na rysunku 2. Funkcję signum zrealizowano wzmacniając sygnał tysiąc razy i stosując funkcję nasycenia. Na schemacie można wyróżnić sumatory, bloki wzmocnienia oraz integratory opisujące zmienne stanu rozważanego obwodu. Portami wyjściowymi wyprowadzono chwilowe wartości prądów i napięć, na podstawie, których przeprowadzono analizę harmoniczných napięć i prądu oraz sprawdzono bilanse mocy czynnych i biernych w obwodzie.

Eksperyment symulacyjny oraz analizę wyników została przeprowadzona z wykorzystaniem zmiennych bezwymiarowych opisanych zależnościami (4) i (5). W tym celu modelem obwodu w Simulinku sterowano z pliku MATLABa.

Jako parametry wejściowe zastosowano zmienne  $r_o$ ,  $c$ ,  $u_d$  oraz  $r_z$ . Przykładowe przebiegi napięć i prądu w stanie ustalonym dla wymuszenia sinusoidalnego w postaci funkcji  $\sin(\tau)$  i parametrów wejściowych  $r_o = 1$ ,  $c = 6$ ,  $u_d = 0.06$  oraz  $r_z = 0.05$  prezentuje rysunek 3.



Rys. 2. Schemat operacyjny modelowanego obwodu w Simulinku



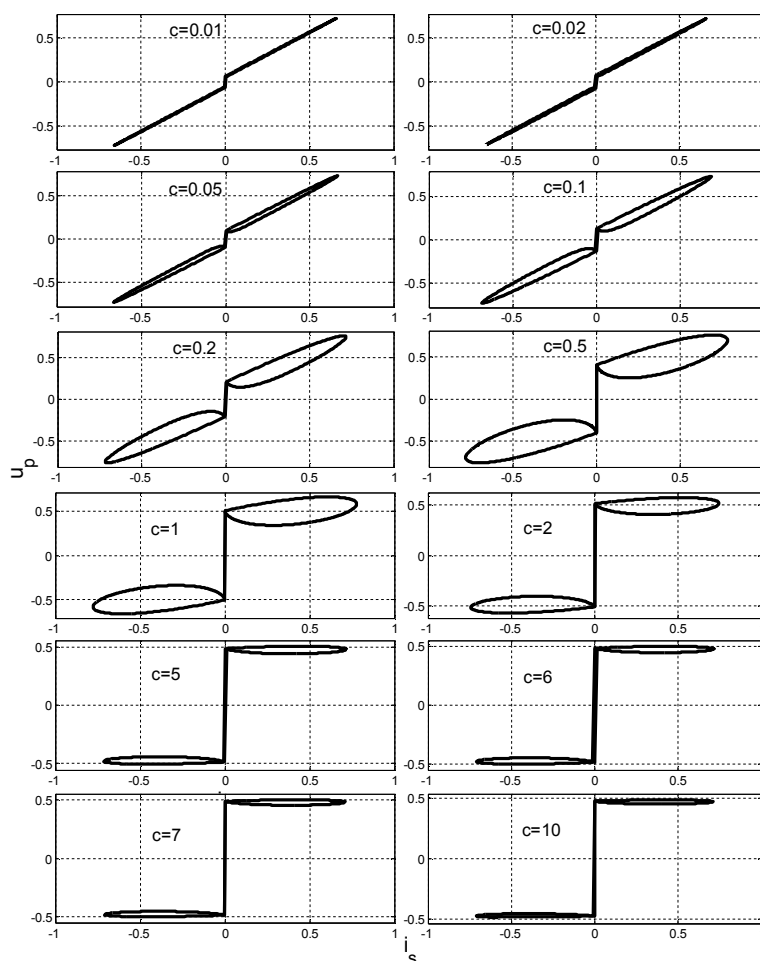
Rys. 3. Bezwymiarowe przebiegi napięć i prądu w obwodzie z rysunku 1.

Oznaczenia:  $u_z$  – napięcie zasilania,  $u_c$  – napięcie wyjściowe z prostownika,  $u_p$  – napięcie na prostowniku widziane z zacisków źródła zasilania,  $i_s$  – prąd płynący przez układ prostownika

Zmienne  $r_o$  i  $c$  wyrażają odpowiednio bezwymiarową wartość obciążenia rezystancyjnego i pojemnościowego układu prostownika odniesionych do indukcyjności systemu zasilania. W symulacji uwzględniono także bezwymiarową

wartość spadków napięć na dwu przewodzących diodach  $u_d$  oraz bezwymiarową rezystancję  $r_z$  będącą sumą rezystancji systemu zasilania oraz rezystancji diod w stanie przewodzenia.

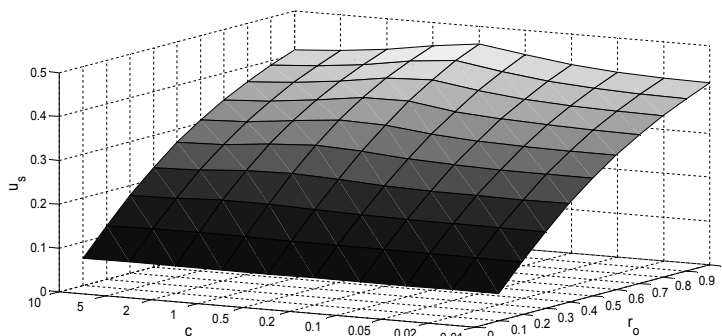
Dla stałych parametrów wejściowych  $r_o = 1$ ,  $u_d = 0.06$ ,  $r_z = 0.05$  oraz różnych wartości  $c$ , wyznaczono charakterystyki napięciowo – prądowe  $u_p(i_s)$  przedstawiające zależność napięcia na prostowniku  $u_p$  widzianego z zacisków źródła zasilania w funkcji prądu  $i_s$ . Otrzymane wykresy prezentuje rysunek 4.



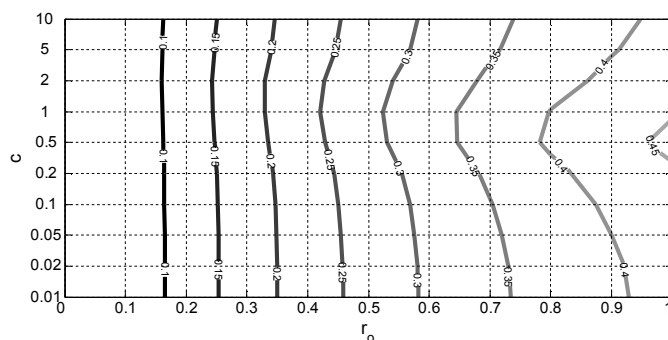
Rys. 4. Charakterystyki napięciowo – prądowe  $u_p(i_s)$  dla  $r_o = 1$ ,  $r_z = 0.05$  i  $u_d = 0.06$  i różnych wartości  $c$

Z przedstawionych wykresów wynika, że charakterystyki układu prostowniczego obserwowane na zaciskach AC nie są jednoznaczne.

Przyjmując stałe wartości  $u_d = 0.06$  i  $r_z = 0.05$  wyznaczono średnie wartości napięcia wyjściowego  $u_s$  dla różnych wartości  $r_o$  i  $c$ . Otrzymane wyniki zostały przedstawione na rysunkach 5 i 6.



Rys. 5. Średnia wartość napięcia wyjściowego  $u_s$  dla zmiennego obciążenia  $r_o$  i  $c$ : wykres trójwymiarowy

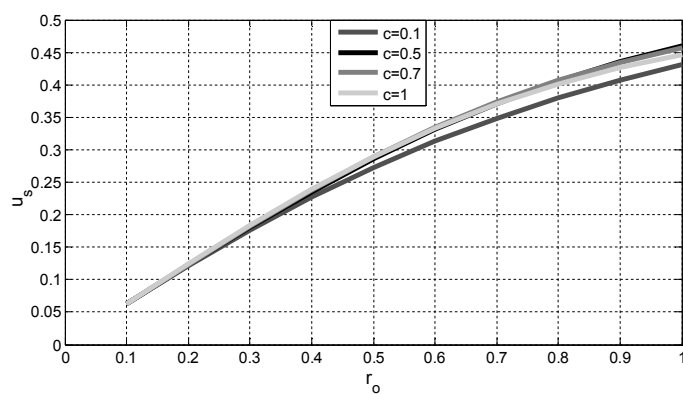


Rys. 6. Średnia wartość napięcia wyjściowego  $u_s$  dla zmiennego obciążenia  $r_o$  i  $c$ : wykres konturowy

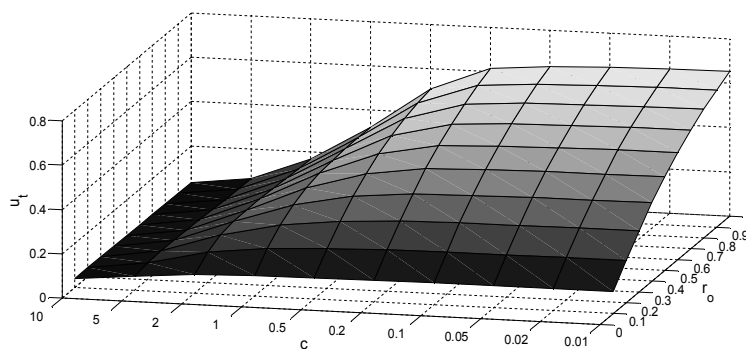
Należy zauważyć, że napięcie  $u_s$  dla  $r_o > 0.3$  osiąga maksimum, którego wartość rośnie wraz ze wzrostem  $r_o$ . Korzystając z przedstawionych charakterystyk można określić przy jakiej pojemności  $c$  napięcie to, ma maksymalną wartość. W tym celu pomocny jest wykres z rysunku 7, gdzie przedstawiono zależność napięcia  $u_s$  w funkcji  $r_o$  dla wybranych wartości  $c$ .

Jak można zauważyć napięcie średnie  $u_s$  dla  $r_o < 0.3$  narasta liniowo w funkcji  $r_o$  i nie zależy od  $c$ . Dla  $r_o > 0.3$  napięcie  $u_s$  osiąga maksymalną wartość, gdy  $c = 0.5$ .

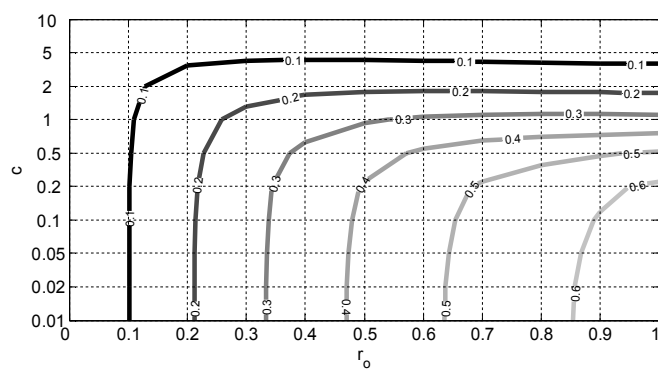
Wahania napięcia wyjściowego  $u_c$  dla różnych wartości  $r_o$  i  $c$  przedstawiono na rysunkach 8 i 9. Zarówno napięcie  $u_s$  jak i amplituda tętnień  $u_t$  stanowią istotny parametr przy doborze stabilizatora napięcia.



Rys. 7. Maksymalne wartości średnie  $u_s$  napięcia wyjściowego  $u_c$  w funkcji  $r_o$ , dla różnych wartości  $y$



Rys. 8. Amplituda tętnień  $u_t$  napięcia wyjściowego  $u_c$  dla  $r_o$  i  $c$ : wykres trójwymiarowy

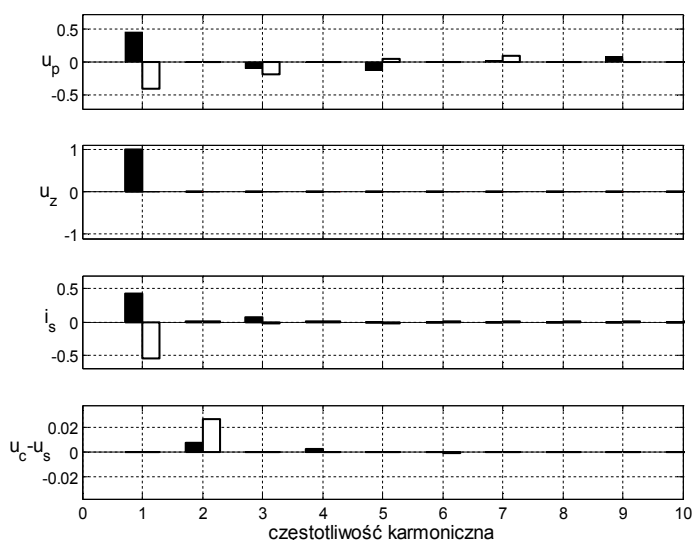


Rys. 9. Amplituda tętnień  $u_t$  napięcia wyjściowego  $u_c$  dla  $r_o$  i  $c$ : wykres konturowy

Z rysunku 9 wynika, że wraz ze wzrostem parametru  $\gamma$  amplituda wahań  $u_t$  napięcia wyjściowego jest coraz mniejsza oraz ustala się na stałym poziomie dla coraz szerszego zakresu zmian obciążenia  $r_o$ .

#### 4. HARMONICZNE I WSKAŹNIKI JAKOŚCI ZASILANIA

Prądy i napięcia z rysunku 3 poddano analizie harmoniczej. Dla okresowych przebiegów odkształconych analizę harmoniczną wykonuje się przy użyciu szeregu Fouriera. W tym celu modelem obwodu z rysunku 2 utworzonym w Simulinku sterowano z pliku MATLABa, pobierano kolejne wartości chwilowe prądów i napięć, a następnie na ich podstawie przeprowadzano dyskretną transformację Fouriera.



Rys. 10. Amplitudy części rzeczywistych (kolor czarny) i urojonych (kolor biały) harmoniczných napięć i prądu z rysunku 3

Z rysunku 10 wynika, że największą zawartością harmoniczných cechuje się napięcie na prostowniku  $u_p$ . Wartości tych harmoniczných są charakterystyczne dla obciążenia nieliniowego, amplitudy poszczególných harmoniczných maleją wraz ze wzrostem ich rzędów.

Zawartość harmoniczných w prądzie  $i_s$  nie jest duża, obserwuje się znaczną wartość harmonicznej podstawowej, harmoniczną 3 i znikome wartości pozostałych harmoniczných. Do oceny kształtu przebiegów napięć i prądu zastosowano współczynnik zniekształceń harmoniczných, który zdefiniowano zgodnie ze standardem IEEE 519 następującą zależnością [4]:



$$THDi = \frac{\sqrt{i_2^2 + i_3^2 + i_4^2 + \dots}}{\sqrt{i_1^2 + i_2^2 + i_3^2 + \dots}} \quad (8)$$

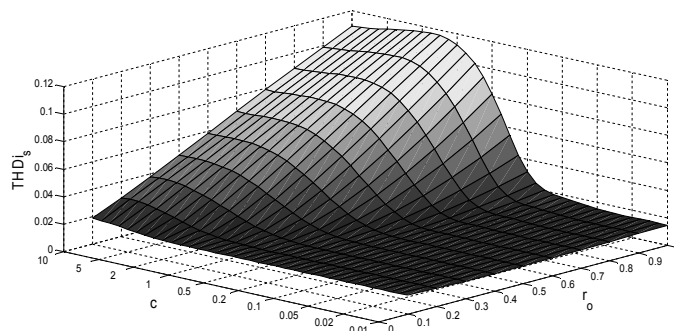
gdzie:  $i_n$  - wartości skuteczne kolejnych składowych harmoniczych.

Dla analizowanych napięć i prądu  $i_s$  w obwodzie wartości współczynnika THD zaprezentowano w tabeli 1.

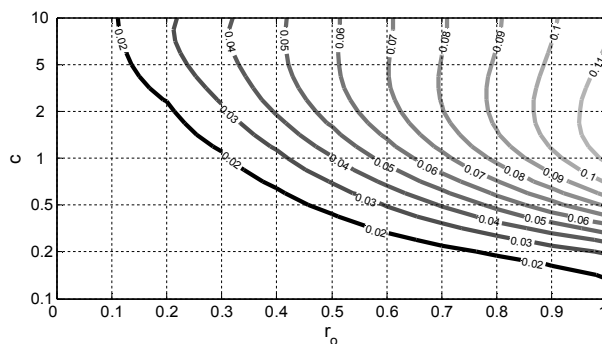
Tabela 1. Wartości współczynnika THD dla napięć i prądu  $i_s$  w obwodzie z rysunku 1

$THDu_z$	$THDu_p$	$THDi_s$	$THDu_c$
0.000	0.41	0.11	0.09

Wartości współczynników THD przedstawionych w tabeli 1 istotnie zależą od zmian parametrów  $r_o$  i  $c$ . Wpływ zmian obciążenia pojemnościowego oraz rezystancyjnego układu prostowniczego na współczynnik THD prądu  $i_s$  prezentują wykresy z rysunku 11 i 12.



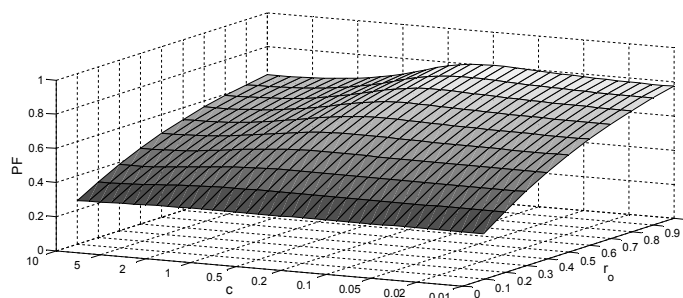
Rys. 11. Współczynnik THD prądu w funkcji  $r_o$  i  $c$ : wykres trójwymiarowy



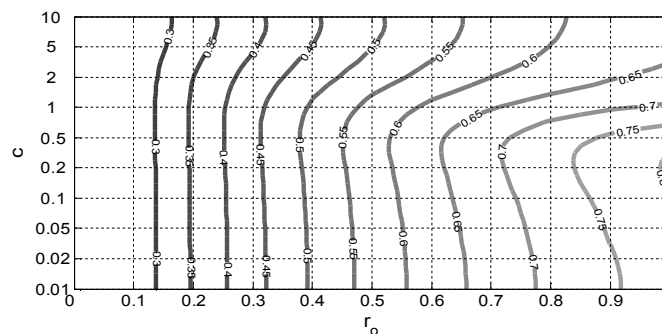
Rys. 12. Współczynnik THD prądu w funkcji  $r_o$  i  $c$ : wykres konturowy

Z wykresów wynika, że wartości THD prądu  $i_s$  płynącego w obwodzie zasilania zależą zarówno od parametrów  $r_o$  i  $c$ . Dla rozważanych wartości parametrów  $r_o$  i  $y$  maksymalna wartość THD jest równa 11%, występuje, gdy  $r_o > 0.95$ .

Wartość współczynnika mocy dla rozważanego obwodu w funkcji  $r_o$  i  $c$ , dla stałych wartości  $u_d = 0,06$  i  $r_z = 0,01$  przedstawiono na wykresach z rysunku 13 i 14. Dla  $r_o > 0.98$  i  $c = 0.2$  współczynnik mocy osiąga wartość maksymalną, która jest równa 0.8. Oznacza to, że dla takiego przypadku w obwodzie wydzielana jest najmniejsza moc bierna.



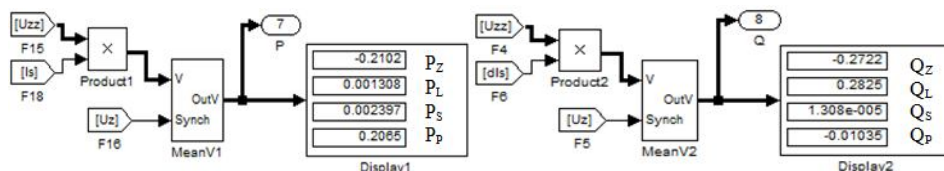
Rys. 13. Współczynnik mocy PF dla  $r_o$  i  $c$ : wykres trójwymiarowy



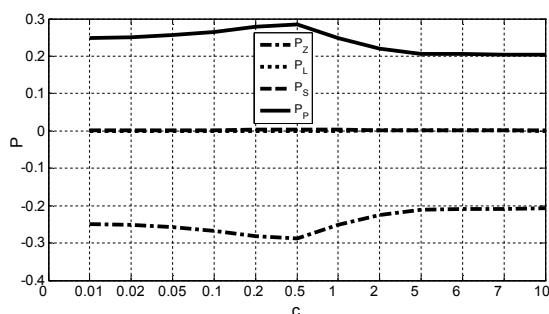
Rys. 14. Współczynnik mocy PF dla  $r_o$  i  $c$ : wykres konturowy

## 5. BILANS MOCY

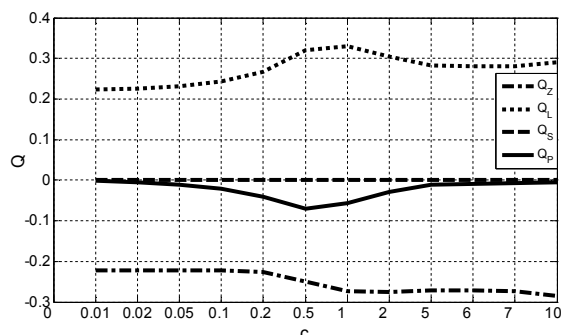
Chwilowe wartości mocy czynnej i biernej na poszczególnych elementach obwodu wyznaczono stosując układ pomiarowy zaproponowany w [5]. Schemat tego układu prezentuje rysunek 15. Wartości mocy czynnej i biernej wyznaczane są w wyniku mnożenia wektora spadków napięć  $U_{zz}$  sformułowanych w modelu z rysunku 2 przez prąd  $i_s$  oraz jego pochodną  $di_s / dt$ . Chwilowe wartości tak wyznaczanych mocy czynnej i biernej uśredniane są następnie na filtrach cyfrowych MeanV1 i MeanV2 za okres i wyświetlane na wyświetlaczach oraz prowadzone portami wyjściowymi  $P$  i  $Q$ .



Rys. 15. Schemat układu pomiarowego mocy czynnej i biernej. Gdzie:  $P_Z, Q_Z; P_L, Q_L; P_S, Q_S; P_P, Q_P$  - odpowiednio moc czynna i moc bierna zasilania, indukcyjności, rezystancji  $r_s$  i prostownika. Przyjęte parametry symulacji:  $r_o = 1, c = 5, u_d = 0.06$  oraz  $r_z = 0.01$



Rys. 16. Moc czynna na poszczególnych elementach obwodu dla różnych wartości  $c$



Rys. 17. Moc bierna na poszczególnych elementach obwodu dla różnych wartości  $c$

Na rysunkach 16 i 17 zamieszczono wykresy dla mocy czynnych i biernych, które wyznaczono w rozważanym obwodzie dla stałych wartości  $r_o = 1, u_d = 0.06, r_z = 0.01$  oraz różnych wartości  $c$ . Z wyników tych wynika, że bilanse mocy czynnej oraz biernej w obwodzie są spełnione. Interesujące zjawisko można zauważyć dla mocy biernej, gdzie prostownik ma moc bierną pojemnościową. Wartość tej mocy jest znacznie mniejsza od mocy biernej indukcyjnej. Z rysunku 17 wynika, że dla  $c = 0.5$  moc bierna pojemnościowa prostownika ma wartość  $Q_P = -0.071$ , która zapewnia maksymalną kompensację mocy biernej indukcyjnej w obwodzie.

## 6. PODSUMOWANIE

Prezentowany model obwodu stanowi dobry przykład do badań oddziaływań obciążenia nieliniowego na sieć zasilania oraz inne odbiorniki przyłączone do tej sieci. Charakterystyki prądowo – napięciowe obserwowane na zaciskach AC mostka są niejednoznaczne, moc bierna prostownika jest niezerowa i posiada znak ujemny tak jak źródło zasilania. Dla takiego przypadku w obwodzie obserwowana jest pewna kompensacja mocy biernej indukcyjnej.

## LITERATURA

- [1] Das J. C., Power System Harmonics and Passive Filter Designs, John Wiley & Sons, New Jersey, 2015.
- [2] Dokić B. L., Blanusa B., Power Electronics: Converters and Regulators, Third Edition, Springer, 2015.
- [3] Mohan N., Undeland T. M., Robbins W. P., Power Electronics: Converters, Applications, and Design, John Wiley & Sons, 2003.
- [4] Wciślik M., Harmoniczne w obwodzie prądu przemiennego z obciążeniem nieliniowym i kompensacją mocy biernej, Computer Applications in Electrical Engineering, Poznań, 2015, s. 77 – 84.
- [5] Wciślik M., Bilanse mocy w obwodzie prądu przemiennego z odbiornikiem nieliniowym, Przegląd Elektrotechniczny, 2014, nr.2, 5-8.

## SIMULATION ANALYSIS OF THE AC CIRCUIT WITH BRIDGE RECTIFIER

The papers deal with the nonlinear model of full-wave bridge rectifier in AC circuit with RC load for non-rigid supply system. The mathematical model of the AC circuit for this load taking into account dimensionless variables was worked out. The model of the circuit was created and analyzed with MATLAB/Simulink. Analysis of harmonic distortion of the currents and voltages in considered circuit was carried out. Indicators of power quality were designated. The current-voltage characteristics for different values of capacitive load were presented. The balances active and reactive powers in the circuit were performed.

*(Received: 5. 02. 2016, revised: 8. 03. 2016)*