

# METODA MONTE CARLO W ANALIZIE ZDARZEŃ DROGOWYCH, A INTERPRETACJA WYNIKÓW OBLICZEŃ

WOJCIECH WACH<sup>1</sup>

Instytut Ekspertyz Sądowych

## Streszczenie

W artykule scharakteryzowano metodę Monte Carlo, skupiając się na jej zastosowaniach w rekonstrukcji wypadków drogowych. Polega ona na wielokrotnym powtarzaniu obliczeń za pomocą tego samego deterministycznego modelu matematycznego, ale w taki sposób, że za każdym razem wartości poszczególnych danych wybierane są pseudolosowo z zadanych zakresów niepewności. Wyniki reprezentowane są przez rozkład gęstości prawdopodobieństwa o kształcie zbliżonym do krzywej dzwonowej, ułatwiając interpretację statystyczną i analizę niepewności. W szczególności możliwe jest zawężenie zakresu wyników poprzez odrzucenie mało prawdopodobnych rejonów skrajnych. Przedstawiono przykłady, w których rozważano problemy dotyczące obliczeń prędkości przedzderzeniowych, położenia punktu kolizji na jezdni oraz analizy kinematycznej fazy przedzderzeniowej potrącenia pieszego (tzw. analizy czasowo-przestrzennej). W analizie zderzenia wykorzystano zarówno metody rekonstrukcyjne (zasada zachowania pędu i Marquardowskie modele obliczenia prędkości pozderzeniowych), jak i symulacyjne (symulacja zderzenia i dynamiki ruchu w programie PC-Crash). Wykazano, że obszar największej koncentracji wyników symulacji Monte Carlo to tylko rejon najczęściej uzyskiwanych odpowiedzi modelu deterministycznego dla przyjętych zakresów danych, a niekoniecznie odzwierciedlenie prawdy. Kwestią fundamentalną jest opracowanie adekwatnego modelu matematycznego zjawiska fizycznego.

**Słowa kluczowe:** metoda Monte Carlo, zderzenie, potrącenie, niepewność

## 1. Wstęp

Istotnym problemem nieodłącznie związanym z rekonstrukcją wypadków jest stosunkowo skromny zbiór danych oraz konieczność wprowadzania wielu parametrów w szerokim paśmie tolerancji wartości, co przyczynia się do zwiększenia niepewności wyników obliczeń. Wśród różnych metod analizy niepewności, szeroko analizowanych m. in. przez Bracha [3], Guzka i Lozię [10], na szczególną uwagę zasługuje metoda Monte Carlo umożliwiająca przedstawienie wyniku w postaci rozkładu gęstości prawdopodobieństwa obliczanego parametru.

<sup>1</sup> Instytut Ekspertyz Sądowych, ul. Westerplatte 9, 31-033 Kraków, e-mail: wwach@ies.krakow.pl, tel. 12 422 87 55

Metodę Monte Carlo stworzył polski matematyk szkoły lwowskiej Stanisław Ulam we współpracy z Johnem von Neumannem i Nicholasem Metropolisem podczas prac nad projektem Manhattan [14]. Kost i Werner [12] oraz Wood i O'Riordain [27] przedstawili zalety analizy niepewności za pomocą metody Monte Carlo. W pierwszej pracy zwrócono uwagę na możliwość wprowadzania danych w postaci różnych rozkładów gęstości prawdopodobieństwa, w drugiej na ułatwioną analizę wrażliwości wyników na rozrzut danych oraz możliwość zredukowania liczby równań opisujących wszystkie okoliczności przez sprawdzanie dodatkowych kryteriów dotyczących zadań częściowych. Bartlett [1] opisał metody przeprowadzenia obliczeń metodą Monte Carlo za pomocą narzędzi dostępnych w arkuszu kalkulacyjnym programu MS Excel. Kimbrough [11] rozważał możliwość wykorzystania symulacji Monte Carlo do analizy ilorazu wiarygodności dwóch przeciwstawnych wersji sytuacji przedwypadkowej. Fleck i Daily [7] badali wrażliwość metody Monte Carlo w rekonstrukcji zderzenia pojazdów.

Metoda Monte Carlo polega na wielokrotnym powtarzaniu obliczeń za pomocą tego samego deterministycznego modelu matematycznego, ale w taki sposób, że za każdym razem wartości poszczególnych danych wybierane są pseudolosowo z zadanych pasm niepewności. Zakłada się, że parametry wejściowe są statystycznie niezależne, rozkłady gęstości prawdopodobieństwa danych muszą być znane lub założone a priori [1], [7]. Procedura jest egzekwowana tak długo, aż wynik osiągnie postać rozkładu gęstości prawdopodobieństwa o kształcie zbliżonym do krzywej dzwonowej. Dzięki temu możliwe jest dalsze przetwarzanie rezultatów metodami statystycznymi.

W programie do symulacji wypadków drogowych PC-Crash możliwe jest zastosowanie metody Monte Carlo do poszukiwania optymalnych parametrów ruchu pojazdów tuż przed zderzeniem i/lub modelu zderzenia poprzez wariację dowolnych parametrów pojazdów i/lub sterowania pojazdami w ruchu pozderzeniowym [17].

W artykule rozważono problemy dotyczące obliczeń parametrów zderzenia pojazdów oraz analizy kinematycznej fazy przedzderzeniowej potrącenia pieszego (tzw. analizy czasowo-przestrzennej) z wykorzystaniem metody Monte Carlo. Aby ułatwić zrozumienie metody i dostrzeżenie jej praktycznych walorów w rekonstrukcji wypadków drogowych, przedstawiono kilka przykładów. W przypadku zderzenia zaprezentowano trzy przykłady z modelem wykorzystującym zasadę zachowania pędu i Marquardowskie metody obliczenia prędkości rozdzielania (czyli tuż po zderzeniu) w podejściu rekonstrukcyjnym oraz jeden przykład bazujący na symulacji zderzenia i ruchu pozderzeniowego. Obliczenia wykonano za pomocą programu komputerowego Marlo.exe opracowanego przez autora oraz programu symulacyjnego PC-Crash. Głębsze rozważania nad wiarygodnością rekonstrukcji wypadku drogowego, której jedną z cech jest niepewność obliczeń, przedstawiono w pracy [22].

## 2. Przykład 1 – zapoznanie z metodą

Rozważmy prosty przykład, w którym metoda Monte Carlo będzie zastosowana do obliczenia prędkości początkowej pojazdu. Dana jest długość śladów blokowania kół na poziomej

suchej i czystej nawierzchni asfaltowej  $s = 20$  m. Z tabel przyjęto wartość średnią współczynnika przyczepności  $\mu = 0,8$ . Korzystając ze wzoru

$$v = \sqrt{2\mu gs}, \quad (1)$$

gdzie  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup> – przyspieszenie ziemskie, należy obliczyć prędkość pojazdu na początku śladów wraz z niepewnością wyniku. Przyjęto:  $\Delta s = \pm 0,9$  m – niepewność pomiaru długości,  $\Delta \mu = \pm 0,06$  – niepewność współczynnika przyczepności. Niepewności maksymalna i średnia kwadratowa (patrz m. in. [3], [10]) dane są wzorami odpowiednio

$$\Delta v_{max} = \frac{\partial v}{\partial \mu} \Delta \mu + \frac{\partial v}{\partial s} \Delta s \quad \text{i} \quad \Delta v_{sqr} = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial \mu} \Delta \mu\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s} \Delta s\right)^2} \quad (2)$$

gdzie:

$$\frac{\partial v}{\partial \mu} = \frac{gs}{v}, \quad \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{g\mu}{v}. \quad (3)$$

Po podstawieniu danych i wykonaniu obliczeń:  $v_0 \pm \Delta v_{max} = 17,7 \pm 1,1$  m/s oraz  $v_0 \pm \Delta v_{sqr} = 17,7 \pm 0,78$  m/s.

Każda prędkość wewnątrz przedziałów  $v_0 \pm \Delta v_{max}$  lub  $v_0 \pm \Delta v_{sqr}$  jest równie prawdopodobna, a odpowiadający jej jednostajny rozkład gęstości prawdopodobieństwa dany jest wzorem

$$f(v) = \begin{cases} \frac{1}{2 \cdot \Delta v} & \text{dla } v \in (v - \Delta v, v + \Delta v) \\ 0 & \text{dla } v \notin (v - \Delta v, v + \Delta v) \end{cases}, \quad (4)$$

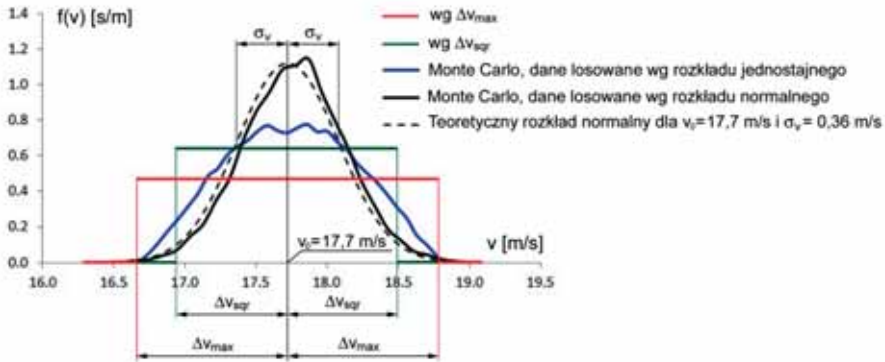
przy czym  $\Delta v$  symbolizuje  $\Delta v_{max}$  lub  $\Delta v_{sqr}$ . Rozkłady te pokazano na rys. 1.

Przeprowadzono także symulację Monte Carlo, egzekwując wzór (1) 20 tys. razy dla jednostajnych rozkładów danych wewnątrz przedziałów  $s \pm \Delta s$  i  $\mu \pm \Delta \mu$ . Rozkład wyników w postaci krzywej dzwonowej zaznaczono na rysunku kolorem niebieskim. Następnie przeprowadzono analogiczną symulację, ale losując dane według rozkładów normalnych dla:

$\sigma_\mu = \Delta \mu / 3 = 0,02$  – odchylenie standardowe współczynnika przyczepności,

$\sigma_s = \Delta s / 3 = 0,3$  m – odchylenie standardowe pomiaru długości.

Wyniki obliczeń  $v$  ułożyły się niemal w postaci rozkładu normalnego o parametrach  $v_0 = 17,7$  m/s i  $\sigma_v = 0,36$  m/s (linia czarna na rysunku). Teoretyczny rozkład normalny dla takich właśnie parametrów jest minimalnie przesunięty w lewo (współczynnik korelacji momentu iloczynu Pearsona  $R^2 = 0,983$ ) i został zaznaczony czarną linią przerywaną. Wartość oczekiwana  $v_0$  w każdym przypadku jest taka sama; podobnie rozpiętości wyników (z wyjątkiem rozkładu dotyczącego  $\Delta v_{sqr}$ ). Metoda Monte Carlo pozwoliła jednak zawęzić pole wyników najbardziej prawdopodobnych. W przypadku  $\Delta v_{sqr}$  rozpiętość wyniku pokryła w przybliżeniu zakres  $v_0 \pm 2\sigma_v$ , co oznacza odcięcie najrzadziej występujących wyników skrajnych.



Rys. 1. Porównanie rozkładów gęstości prawdopodobieństwa

Przy rekonstrukcji konkretnego przypadku dla potrzeb sądowych, stosując metodę Monte Carlo wręcz wskazane jest przyjmowanie danych zgodnie z rozkładem jednostajnym. Przykładem niech będzie prędkość ruchu pieszego opisana przez świadka słowami np. „szedł normalnym krokiem”. Jakkolwiek podczas badań ruchu pieszego wyniki rozkładają się według krzywej Gaussa (czyli rozkładu normalnego), ale w sprawie jednostkowej nigdy nie wiadomo na ile trafna była ocena świadka, dlatego trzeba przyjąć, że każda wartość z zakresu normalnego kroku według stosownych tabel jest równie prawdopodobna.

### 3. Prędkości przedzderzeniowe – model obliczeń rekonstrukcyjnych

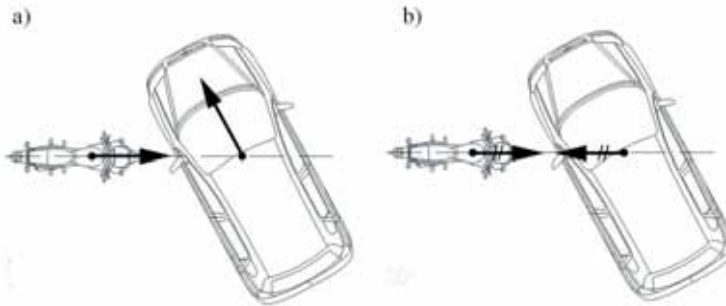
W obliczeniach rekonstrukcyjnych parametrów zderzenia najpierw rozpatruje się ruch pozderzeniowy pojazdów, a następnie oblicza prędkości przedzderzeniowe za pomocą twierdzeń o pędzie i kręcie (czyli według tzw. klasycznego modelu zderzenia) lub zasad zachowania pędu i energii. W celu uproszczenia analizy wybrano taki przykład, do którego rozwiązania wystarczająca będzie zasada zachowania pędu. W zapisie wektorowym ma ona postać

$$m_1 \mathbf{v}'_{IS_1,C} + m_2 \mathbf{v}'_{IS_2,C} = m_1 \mathbf{v}_{IS_1,C} + m_2 \mathbf{v}_{IS_2,C}, \quad (5)$$

gdzie:  $i=1,2$  – indeks oznaczający numer pojazdu,  $m_i$  – masa pojazdu,  $\mathbf{v}'_{IS_i,C}$  – wektor prędkości środka masy  $S_i$  w chwili rozdzielenia,  $\mathbf{v}_{IS_i,C}$  – wektor prędkości środka masy tuż przed zderzeniem.

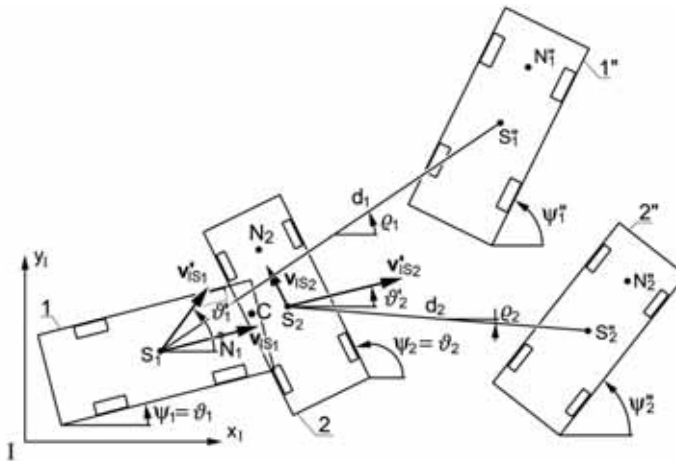
Zasada ta stanowi szczególny przypadek twierdzenia o pędzie i może być stosowana do zderzenia środkowego ukośnego (pokazanego na rys. 2a), przy czym kierunki prędkości przedzderzeniowych powinny być dalekie od równoległych aby wyeliminować dzielenie przez 0 we wzorach (8) i (9).

W przypadku zderzeń silnie mimośrodkowych pominięcie twierdzenia o kręcie może prowadzić do dużych błędów (patrz rozdz. 3.2). Konieczne jest wtedy zastosowanie pełnego klasycznego modelu zderzenia wraz z warunkami na współczynnik restytucji i tarcie w płaszczyźnie styecznej zderzających się pojazdów.



Rys. 2. Typy zderzeń środkowych: a) ukośne, b) proste

Na rys. 3 pokazano samochody w pozycjach zderzeniowej i końcowej.



Rys. 3. Schemat do analizy zderzenia dwóch pojazdów

Przyjęto oznaczenia:  $\omega_i = \dot{\psi}_i$ . Symbol bez dodatkowego indeksu górnego (np.  $v_i$ ) oznacza stan przedzderzeniowy, ze znakiem *prim* (np.  $v_i'$ ) – w chwili rozdzielenia, a *bis* (np.  $v_i''$ ) – w pozycji końcowej. Ponadto:

$\{I\}$  – globalny, inercjalny układ współrzędnych zaczepiony w punkcie  $I$ ,

$\{N_i\}$  – lokalny układ współrzędnych zaczepiony w środku osi kół przednich  $i$ -tego pojazdu  $N_i$ , równoległy do układu  $\{S_i\}$  zaczepionego w środku masy  $S_i$ ,

- $I_{z_i}$  – moment bezwładności pojazdu względem osi pionowej przechodzącej przez środek masy  $S_i$ ,  
 $L_i$  – rozstaw osi,  
 $\mathbf{r}_{N_i S_i N_i}$  – położenie środka masy pojazdu względem  $\{N_i\}$ , tj. wektor od punktu  $N_i$  do  $S_i$  wyrażony w  $\{N_i\}$ ,  
 $\mathbf{r}_{IN_i N_i}''$  – wektor od punktu  $I$  do  $N_i$  w pozycji końcowej pojazdu, względem  $\{N_i\}$ ,  
 $\psi_i$  – kąt odchylenia względem  $\{I\}$ ,  
 $\Delta\psi_i$  – całkowity kąt obrotu pojazdu w ruchu pozderzeniowym,  
 $\omega_i = \dot{\psi}_i$  – prędkość odchylenia,  
 $\vartheta_i$  – kąt wektora prędkości środka masy odmierzany w  $\{I\}$  jak na rysunku,  
 $\delta_i$  – kąt pojazdu 2 względem 1 tuż przed zderzeniem,  
 $v_{i \min}$  – minimalna prędkość przedzderzeniowa,  
 $v_{i \max}$  – maksymalna prędkość przedzderzeniowa,  
 $\mu_i$  – współczynnik przyczepności kół do jezdni,  
 $f_i$  – współczynnik oporu ruchu pozderzeniowego (od 0 dla wszystkich kół toczących się swobodnie do 1 dla wszystkich kół zablokowanych),  
 $EES_i$  – *Energy-Equivalent Speed* – prędkość równoważna energii odkształcenia plastycznego pojazdu,  
 $\varrho_i$  – kąt wektora  $\mathbf{r}'_{S_i S_i' P}$  (tj. wektora od punktu  $S_i'$  do  $S_i''$  odmierzany od osi  $x_i$  układu  $\{I\}$ ).

Założenia:

- wektory prędkości zderzeniowych leżą na osiach wzdłużnych pojazdów i mają zwroty do przodu pojazdów ( $\vartheta_i = \psi_i$ ),
- model dotyczy samochodów osobowych lub podobnych, poruszających się ruchem płaskim,
- przedzderzeniowe prędkości kątowe  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ ,
- pominięto reakcje jezdni na opony w czasie zderzenia,
- zderzenie ma charakter szorstki,
- pozycje pojazdów: przedzderzeniowa i rozdzielenia są takie same,
- opór ruchu pozderzeniowego i współczynnik przyczepności są stałe.

### Prędkości przedzderzeniowe

Dla przyjętych założeń prędkości rozdzielenia  $v'_i$  i  $\omega'_i$  można obliczyć korzystając z zasady równowartości energii kinetycznej i pracy tarcia w ruchu pozderzeniowym. Na jej podstawie, rozważając rowerowy model pojazdu, Marquard [13] opracował metodę, w której opór rotacji ujął we współczynnikach korekcyjnych. Poniżej skorzystano z modyfikacji McHenry'ego (znanej pod nazwą SPIN 2 [6]), uwzględniającej różnicowany opór kół za pomocą współczynnika  $f_i$  (szerzej, patrz: [19], [22], [26]), gdzie

$$\omega'_i = \text{sign } \Delta\psi_i \sqrt{\frac{\mu_i g \Delta\psi_i^2}{\frac{I_{z_i}}{m_i L_i} (1 - f_i) |\Delta\psi_i| + \frac{d_i}{1,7}}}, \quad (6)$$

$$v'_i = 1,7 \left[ \frac{\mu_i g \Delta\psi_i}{\omega'_i} - \frac{I_{z_i}}{m_i L_i} (1 - f_i) \omega'_i \right]. \quad (7)$$

Równanie wektorowe (5) można wyrazić dwoma równaniami algebraicznymi w układzie  $\{I\}$ . Po wykonaniu przekształceń prędkości przedzderzeniowe dane są wzorami

$$v_1 = \frac{m_1 v'_1 \sin(\vartheta_2 - \vartheta'_1) + m_2 v'_2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta'_2)}{m_1 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)}, \quad (8)$$

$$v_2 = -\frac{m_1 v'_1 \sin(\vartheta_1 - \vartheta'_1) + m_2 v'_2 \sin(\vartheta_1 - \vartheta'_2)}{m_2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)}. \quad (9)$$

### Algorytm metody Monte Carlo

Pozycje końcowe pojazdów znane są dokładnie, dlatego macierze obrotu z układów lokalnych w pozycjach końcowych  $\{N_i\}$  do układu inercjalnego  $\{I\}$

$$\mathbf{A}''_{IN_i} = \begin{bmatrix} \cos \psi''_i & -\sin \psi''_i \\ \sin \psi''_i & \cos \psi''_i \end{bmatrix}, i = 1, 2 \quad (10)$$

mogą być obliczone jednorazowo przed rozpoczęciem symulacji Monte Carlo. Pojedynczy krok obliczeń wykonany jest zgodnie z następującym algorytmem.

1. Dane: wybór pseudolosowych wartości każdego parametru z zadanych przedziałów niepewności.
2. Kąt wektora prędkości pojazdu 2 w chwili zderzenia

$$\vartheta_2 = \delta_2 - \vartheta_1. \quad (11)$$

3. Położenie środków mas w układach związanych z pojazdami

$$\mathbf{r}_{N_i S_i N_i} = [-c_i, 0]^T, i = 1, 2. \quad (12)$$

4. Macierze obrotu z układów lokalnych w pozycjach przedzderzeniowych  $\{N_i\}$  do układu inercjalnego  $\{I\}$

$$\mathbf{A}_{IN_i} = \begin{bmatrix} \cos \psi_i & -\sin \psi_i \\ \sin \psi_i & \cos \psi_i \end{bmatrix}, i = 1, 2. \quad (13)$$

5. Położenie pojazdu 2 w chwili zderzenia w  $\{I\}$

$$\mathbf{r}_{IN_2, I} = \mathbf{r}_{IC, I} - \mathbf{A}_{IN_2} \mathbf{r}_{N_2 C_2, N_2}. \quad (14)$$

## 6. Prędkości rozdzielenia:

- środki mas w pozycjach końcowych

$$\mathbf{r}_{IS_i,I}'' = \mathbf{r}_{IN_i,I}'' + \mathbf{A}_{IN_i}'' \mathbf{r}_{N_iS_i,N_i}, i = 1,2, \quad (15)$$

- środki mas w pozycjach zderzeniowych

$$\mathbf{r}_{IS_i,I} = \mathbf{r}_{IN_i,I} + \mathbf{A}_{IN_i} \mathbf{r}_{N_iS_i,N_i}, i = 1,2, \quad (16)$$

- odległość między środkami mas w położeniu zderzeniowym i końcowym

$$d_i = |\mathbf{r}_{IS_i,I}'' - \mathbf{r}_{IS_i,I}|, i = 1,2, \quad (17)$$

- prędkości rozdzielenia według wzorów McHenry'ego (6) i (7).

## 7. Prędkości zderzeniowe z zasady zachowania pędu, według wzorów (8) i (9).

Kroki od 1 do 7 są powtarzane  $n$  razy. Wyniki niespełniające kryteriów tzw. warunkowego próbkowania są odrzucane (por. [20]). W ten sposób wprowadzając do równań np. zasadę zachowania energii można ograniczyć problem równoległości osi podłużnych pojazdów w chwili przedzderzeniowej, który jest właściwością zasady zachowania pędu (patrz wspomniany mianownik we wzorach (8) i (9)). Warunkowe próbkowanie generuje zwykle niesymetryczność rozkładu gęstości prawdopodobieństwa.

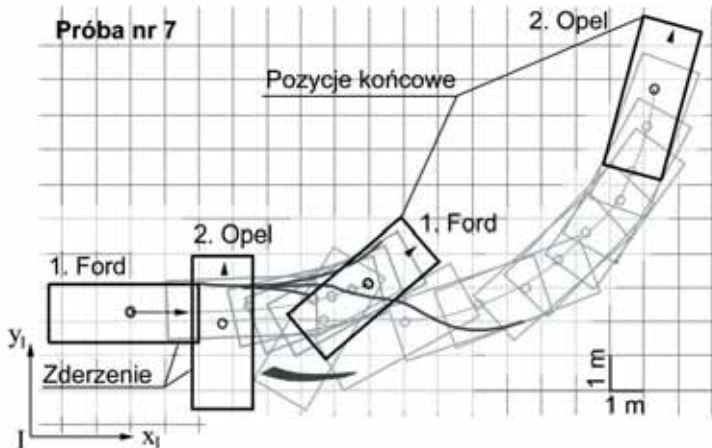
### 3.1 Przykład 2 - zderzenie dwóch samochodów

W przykładzie wykorzystano dane z próby zderzeniowej nr 7 udokumentowanej w pozycji [4], stąd wyniki będą miały równocześnie walor weryfikacyjny.

#### Dane

Szkic miejsca zderzenia pokazano na rys. 4, a w tabeli 1 wymieniono dane wraz z niepewnościami tych parametrów, których wartości są trudne do ustalenia w praktyce rekonstrukcji wypadków. Zderzenie miało bardzo mały mimośród, dlatego dopuszczalne jest zastosowanie samej zasady zachowania pędu.





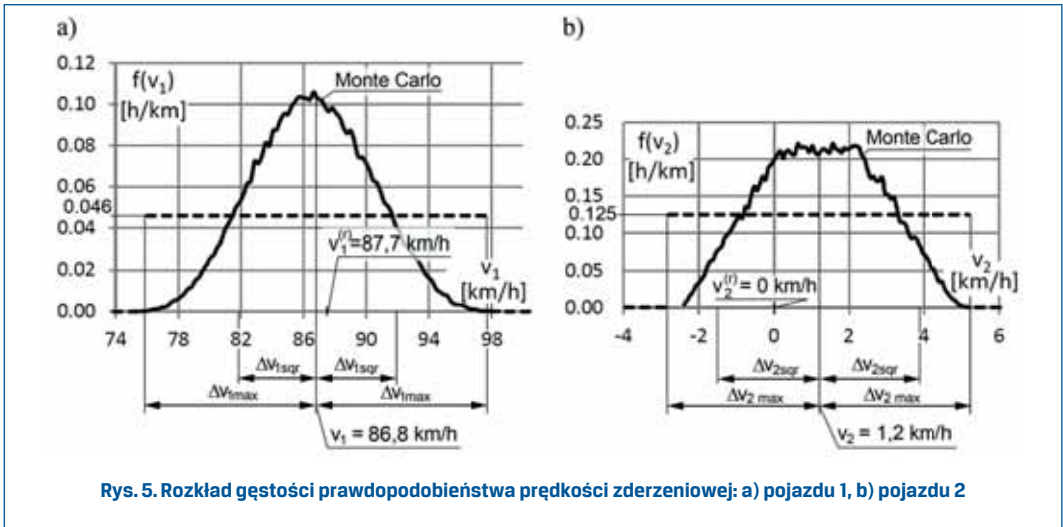
Rys. 4. Szkic miejsca zderzenia [4]

Tabela 1. Dane dla testu nr 7 z pozycji [4]

Parametr	1. Ford Taurus 1300	2 Opel Commodore GS
Odległość środka masy od osi przedniej, [m]	1,14	1,24
Rozstaw osi $L_i$ , [m]	2,58	2,672
Współczynnik przyczepności $\mu_i$	0,7±0,1	0,7±0,1
Współczynnik oporu ruchu pozderzeniowego $f_i$	0,7±0,2	0,6±0,2
Masa $m_i$ , [kg]	990±30	1220±30
Moment bezwładności $I_{zi}$ , [kgm <sup>2</sup> ]	1387±200	1877±200
Całkowity kąt obrotu pojazdu w ruchu pozderz. $\Delta\psi_i$ , [°]	42°	-13°
Prędkość końcowa $v_i''$ , [km/h]	0	0
Kierunek wektora prędkości przedzderzeniowej $\vartheta_i$ w $\{I\}$ , [°]	0,0±2,0	90,0±2,0
Kierunek wektora prędkości rozdzielenia $\vartheta_i'$ w $\{I\}$ , [°]	1,7±3,0	0,6±3,0

### Obliczenia

Jako wynik symulacji Monte Carlo uzyskano rozkłady gęstości prawdopodobieństwa prędkości  $f(v_i), i = 1, 2$ , które narysowano na rys. 5 linią ciągłą. Wartości oczekiwane (nominalne) wynoszą  $v_1 = 86,6$  km/h i  $v_2 = 1,2$  km/h, a dla porównania wartości rzeczywiste  $v_1^{(r)} = 87,7$  km/h i  $v_2^{(r)} = 0$  km/h.

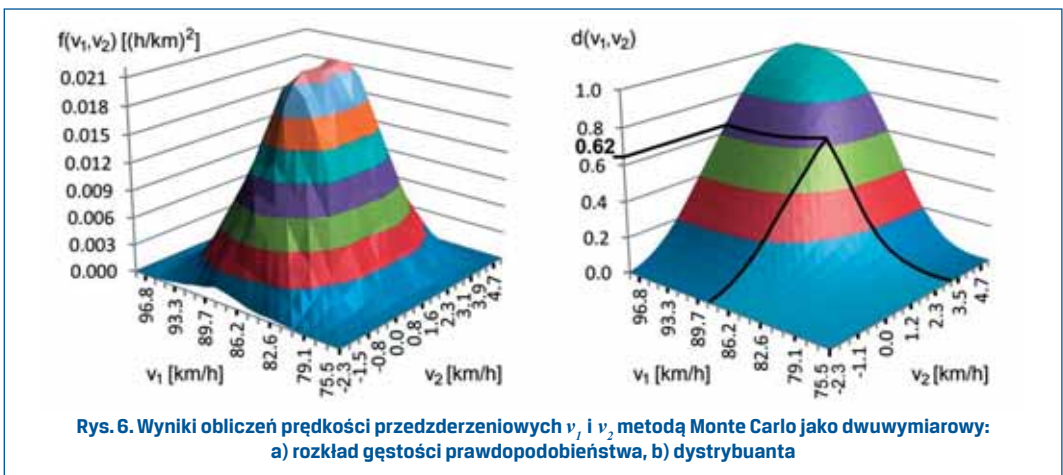


Prezentacja wyników w formie wykresów jednowymiarowych niesie ryzyko wybiórczego doboru dowolnych wartości w sposób nieskorelowany, np. w celu przekonania do swoich racji podczas postępowania sądowego. Dlatego lepszą formą z formalnego punktu widzenia jest prezentacja dwuwymiarowych rozkładów  $f(v_1, v_2)$  lub dystrybuant  $d(v_1, v_2)$ , na których prędkości  $v_1$  i  $v_2$  są wzajemnie zależne (jak na rys. 6). Prawdopodobieństwo tego, że prędkości zderzeniowe mieszczą się w przedziałach  $v_1 \in \langle a, b \rangle$  i  $v_2 \in \langle c, d \rangle$  można obliczyć ze wzoru

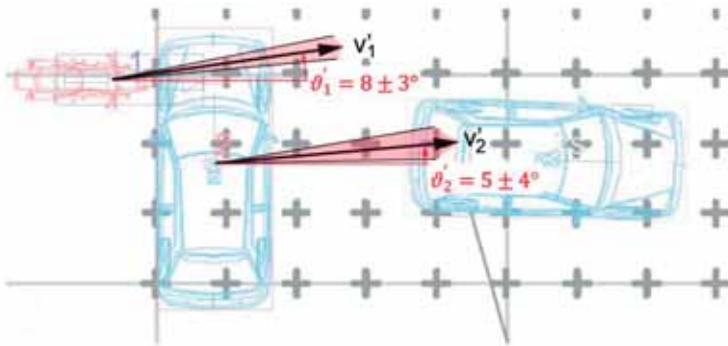
$$P_{v_1, v_2} = P(v_1 \in \langle a, b \rangle \cap v_2 \in \langle c, d \rangle) = \iint_{a, c}^{b, d} f(v_1, v_2) dv_2 dv_1, \quad (18)$$

natomiast z rys. 6b można wprost odczytać, że np.

$$P(v_1 \leq 88 \text{ km/h} \cap v_2 \leq 3 \text{ km/h}) = 0,62.$$





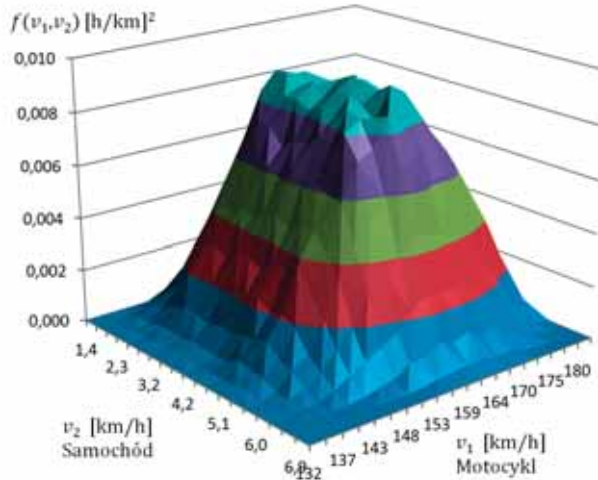


Rys. 8. Kierunki wektorów prędkości rozdzielenia przyjęte do obliczeń

Masa manekina-motocyklisty wynosiła  $m_0 = 82$  kg. Ponieważ manekin po uderzeniu przeleciał ponad pokrywę silnika samochodu nie zaczepiając o nią, korzystając z zaleceń Priestera [18] do obliczeń za pomocą zasady zachowania pędu przyjęto jedną, zredukowaną masę motocykla wraz z motocyklistą  $m_j \approx m_j + 0,3 \cdot m_0 = 207$  kg ( $\pm \Delta m_j = 30$  kg).

Przeprowadzono symulację Monte Carlo, w której zastosowano ten sam algorytm obliczeń rekonstrukcyjnych, co w przykładzie 1, otrzymując wyniki w postaci dwuwymiarowego rozkładu gęstości prawdopodobieństwa, pokazanego na rys. 9. Prędkości przedzderzeniowe mieściły się w zakresach:  $v_1 = 131 \div 183$  km/h i  $v_2 = 1,3 \div 7,1$  km/h, natomiast ich wartości oczekiwane (nominalne) wynosiły:  $v_1 = 162$  km/h i  $v_2 = 4$  km/h (uwaga: rozkład nie jest symetryczny, stąd wartości oczekiwane nie są wartościami średnimi z całych zakresów niepewności wyników). Gdyby z kolei przeprowadzić obliczenia jednorazowe dla wartości nominalnych, to wyniki wraz z niepewnościami średnimi kwadratowymi miałyby postać  $v_1 = 162 \pm 24$  km/h i  $v_2 = 4 \pm 2$  km/h. Nasuwa się więc typowy wniosek: „symulacja Monte Carlo pozwoliła zawęzić obszar wyników realnych poprzez odrzucenie skrajnych, mało prawdopodobnych rejonów”. Tym razem jest on jednak nad wyraz pochoptny, ponieważ okazuje się, że zmierzone prawdziwe prędkości wynosiły  $v_1^{(r)} = 122$  km/h i  $v_2^{(r)} = 0$  km/h, czyli błąd wartości oczekiwanej  $\Delta v_j = 100 \cdot (v_j - v_j^{(r)}) / v_j^{(r)}$  sięgnął aż 33%.

Pomimo bardzo sugestywnej postaci rozkładu gęstości prawdopodobieństwa, wynik symulacji Monte Carlo jest daleki od rzeczywistości, czego główny powód tkwi w nieadekwatnym modelu zderzenia – zastosowaniu zasady zachowania pędu do zderzenia silnie mimośrodowego. Jak widać, sama metoda Monte Carlo nie służy do poprawienia niedoskonałości modelu deterministycznego, a jedynie do uzyskania klarownej postaci wyniku dla wszelkich kombinacji danych z założony pasm niepewności.

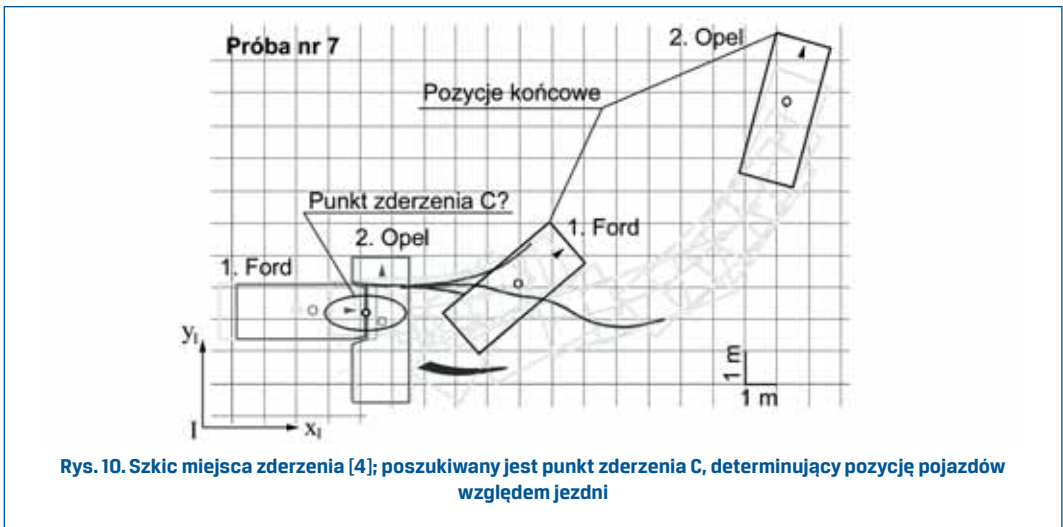


**Rys. 9. Rozkład gęstości prawdopodobieństwa prędkości przedzderzeniowych otrzymany w wyniku symulacji Monte Carlo (według zasady zachowania pędu)**

W tej sytuacji konieczne jest skorzystanie z pełnej klasycznej teorii zderzenia (np. modelu Kudlicha-Slibara, patrz [26]). Po przeprowadzeniu skorygowanych obliczeń prędkości będą wynosić  $v_1 = 123 \pm 17$  km/h i  $v_2 = 9 \pm 3$  km/h. Prędkość  $v_1$  spadła więc do zakresu realnego. Uwaga: w przypadku małych prędkości (jak  $v_2$ ) konfrontowanych z prędkościami bardzo dużymi (jak  $v_1$ ), nie należy przywiązywać zbyt dużej wagi do wartości liczbowych  $v_2$ , lecz przyjąć że pojazd 2 poruszał się z nieokreśloną małą prędkością bliską 0 lub stał.

#### 4. Przykład 4 – poszukiwanie miejsca zderzenia

Rozważmy intrygujący problem analitycznego ustalenia miejsca zderzenia dwóch pojazdów, w przypadku gdy na jezdni nie ujawniono jednoznacznych śladów. Sięgnijmy do tej samej próby zderzeniowej nr 7 [4], którą badano w podpunkcie 3.1, ale w taki sposób, jakby znane były tylko deformacje samochodów, ich pozycje końcowe oraz to, że zderzyły się w pozycji wzajemnie prostopadłej. Zadaniem jest analityczne ustalenie pozycji zderzeniowej względem jezdni. Szkic tej sytuacji pokazano na rys. 10 (por. rys. 4).



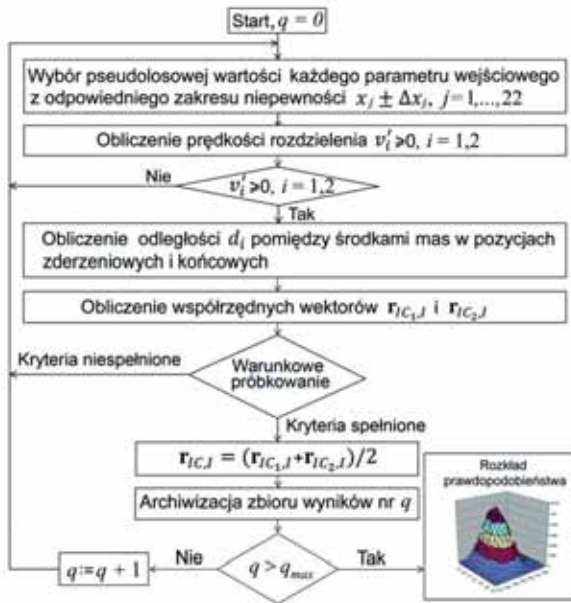
Skorzystajmy z modelu matematycznego podobnego do tego zastosowanego w pracy [24]. Miejscem zderzenia jest wybrany punkt C leżący na płaszczyźnie stycznej pojazdów przyłożonych do siebie zgodnie z odkształceniami. Ponieważ jego pozycja względem obu pojazdów jest stała, obliczenie jego współrzędnych będzie równoznaczne z ustaleniem miejsca zderzenia.

Skrócony algorytm symulacji Monte Carlo będzie obejmował następujące kroki powtórzone  $n$  razy:

1. Wybór pseudolosowej wartości każdego parametru wejściowego z odpowiedniego zakresu niepewności. Uwaga: do obliczenia prędkości rozdzielenia  $v_i'$  w kroku 2 muszą być znane prędkości przedzderzeniowe  $v_i$ , dlatego założmy, że zostały one zarejestrowane przez EDR (*Event Data Recorder*) i wynoszą  $v_1 = 87,8 \pm 0,5$  km/h,  $v_2 = 0,0 \pm 0,5$  km/h (bez tych danych dalsze obliczenia nie miałyby sensu).
2. Obliczenie prędkości rozdzielenia  $v_i'$  obydwóch pojazdów za pomocą modelu McHenry'ego.
3. Obliczenie odległości przebytych przez środki mas w ruchu pozderzeniowym.
4. Obliczenie współrzędnych środków mas w chwili zderzenia.
5. Obliczenie współrzędnych punktu zderzenia C.
6. Archiwizacja wyników.
7. Skok do kroku 1.

Schemat blokowy obliczeń pokazano na rys. 11.

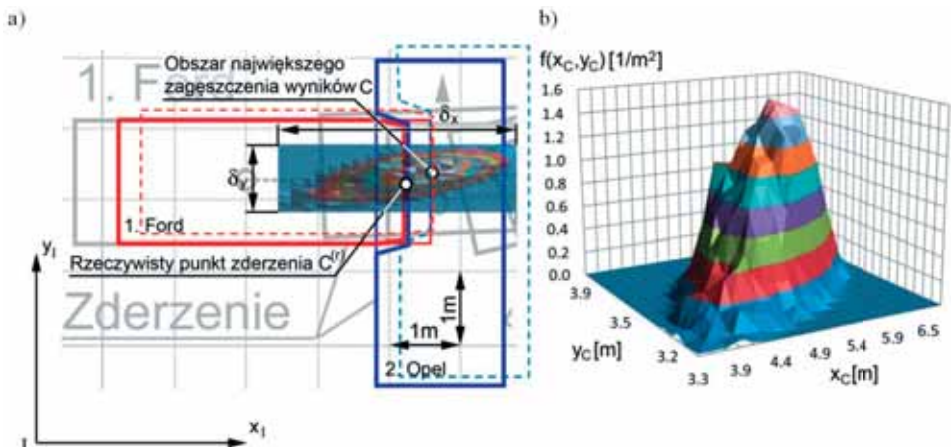
Wyniki dla  $n = 20000$  przedstawiono na rys. 12 w postaci dwuwymiarowego rozkładu gęstości prawdopodobieństwa. Na rysunku a) jest on pokazany w rzucie poziomym na tle rzeczywistej konfiguracji zderzeniowej pojazdów (kontury pojazdów narysowane liniami ciągłymi) i rzeczywistego punktu zderzenia. Największe zagęszczenie wyników uzyskano w punkcie



Rys. 11. Schemat blokowy symulacji Monte Carlo

o współrzędnych  $C = [5,51 \text{ m}; 3,77 \text{ m}]$ , a odpowiadające mu kontury pojazdów narysowano liniami przerywanymi. Całkowita rozpiętość rozkładu wynosi  $\delta_x = 3,31 \text{ m}$  i  $\delta_y = 0,96 \text{ m}$ .

Obliczenia za pomocą pełnej klasycznej teorii zderzenia (modelu Kudlicha-Slibara) dały wyniki podobnej klasy niepewności, dlatego nie ma potrzeby ich przytaczania.



Rys. 12. Rozkład gęstości prawdopodobieństwa pozycji punktu zderzenia na jezdni uzyskany w symulacji Monte Carlo (z zastosowaniem zasady zachowania pędu i metody McHenry'ego): a) rzut poziomy, b) widok przestrzenny

Obszar największego zagęszczenia wyników jest oddalony o ok. 0,39 m w prawo od rzeczywistego punktu zderzenia  $C^0$ . Natomiast rozkłady pozwalają znacząco zawęzić obszar wyników najbardziej prawdopodobnych. Dla odróżnienia, w przypadku obliczeń jednorazowych niepewności maksymalne współrzędnych wynosiłyby  $\Delta x_c \approx \delta_x/2$  i  $\Delta y_c \approx \delta_y/2$  i należałoby przyjąć każdy rezultat wewnątrz przedziałów  $(x_c - \Delta x_c) < x_c < (x_c + \Delta x_c)$  i  $(y_c - \Delta y_c) < y_c < (y_c + \Delta y_c)$  za jednakowo prawdopodobny.

Poszukiwane wartości współrzędnych są bardzo wrażliwe na prędkości przedzderzeniowe oraz kierunki wektorów prędkości przed i po zderzeniowych, czyli na te dane, które najtrudniej ustalić. W związku z tym do rezultatów symulacji Monte Carlo należy podchodzić bardzo ostrożnie, pamiętając że obszar największej koncentracji wyników to tylko rejon najczęściej uzyskiwanych wyników obliczeń dla przyjętych danych i zastosowanych modeli matematycznych. Jeżeli pożądana dokładność wynosi 0,10–0,50 m (problem przekroczenia osi jezdni przez któryś z pojazdów), to niepewność obliczeń rzędu kilku metrów całkowicie dyskwalifikuje metodę.

Analizując przypadek rzeczywisty wskazane będzie porównanie ze sobą wyników otrzymanych za pomocą różnych modeli ruchu po zderzeniowego oraz zderzenia (por. [21]), a także przeprowadzenie kontrolnych symulacji dynamicznych, choć i tu nie należy się spodziewać miarodajnych rozwiązań.

## 5. Przykład 5 – symulacja zderzenia i ruchu po zderzeniowego

Powróćmy do postawionego w podpunkcie 3.1 problemu obliczenia prędkości przedzderzeniowych. Tym razem zadanie będzie rozwiązane za pomocą programu *PC-Crash* poprzez obliczenie parametrów rozdzielania na podstawie parametrów przedzderzeniowych i symulację dynamiki ruchu po zderzeniowego pojazdów. Zbiór danych przedzderzeniowych zostanie zidentyfikowany za pomocą symulacji Monte Carlo.

Zastosowano model zderzenia Kudlicha-Slibara i model dynamiki ruchu pojazdu o 10 stopniach swobody. Proces poszukiwania rozwiązań został zautomatyzowany z wykorzystaniem metody Monte Carlo i narzędzia optymalizacyjnego [15]. Cel polega na znalezieniu takiego zbioru wartości wejściowych, dla którego funkcja jakości (czyli błąd względny ważony)

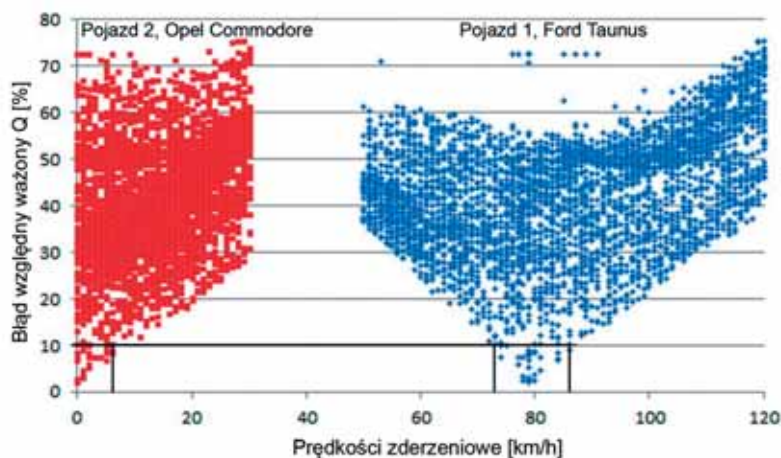
$$Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (w_i q_i)^2}{\sum_{i=1}^n w_i^2}} 100\% \quad (19)$$

osiągnie minimum  $Q_{min}$ , przy czym:  $q_i$  – względna różnica pomiędzy rzeczywistą, a uzyskaną w symulacji wartością  $i$ -tego parametru,  $w_i$  – współczynnik wagowy  $i$ -tego parametru.

Zastosowano ten sam zbiór danych podstawowych co w podpunkcie 3.1, rozszerzając go o dane uzupełniające parametryzację modelu dynamiki ruchu. Wyniki obliczeń w postaci zbioru punktów reprezentowanych przez błędy  $Q$  i odpowiadające im prędkości zderzeniowe, uzyskanych w 4000 kroków pokazano na rys. 13. Jeżeli przyjąć, że błąd  $Q$  nie powinien



przekraczać 10%, to w 48 na 4000 kroków  $v_1 = 74 \div 86$  km/h i  $v_2 = 0 \div 8$  km/h. Największą zgodność pozycji końcowych wirtualnych z rzeczywistymi ( $Q = 2\%$ ), osiągnięto dla  $v_1 = 79$  km/h i  $v_2 = 0$  km/h.



Rys. 13. Wartości funkcji jakości w zależności od prędkości przedzderzeniowych uzyskane w symulacji Monte Carlo

Fakt, że wartość oczekiwana prędkości pojazdu 1 (86,8 km/h) obliczona w klasycznych obliczeniach rekonstrukcyjnych (w podpunkcie 3.1) była bliższa rzeczywistej wartości (87,7 km/h) niż obliczona w programie *PC-Crash* (79,0 km/h) jest kwestią przypadku. Symulacje, jako wirtualne eksperymenty, dają nieporównanie bardziej kompleksowy pogląd na wpływ różnych parametrów niż proste równania pędu i wzory McHenry'ego.

## 6. Przykład 6 – potrącenie pieszego

Tym razem przeprowadźmy obliczenia kinematyczne dotyczące fazy przedkolizyjnej potrącenia pieszego przez samochód. Celem zasadniczym będzie ustalenie czy kierowca spóźnił się z reakcją na początek niebezpieczeństwa, jakim było wkroczenie pieszego na jezdnię. Matematycznie problem będzie ujęty następująco:

Spóźnienie reakcji  $\tau$  stanowi odstęp czasowy pomiędzy początkiem niebezpieczeństwa (czyli momentem, w którym powinien zacząć reagować przeciętny, poprawny i sprawny kierowca – np. wejściem pieszego na jezdnię), a początkiem reakcji kierowcy uczestniczącego w wypadku. Inaczej mówiąc, jest to przedział czasu, o jaki kierowca spóźnił się z reakcją w stosunku do wymaganego początku reakcji. Parametr ten zdefiniowano wzorem

$$\tau = t_p - (t_r + t_n + t_{h1}), \quad (20)$$

gdzie:  $t_p$  – czas zagrożenia, tzn. okres czasu pomiędzy obiektywnym początkiem zagrożenia z punktu widzenia kierowcy (np. wejściem pieszego na jezdnię) a potrąceniem,  $t_r$  – czas reakcji przeciętnego, poprawnego i sprawnego kierowcy,  $t_n$  – czas narastania opóźnienia hamowania,  $t_{h1}$  – czas hamowania przed uderzeniem.

Jednym z kluczowych parametrów decydujących o niepewności wyników jest czas reakcji, który zależy od wielu czynników, takich jak np. stopień komplikacji sytuacji drogowej, czas zagrożenia (określany też skrótem TTC – *Time to Collision*), pora doby (dzień, noc), zaskoczenie, „szum” informacyjny w otoczeniu drogi [8], [9].

Dla  $\tau > 0$  kierowca spóźnił się z decyzją o hamowaniu w stosunku do początku zagrożenia, natomiast  $\tau \leq 0$  będzie oznaczało, że kierowca zareagował bezzwłocznie.

Po wykonaniu stosownych przekształceń (patrz [25]), można wyprowadzić wzór

$$\tau = \frac{\sqrt{2a_h s_{h2}} \left(1 + \frac{m_p}{m_s}\right) - \sqrt{2a_h \left[s_{h1} + s_{h2} \left(1 + \frac{m_p}{m_s}\right)^2\right]}}{a_h} - t_n - t_r + \frac{d_p}{v_p}, \quad (21)$$

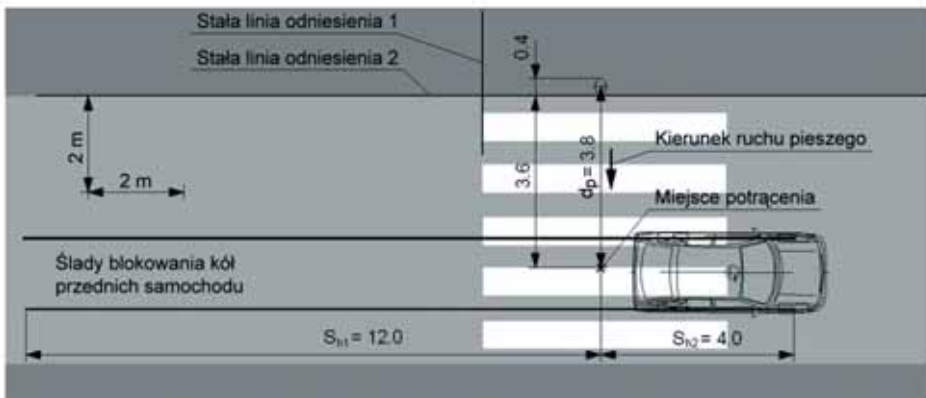
gdzie:  $d_p$  – droga przebyta przez pieszego w czasie zagrożenia, czyli od wejścia na jezdnię do potrącenia,  $v_p$  – prędkość pieszego,  $s_{h1}$  – droga hamowania przed uderzeniem,  $s_{h2}$  – droga hamowania po uderzeniu,  $a_h$  – opóźnienie pojazdu podczas hamowania,  $m_p$  – masa pieszego,  $m_s$  – masa samochodu.

Dane przyjęte do obliczeń wraz z przedziałami niepewności zgromadzono w tabeli 3 oraz pokazano na rys. 14. Zasadniczą trudność sprawia fakt istnienia dwóch skrajnie

**Tabela 3. Dane przyjęte do obliczeń**

Parametr	Wartość
$a_h$ [m/s <sup>2</sup> ]	(0,75±0,04)g
$d_p$ [m]	3,8±0,2
$a_n = a_{h/s}$ [m/s <sup>2</sup> ]	(0,38±0,02)g
$t_n$ [s]	0,20±0,02
$s_{h1}$ [m]	12,00±0,10
$s_{h2}$ [m]	4,00±0,05
$t_r$ [s]	0,85±0,15
$m_p$ [kg]	68±2
$m_s$ [kg]	1200±20
<u>dla wersji pieszego</u> $v_{p1}$ [m/s] (prędkość wolnego kroku pieszego, mężczyzny w wieku 29 lat, obejmująca cały zakres wynikający z kompilacji wyników badań różnych autorów, (patrz [26]))	1,13±0,16
<u>dla wersji kierowcy</u> $v_{p2}$ [m/s] (prędkość biegu pieszego według tych samych źródeł)	3,22±0,78

odmiennych wersji prędkości ruchu pieszego (mężczyzny w wieku 29 lat): według niego samego przechodził „wolnym krokiem”, a według kierowcy „przebiegał”.



Rys. 14. Szkic miejsca wypadku (wszystkie wymiary w [m])

Dla uproszczenia interpretacji i zmniejszenia nakładu pracy, zamiast rozdzielać obliczenia osobno dla wersji 1, osobno dla wersji 2, przyjęto jeden, szeroki przedział prędkości pieszego, pokrywający cały zakres: od minimum, dla kroku wolnego do maksimum, dla biegu (por. [5], [26])

$$v_p = 2,49 \pm 1,52 \text{ m/s.}$$

Zakres spóźnienia reakcji  $\tau$  został obliczony trzema metodami: analityczną, graficzną i Monte Carlo.

### Metoda analityczna

Zgodnie z metodą analityczną wartość nominalna  $\tau$  oraz niepewność maksymalna  $\Delta\tau_{max}$  i średnia kwadratowa  $\Delta\tau_{sqr}$  wyniosły

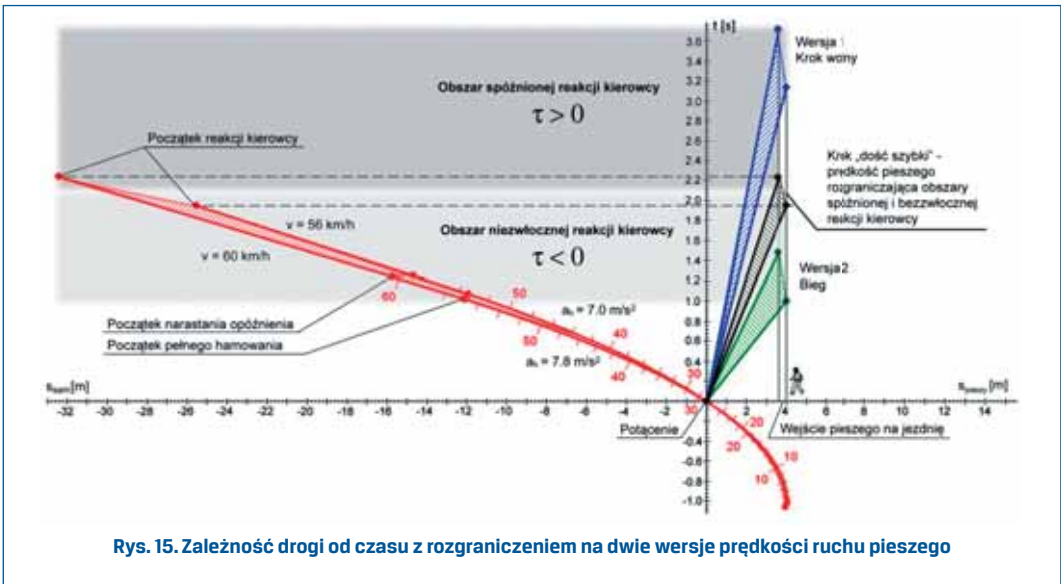
$$\tau \pm \Delta\tau_{max} = -0,53 \pm 1,22 \text{ s,}$$

$$\tau \pm \Delta\tau_{sqr} = -0,53 \pm 0,95 \text{ s.}$$

Ponieważ wynik obejmuje wartości dodatnie („kierowca spóźnił się”) i ujemne („kierowca nie spóźnił się”), kwestia spóźnienia reakcji kierowcy jest nierozstrzygnięta. Ponadto każde spóźnienie reakcji wewnątrz przedziałów  $\tau \pm \Delta\tau_{max}$  lub  $\tau \pm \Delta\tau_{sqr}$  jest równie prawdopodobne.

## Metoda graficzna

Wyniki według metody graficznej pokazano na rys. 15. Również tu każda wartość wewnątrz przedziału  $-1,0 < \tau [s] < 3,7$  jest jednakowo prawdopodobna.



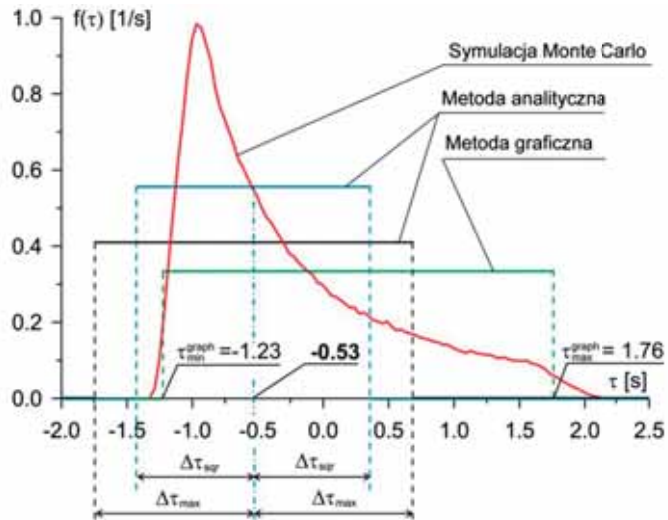
## Monte Carlo

Przeprowadzono symulację Monte Carlo, egzekwując wzór (21) 400000 razy lecz przy każdorazowej, pseudolosowej modyfikacji wartości każdej z danych wejściowych wewnątrz przedziałów niepewności. Przyjęto jednostajne rozkłady wszystkich danych, aby nie popaść w zarzut arbitralnego odcinania rejonów brzegowych.

Na rys. 16 pokazano wyniki obliczeń w postaci rozkładu gęstości prawdopodobieństwa o kształcie silnie niesymetrycznej krzywej dzwonowej. Wartość oczekiwana spóźnienia reakcji (czyli  $t_a$ , w której uzyskano największe zagęszczenie wyników) wynosi jak w metodzie analitycznej  $\tau = -0,53$  s, ale patrząc na cały rozkład, wyniki mieszczą się zakresie  $-1,3 < \tau [s] < 2,1$ , czyli nadal nie dają rozstrzygnięcia.

## Porównanie i dyskusja wyników

Dla porównania, na rys. 16 narysowano dodatkowo jednostajne rozkłady gęstości prawdopodobieństw z metod analitycznej i graficznej (według wzoru (4), po zastąpieniu  $v$  przez  $\tau$ ).



**Rys. 16** Porównanie rozkładów gęstości prawdopodobieństw opóźnienia reakcji  $\tau$  uzyskanych metodami: analityczną, graficzną i Monte Carlo

Zakresy wyznaczone za pomocą metody graficznej i Monte Carlo praktycznie pokrywają się i z natury ogarniają całą rozpiętość możliwych wyników. Zaletą metody Monte Carlo jest jednak to, że pozwala dodatkowo opracować wyniki w ujęciu statystycznym.

W przypadku metody analitycznej zakres jest węższy i przesunięty w stronę piku krzywej rozkładu. Efekt ten wynika z linearyzacji nieliniowego równania (21) wokół wartości nominalnych podczas obliczania współczynników wrażliwości (czyli pochodnych cząstkowych potrzebnych do obliczenia niepewności  $\Delta\tau_{max}$  i  $\Delta\tau_{sqr}$  wyników) i zastosowania dużych wartości niepewności danych, a przede wszystkim prędkości ruchu pieszego.

Stopień symetrii rozkładu gęstości prawdopodobieństwa w metodzie Monte Carlo będzie się zwiększać wraz z zawężeniem przedziału możliwej prędkości pieszego, a więc jeżeli w konkretnej sprawie będzie wiadomo, że pieszy szedł np. krokiem szybkim, efekt ten zaniknie, nie powodując kłopotów interpretacyjnych.

Łatwo zauważyć, że obliczenia analityczne, obejmujące jedynie przedziały  $\tau \pm \Delta\tau_{max}$  lub  $\tau \pm \Delta\tau_{sqr}$ , pomijają niektóre rozwiązania (z prawej strony wykresów na rys. 16), a dopuszczają rozwiązania nadmiarowe (z lewej strony wykresów). Wady tej pozbawione są dwie pozostałe metody.

W przypadku dużego rozrzutu danych wejściowych wprowadzenie przemyślanego kryterium matematycznego pozwala przedstawić przejrzyste wnioski, które jakościowo będą identyczne, niezależnie od zastosowanej metody obliczeń. Kryterium to ograniczy konieczność wielokrotnego powtarzania obliczeń dla rozmaitych tworzonych naprędce „podwersji” przebiegu wypadku. Przykład takiego kryterium przedstawiono w artykule [25].

## 7. Wnioski

1. Metoda Monte Carlo polega na wielokrotnym powtarzaniu obliczeń za pomocą tego samego deterministycznego modelu matematycznego, ale w taki sposób, że za każdym razem wartości poszczególnych danych wybierane są pseudolosowo z zadanych zakresów niepewności, wypełniając niemal wszelkie możliwe kombinacje. Dzięki temu wyniki reprezentowane są przez rozkład gęstości prawdopodobieństwa o kształcie zbliżonym do krzywej dzwonowej.
2. Metoda Monte Carlo nie służy do poprawiania niedoskonałości modelu deterministycznego, lecz jest narzędziem pozwalającym uzyskać wynik w postaci ułatwiającej interpretację statystyczną i analizę niepewności. Pozwala na zawężenie wyników do zakresów realnych poprzez odrzucenie mało prawdopodobnych rejonów skrajnych.
3. **Interpretując wyniki symulacji Monte Carlo trzeba pamiętać, że obszar największej koncentracji rezultatów to tylko rejon najczęściej uzyskiwanych odpowiedzi dla przyjętych danych i zastosowanych modeli deterministycznych, a niekoniecznie odzwierciedlenie prawdy. Kwestią fundamentalną jest opracowanie adekwatnego modelu matematycznego, ponieważ model fałszywy da fałszywsze wyniki, ale w sugestywnej formie.**
4. Obliczenia według prostych zależności łatwo wykonać za pomocą arkuszy kalkulacyjnych (np. MS Excel).
5. W rekonstrukcji wypadku drogowego dla potrzeb sądowych wskazane jest wprowadzanie większości danych w postaci rozkładów jednostajnych, ponieważ nie da się zagwarantować, że konkretny parametr w konkretnym przypadku nie przyjął akurat wartości skrajnej. Np. jakkolwiek w sensie statystycznym pomiary odległości w terenie podlegają rozkładowi normalnemu [2], nigdy nie wiadomo jak starannie policjant zmierzył daną odległość. Z kolei w zastosowaniach statystycznych i uogólnieniach wykorzystywanie rozkładów rzeczywistych parametrów wejściowych jest jak najbardziej wskazane.

## Literatura

- [1] BARTLETT, W.: *Conducting Monte Carlo analysis with spreadsheet programs*. SAE Technical Paper No. 2003-01-0487, Warrendale PA 2003.
- [2] BARTLETT, W., WRIGHT, W., MASORY, O., BRACH, R., BAXTER, A., SCHMIDT, B., NAVIN, F., STANARD, T.: *Evaluating the uncertainty in various measurement tasks common to accident reconstruction*. SAE Technical Paper No. 2002-01-0546, Warrendale PA 2002.
- [3] BRACH, R., M., BRACH, R., M.: *Vehicle Accident Analysis and Reconstruction Methods*. SAE Publisher. Warrendale PA 2005.
- [4] BURG, H., LINDENMANN, M.: *Unfallversuche*. Verlag INFORMATION Ambis. Kippenheim 1982.
- [5] CIĘPKA, P., REZA A., ZĘBALA J.: *Przyspieszenia w ruchu pieszych. Nowe wyniki badań*. Paragraf na drodze, Wydawnictwo Instytutu Ekspertyz Sądowych, Numer Specjalny, 2011, ss. 91–99.
- [6] *CRASH3 Technical manual*. Accident Investigation Division, NCSA, NHTSA, 1986.

- 
- [7] FLECK, G., DAILY, J.: *Sensitivity of Monte Carlo modeling in crash reconstruction*. SAE Journal of Passenger Cars. Mechanical Systems, SAE, Vol. 3, No. 1, 2010, ss. 100–112.
- [8] GUZEK, M.: *Czas reakcji prostej i złożonej dla grupy mężczyzn w różnym wieku – wyniki badań z wykorzystaniem refleksometru*. Archiwum Motoryzacji, Vol. 65, No 3. 2014, ss. 97–106.
- [9] GUZEK, M., LOZIA, Z., JURECKI, R., STAŃCZYK, T., L.: *Badania zachowania się kierowców w sytuacjach przedwypadkowych realizowane w symulatorze jazdy samochodem*, X Międzynarodowa Konferencja Problemy rekonstrukcji wypadków drogowych, Kraków, 2006. Wydawnictwo Instytutu Ekspertyz Sądowych, Kraków 2006, ss. 139–156.
- [10] GUZEK, M., LOZIA, Z.: *Uncertainty study of road accident reconstruction – computational methods*. SAE Transaction 2005, Journal of passenger cars: mechanical systems 2005. SAE, Vol. 114, Section 6, 2005, ss. 1342–1356 (także: SAE Technical Paper No. 2005-01-1195).
- [11] KIMBROUGH, S.: *Determining the relative likelihoods of competing scenarios of events leading to an accident*. SAE Technical Paper No. 2004-01-1222, Warrendale PA 2004.
- [12] KOST, G., WERNER, S. M.: *Use of Monte Carlo simulation techniques in accident reconstruction*. SAE Technical Paper No. 940719, Warrendale PA 1994.
- [13] MARQUARD, E.: *Fortschritte in der Berechnung von Fahrzeug – Zusammenstößen*. ATZ Automobiltechnische Zeitschrift, Springer Verlag, Heft 3, 1968.
- [14] METROPOLIS, N.: *The beginnings of the Monte Carlo method*. Los Alamos Science, Special Issue, 1987, 125–130.
- [15] MOSER, A., STEFFAN, H.: *Automatic optimization of pre-impact parameters using post-impact trajectories and rest positions*. SAE Technical Paper No. 980373, Warrendale PA 1998.
- [16] *Nárazové skúšky motocykel – osobné motorové vozidlo (78 km/h – 122 km/h)*. Ing.-Büro Priester – Weyde, Saarbrücken 2001.
- [17] *PC-Crash. A simulation program for vehicle accidents. Manual. Version 10.1*. Dr. Steffan Datentechnik, Linz 2014.
- [18] PRIESTER, J., KASANÍČKÝ, G.: *Unfälle mit Zweirädern* [w:] BURG H., MOSER A. [red.]: *Handbuch Verkehrsunfallrekonstruktion*. 2. Auflage. Vieweg+Teubner Verlag. Wiesbaden 2009.
- [19] PROCHOWSKI, L., UNARSKI, J., WACH, W., WICHER, J.: *Podstawy rekonstrukcji wypadków drogowych*, Seria: Pojazdy samochodowe. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności. Warszawa 2008.
- [20] SPEK, A.: *Implementation of Monte Carlo technique in a time-forward vehicle accident reconstruction program*. VII Międzynarodowa Konferencja Problemy rekonstrukcji wypadków drogowych, Kraków, 2004. Wydawnictwo Instytutu Ekspertyz Sądowych, Kraków 2004, ss. 233–238.
- [21] STAWICKI, R., WICHER, J.: *Modelowanie zderzenia samochodów oparte na wykorzystaniu zasady pędu i krętu oraz przykłady zastosowań*. Konferencja „Rozwój techniki samochodowej a ubezpieczenia komunikacyjne”, Radom, 2006. Wyższa Szkoła Biznesu im. bp. Jana Chrapka w Radomiu, Radom, 2006, ss. 349–395.
- [22] WACH, W.: *Wiarygodność strukturalna rekonstrukcji wypadków drogowych*. Wydawnictwo Instytutu Ekspertyz Sądowych. Kraków 2014.
- [23] WACH, W.: *Analiza zarzucenia pojazdu po zderzeniu*. Paragraf na drodze, Wydawnictwo Instytutu Ekspertyz Sądowych, nr 9, 2000, ss. 33–36.
- [24] WACH, W., UNARSKI J.: *Determination of collision location – uncertainty analysis by means of Monte Carlo simulation*. The 16th Annual Congress of the European Association for Accident Research and Analysis (EVU), Kraków, 2007. Institute of Forensic Research Publishers, Kraków 2007, ss. 73–93.
- [25] WACH, W., UNARSKI, J.: *Uncertainty analysis of the preimpact phase of a pedestrian collision*. SAE Technical Paper No. 2007-01-0715, Warrendale PA 2007.
- [26] WIERCINSKI, J., REZA, A. [red.]: *Wypadki drogowe. Vademecum biegłego sądowego*. Wydanie 2. Wydawnictwo Instytutu Ekspertyz Sądowych. Kraków 2006.
- [27] WOOD, D. P., O'RIORDAIN, S.: *Monte Carlo simulation methods applied to accident reconstruction and avoidance analysis*. SAE Technical Paper No. 940720, Warrendale PA 1994.d