

Zbigniew WESOŁOWSKI
Wojskowa Akademia Techniczna
ul. Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa 49
E-mail: zwesolowski@wat.edu.pl

Symulacja procesu eksploatacji systemów

1 Wprowadzenie

Współczesne systemy techniczne znajdują coraz szersze zastosowanie w wielu, niejednokrotnie kluczowych aspektach działalności człowieka. Względem takich systemów zwiększone są wymagania niezawodnościowe, co z jednej strony wynika z potencjalnych konsekwencji ich niezdatności, zaś z drugiej - z trudności ich obsługi. Jednym z istotnych zagadnień teorii i inżynierii niezawodności jest opracowanie adekwatnych metod ilościowej analizy niezawodności tego rodzaju systemów. Złożoność wielu współczesnych systemów technicznych oraz ich wielkość, np. systemy rozproszone są złożone z wielu komputerów rozmieszczonych w odległych geograficznie miejscach, komplikują, a w wielu przypadkach wręcz uniemożliwiają przeprowadzenie informacyjnych badań niezawodnościowych obejmujących całe systemy. Konsekwencją tych uwarunkowań jest to, iż bezpośrednie stosowanie klasycznych metod analizy niezawodnościowej [1, 5, 6, 7] jest trudne, a niekiedy wręcz niemożliwe. Jednym z podejść umożliwiających zgromadzenie danych statystycznych o dostatecznie dużych rozmiarach jest symulacja komputerowa [2, 3, 4, 8, 9]. Stosowanie tej metody wymaga opracowania modelu niezawodnościowego i modelu symulacyjnego badanego systemu.

Wprowadźmy oznaczenia: \mathbb{R} - zbiór liczb rzeczywistych, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty) \subset \mathbb{R}$, \mathbb{N} - zbiór liczb naturalnych, $T = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ - zbiór wartości parametrów czasowych, $N(\mu, \sigma^2)$ - rozkład normalny z wartością średnią μ i wariancją σ^2 , $W(\alpha, \beta)$ - rozkład Weibulla z parametrem kształtu α ($\alpha > 0$) i parametrem skali β ($\beta > 0$). Niech $\Delta = (\Omega, \Sigma, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną, na której zostaną zdefiniowane wszystkie zmienne losowe stosowane w modelowaniu niezawodnościowym systemu. W pracy przyjęto anglosaską notację zapisu liczb rzeczywistych.

2 Model niezawodnościowy systemu

Model niezawodnościowy systemu to przybliżony opis procesu zmian w czasie stanów niezawodnościowych elementów struktury niezawodnościowej oraz stanów niezawodnościowych systemu jako całości. Model ten określa uporządkowana dwójka:

$$S = (\mathbb{G}, \mathbb{D}),$$

gdzie: \mathbb{G} jest modelem struktury niezawodnościowej systemu, \mathbb{D} jest modelem dynamiki systemu.

Model struktury niezawodnościowej systemu

Strukturą niezawodnościową systemu nazywamy zbiór elementów oraz sposób połączenia tych elementów odwzorowujący wpływ ich niezdatności na niezdatność systemu.

Definicja 1. Spójny acykliczny graf skierowany,

$$\mathbb{G} = (V, R, \mathbf{A}),$$

gdzie: $V = \{s, E, t\}$ jest zbiorem wierzchołków, $R \subseteq V \times V$ jest zbiorem krawędzi, \mathbf{A} jest zbiorem stanów niezawodnościowych wierzchołków, nazywamy modelem struktury niezawodnościowej systemu lub strukturą niezawodnościową systemu (lub krótko: strukturą lub grafem), jeżeli:

- wyodrębniono w nim zbiór wierzchołków $E = \{e_1, \dots, e_{m_E}\}$ nazywany zbiorem elementów operacyjnych struktury niezawodnościowej systemu;
- wyróżniono w nim dwa wierzchołki pomocnicze, źródło s i ujście t ;
- źródło s i ujście t są niezawodne;
- istnieje co najmniej jedna ścieżka od s do t ;
- wszystkim wierzchołkom przyporządkowano zbiór stanów niezawodnościowych $\mathbf{A} = A^s \times A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{m_E} \times A^t$, gdzie: A^s jest zbiorem stanów niezawodnościowych źródła s ; A_k jest zbiorem stanów niezawodnościowych wierzchołka $e_k \in E$, $k = 1, \dots, m_E$; A^t jest zbiorem stanów niezawodnościowych ujścia t .

□

Niech $K = \{1, \dots, m_E\}$ będzie zbiorem numerów elementów ze zbioru E . Niech $P = \{p_1, \dots, p_{m_P}\}$ będzie zbiorem ścieżek grafu \mathbb{G} przebiegających od źródła s do ujścia t . Ponieważ \mathbb{G} jest grafem spójnym, to dla każdego elementu $e \in E$ istnieje ścieżka $p : s \rightsquigarrow e \rightsquigarrow t$.

Przyjmijmy, iż system i elementy ze zbioru E są dwustanowe w sensie niezawodności [5, 10]. Przyjmijmy, że cyfra 1 oznacza stan zdatności, a cyfra 0 - stan niezdatności wierzchołka ze zbioru V lub systemu. Zatem zbiory A^s i A^t przybierają postacie $A^s = A^t = \{1\}$. Z kolei, zbiory A_1, A_2, \dots, A_{m_E} przybierają formy $A_k = \{0, 1\}$ dla $k \in K$. Niech $B = \{0, 1\}$ będzie zbiorem stanów niezawodnościowych systemu. Ponieważ wszystkie zbiory stanów niezawodnościowych są binarne, to do wykonywania operacji algebraicznych na tych zbiorach można zastosować algebrę Boole'a, której struktura algebraiczna ma postać $\mathbb{B} := (0, 1, \cap, \cup, \sim)$.

Funkcję $f : A_1 \times \dots \times A_{m_E} \rightarrow B$, odwzorowującą wpływ niezdatności elementów e_1, \dots, e_{m_E} na niezdatność systemu, nazywamy funkcją strukturalną.

Model dynamiki systemu

Model dynamiki systemu to opis ewolucji czasowej stanów niezawodnościowych elementów ze zbioru E i systemu. Model ten określa uporządkowana dwójka:

$$\mathbb{D} = (\{D_k; k \in K\}, D), \quad (1)$$

gdzie: D_k jest modelem ewolucji czasowej stanów niezawodnościowych elementu $e_k \in E$; D jest modelem ewolucji czasowej stanów niezawodnościowych systemu. Model D_k (1) określa uporządkowana piątka:

$$D_k = (\Delta, A_k, \mathbb{R}_+, a_k, \{u_{k,a}; a \in A_k\}), \quad (2)$$

gdzie:

- $a_k : \Omega \rightarrow A_k$ jest zmienną losową, której realizacje $a_k^{(t)} \in A_k$, $t \in T$, interpretuje się jako stan niezawodnościowy elementu e_k w chwili t ;
- $u_{k,a} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ jest zmienną losową, której realizacje $u_{k,a}^{(l)} \in \mathbb{R}_+$, $l \in \mathbb{N}$, interpretuje się jako długość przedziału czasu przebywania elementu e_k po raz l w stanie w stanie $a \in A_k$.

Wektor losowy $\mathbf{u}_k = [u_{k,0}, u_{k,1}]^T$ nazywamy *modelem stochastycznym procesu eksploatacji elementu e_k* .

Model D (1) określa uporządkowana piątka:

$$D = (\Delta, B, \mathbb{R}_+, \mathcal{B}, \{\psi_b; b \in B\}), \quad (3)$$

gdzie:

- $\mathcal{B} : \Omega \rightarrow B$ jest zmienną losową, której realizacje $b^{(t)} \in B$, $t \in T$ interpretuje się jako stan niezawodnościowy systemu w chwili t ;
- $\psi_b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ jest zmienną losową, której realizacje $y_b^{(n)} \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, interpretuje się jako długość przedziału czasu przebywania systemu po raz n w stanie $b \in B$.

Wektor losowy $\boldsymbol{\psi} = [\psi_0, \psi_1]^T$ nazywamy *modelem stochastycznym procesu eksploatacji systemu*.

3 Model symulacyjny procesu eksploatacji systemu

Symulacją komputerową procesu eksploatacji systemu nazywamy numeryczną metodę wnioskowania o niezawodności systemu na podstawie obserwacji działania programu komputerowego symulującego ten proces. Symulację najczęściej prowadzi się metodą kolejnych zdarzeń [3, 4, 9]. Zdarzeniami są zmiany stanów niezawodnościowych elementów $e_k \in E$, $k \in K$. Niech $t \in T$ będzie czasem systemowym. Niech $t^{(s)}$, $s = 0, 1, \dots$, będą chwilami zajścia kolejnych zdarzeń, gdzie: $t^{(0)} = 0$ jest *chwilą początkową*. Parametr $t^{(s)}$ jest nazywany *chwilą bieżącą* procesu symulacji. Przyjmijmy, iż w chwili $t^{(0)}$ wszystkie elementy ze zbioru E są zdadne.

Niech $t_k^{(u)}$, $u = 0, 1, \dots$, będą chwilami zmian stanów niezawodnościowych elementu e_k , przy czym $t_k^{(0)} = t^{(0)} = 0$ dla $k \in K$. Niech $a_k^{(u)}$ będzie stanem niezawodnościowym elementu e_k w chwili $t_k^{(u)}$, przy czym $a_k^{(0)} = 1$ dla $k \in K$. Jak można zauważyć, zmiany w czasie stanów niezawodnościowych elementu e_k określa zależność $a_k^{(u+1)} = \sim a_k^{(u)}$, $u = 0, 1, \dots$. W celu uproszczenia zapisów wprowadźmy oznaczenie $\alpha = a_k^{(u)}$.

Zmiany długości przedziałów czasu przebywania elementu e_k w stanach α określa wzór rekurencyjny:

$$t_k^{(u+1)} = t_k^{(u)} + u_{k,\alpha}, \quad u = 0, 1, \dots,$$

gdzie: $t_k^{(0)} = 0$, $u_{k,\alpha}$ jest realizacją zmiennej losowej $u_{k,\alpha}$ (2), której rozkład zwykle estymuje się na podstawie prób zgromadzonych w wyniku realizacji informacyjnych badań niezawodnościowych na elementach ze zbioru E [10].

Postęp czasu systemowego określa zależność rekurencyjna o postaci:

$$t^{(s+1)} = \min\{t_k^{(u)} - t^{(s)} \in \mathbb{R}_+ : t_k^{(u)} > t^{(s)}, k \in K, u \in \mathbb{N}\}, \quad s = 0, 1, \dots,$$

gdzie $t^{(0)} = 0$.

W chwilach $t^{(s)}$, $s = 1, 2, \dots$, oblicza się bieżący stan niezawodnościowy systemu z zależności:

$$b^{(s)} = f(\mathbf{a}^{(s)}), \quad s = 1, 2, \dots,$$

gdzie: f jest funkcją strukturalną, $\mathbf{a}^{(s)} = [a_1^{(s)}, a_2^{(s)}, \dots, a_{m_E}^{(s)}]^T$, $a_k^{(s)} \in A_k$, $b^{(s)} \in B$.

Jeżeli w chwili $t^{(s)}$ nastąpiła zmiana stanu systemu w odniesieniu do jego stanu $b^{(r)}$ we wcześniejszej chwili $t^{(r)}$, $t^{(r)} < t^{(s)}$, to obserwuje się długość przedziału czasu $[t^{(r)}, t^{(s)}]$ przebywania systemu w stanie $b^{(r)}$.

4 Badanie symulacyjne procesu eksploatacji systemu

Niech $\tau^{(p)} \in T$, $p = 0, 1, \dots$ będą chwilami zmian stanów niezawodnościowych systemu wygenerowanymi na podstawie modelu symulacyjnego opisanego w punkcie 3, gdzie $\tau^{(0)} = 0$. Badanie symulacyjne procesu eksploatacji systemu polega na obserwacji długości przedziałów czasu $[\tau^{(p)}, \tau^{(p+1)})$ przebywania systemu w stanach niezawodnościowych ze zbioru B . Przyjmujemy, że badanie to będzie prowadzone według planu:

$$Y = (Y_0, Y_1), \quad (4)$$

gdzie Y_b jest planem dyskretnym o postaci:

$$Y_b = \begin{pmatrix} E_b^{(1)} & E_b^{(2)} & \dots & E_b^{(m_Y)} \\ m_Q & m_Q & \dots & m_Q \end{pmatrix}, \quad b \in B.$$

Punktami skupienia planu Y_b są wielokrotnie powtarzane doświadczenia $E_b^{(1)}, \dots, E_b^{(m_Y)}$. Niech $N = \{1, \dots, m_Y\}$ będzie zbiorem numerów tych doświadczeń. Każde doświadczenie $E_b^{(n)}$ składa się z wielu prób $E_b^{(n)}(1), E_b^{(n)}(2), \dots, E_b^{(n)}(m_Q)$. Niech $J = \{1, \dots, m_Q\}$ będzie zbiorem numerów tych prób. Próba $E_b^{(n)}(j)$ polega na obserwacji długości przedziału czasu $y_b^{(n)}(j) \in \mathbb{R}_+$ przebywania systemu po raz n , $n \in N$, w stanie $b \in B$. Zbiór $E_b = \{E_0, E_1\}$ nazywamy *eksperymentem symulacyjnym* (lub krótko: *eksperymentem*), gdzie: $E_b = \{E_b^{(1)}, \dots, E_b^{(m_Y)}\}$, $b \in B$.

Liczbę $m_Q \in \mathbb{N}$ prób $E_b^{(n)}(1), \dots, E_b^{(n)}(m_Q)$ wyznacza się ze wzoru:

$$m_Q = \max \{m_{Q_b^{(n)}} \in \mathbb{N} : b \in B, n \in N\},$$

gdzie:

- $m_{Q_b^{(n)}} = \lceil \hat{\sigma}_b^{(n)2} \lambda_{1-\alpha/2} \rceil$ jest liczbą powtórzeń doświadczenia $E_b^{(n)}$, zapewniającą w przybliżeniu $100(1 - \alpha)\%$ przedział ufności dla wartości oczekiwanej z próby $\hat{\mathbf{y}}_b^{(n)} = [y_b^{(n)}(1), \dots, y_b^{(n)}(m_{Q_b^{(n)}})]^T$, gdzie: $\hat{\sigma}_b^{(n)2} = \frac{1}{m_0-1} \sum_{j=1}^{m_0} (y_b^{(n)}(j) - \hat{\mu}_b^{(n)})^2$ jest wariancją z próby pilotującej $\hat{\mathbf{y}}_b^{(n)} = [y_b^{(n)}(1), \dots, y_b^{(n)}(m_0)]^T$, natomiast $\hat{\mu}_b^{(n)} = \frac{1}{m_0} \sum_{j=1}^{m_0} y_b^{(n)}(j)$ jest wartością oczekiwaną z próby $\hat{\mathbf{y}}_b^{(n)}$, $m_0 = 20$ jest ustaloną liczebnością próby pilotującej;
- $\lambda_{1-\alpha/2}$ jest kwantylem rzędu $(1 - \alpha/2)$ rozkładu $N(0,1)$.

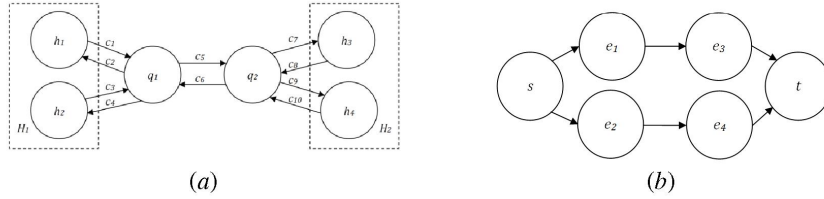
Wektor $\mathbf{y}_b^{(n)} = [y_b^{(n)}(1), \dots, y_b^{(n)}(m_Q)]^T$ nazywamy *wynikiem doświadczenia* $E_b^{(n)}$. Wektor obserwacji połączonych $\mathbf{y}_b = \mathbf{vec}(\mathbf{y}_b^{(1)}, \dots, \mathbf{y}_b^{(m_Y)}) \in \mathbb{R}_+^{m_Y \cdot m_Q \times 1}$ nazywamy *wynikiem eksperymentu* E_b . Składowe wektora \mathbf{y}_b interpretuje się jako realizacje zmiennej losowej ψ_b (3).

5 Analiza niezawodnościowa systemu

Analiza niezawodności polega na estymacji wybranych miar niezawodności systemu na podstawie obserwacji \mathbf{y}_b , $b \in B$. Najczęściej stosowanymi miarami niezawodności systemów są:

- wartość oczekiwana $\mu_1 = E(\psi_1)$ zmiennej losowej ψ_1 (3), którą nazywamy *wartością oczekiwaną zdatności systemu*;
- wariancja $\sigma_1^2 = E[(\psi_1 - \mu_1)^2]$ zmiennej losowej ψ_1 , którą nazywamy *wariancją zdatności systemu*;
- wartość oczekiwana $\mu_0 = E(\psi_0)$ zmiennej losowej ψ_0 (3), którą nazywamy *wartością oczekiwaną niezdatności systemu*;
- wariancja $\sigma_0^2 = E[(\psi_0 - \mu_0)^2]$ zmiennej losowej ψ_0 , którą nazywamy *wariancją niezdatności systemu*;
- współczynnik gotowości systemu $\kappa = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_0}$;
- funkcja niezawodności $R_1(t) = 1 - F_1(t)$ zmiennej losowej ψ_1 , którą nazywamy *funkcją zdatności systemu*, gdzie $F_1(t) = P(\psi_1 \leq t)$ jest dystrybuantą zmiennej losowej ψ_1 ;
- funkcja niezawodności $R_0(t) = 1 - F_0(t)$ zmiennej losowej ψ_0 , którą nazywamy *funkcją niezdatności systemu*, gdzie $F_0(t) = P(\psi_0 \leq t)$ jest dystrybuantą zmiennej losowej ψ_0 .

Przykład 1. Rozważmy system rozproszony, którego strukturę techniczną przedstawiono na rysunku 1a, gdzie: $H = \{h_1, \dots, h_4\}$ jest zbiorem komputerów, $Q = \{q_1, q_2\}$ jest zbiorem routerów sieciowych, $C = \{c_1, \dots, c_{10}\}$ jest zbiorem jednokierunkowych linków sieciowych. Komputery podzielono na dwie grupy: $H_1 = \{h_1, h_2\}$ i $H_2 = \{h_3, h_4\}$.



Rys. 1. Schematy blokowe struktur systemu rozproszonego: (a) schemat blokowy struktury technicznej; (b) schemat blokowy struktury niezawodnościowej
 Fig. 1. Block diagrams of the distributed system structures: (a) a block diagram of the technical structure; (b) a block diagram of the reliability structure

Struktura niezawodnościowa. Przyjmijmy, że komputery ze zbioru H są naprawialne oraz że routery ze zbioru Q i linki sieciowe ze zbioru C są niezawodne. Załóżmy, że system uznajemy za zdatny, jeżeli uszkodzeniu ulegnie jeden lub co najwyżej dwa komputery, przy czym nie mogą to być komputery z tej samej grupy. Model struktury niezawodnościowej rozpatrywanego systemu (rys. 2b) przybiera postać:

$$\mathbb{G} = (V, R, \mathbf{A}),$$

gdzie: $V = \{s, E, t\}$, $E = \{e_1, \dots, e_{m_E}\}$, $m_E = 4$, $e_1 = h_1$, $e_2 = h_3$, $e_3 = h_2$, $e_4 = h_4$;
 $R = \{r_1, \dots, r_{m_R}\}$, $m_R = 6$, $r_1 = (s, e_1)$, $r_2 = (s, e_2)$, $r_3 = (e_1, e_3)$, $r_4 = (e_2, e_4)$,
 $r_5 = (e_3, t)$, $r_6 = (e_4, t)$.

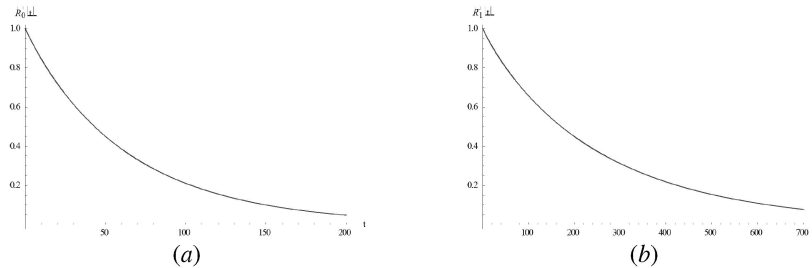
Założmy, że zmienne losowe $u_{k,a}$ (2) mają rozkłady $W(\alpha_{k,a}, \beta_{k,a})$, $a \in A_k$, $k \in K$.

Funkcja strukturalna. Funkcja strukturalna $f : A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{m_E} \rightarrow B$ przybiera dla rozpatrywanego systemu następującą postać:

$$b = f(\mathbf{a}) = p_1 \cup p_2 = (a_1 \cap a_3) \cup (a_2 \cap a_4),$$

gdzie: $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_4]^T$; p_1, p_2 są ścieżkami zdatności: $p_1 = a_1 \cap a_3$, $p_2 = a_2 \cap a_4$.

Badania symulacyjne procesu eksploatacji systemu. Badania symulacyjne przeprowadzono zgodnie z planem Y (4), gdzie: $m_Y = 20$, $m_Q = 146$. Na podstawie prób $\mathbf{y}_b \in \mathbb{R}_+^{m_Y \cdot m_Q \times 1}$ oszacowano wartości miar niezawodności badanego systemu. Wskaźniki niezawodności przybierają wartości: $\hat{\mu}_1 = 262.923$, $\hat{\sigma}_1^2 = 80413.7$, $\hat{\mu}_0 = 64.0952$, $\hat{\sigma}_0^2 = 4421.46$, $\hat{\kappa} = 0.804001$. Na rysunku 2 przedstawiono wykresy ocen funkcji niezawodnościowych systemu rozproszonego.



Rys. 2. Wykresy ocen funkcji niezawodnościowych systemu rozproszonego: (a) wykres oceny $\hat{R}_0(t)$ funkcji niezdatności systemu $R_0(t)$; (b) wykres oceny $\hat{R}_1(t)$ funkcji zdatności systemu $R_1(t)$

Fig. 2. Plots of the evaluations of reliability functions of the distributed system: (a) a plot of an evaluation $\hat{R}_0(t)$ of the failure function $R_0(t)$ of the system; (b) a plot of an evaluation $\hat{R}_1(t)$ of the reliability function $R_1(t)$ of the system

□

6 Podsumowanie

Zaproponowana w pracy symulacyjna metoda badania niezawodności systemów może być stosowana do wykonywania ilościowych analiz niezawodności systemów o złożonych strukturach niezawodnościowych. Można ją również wykorzystać do optymalizacji struktur niezawodnościowych.

Kierunki dalszych prac powinny być związane z wykorzystaniem symulacji stochastycznej do badania niezawodności systemów niestacjonarnych.

Literatura

1. Dodson B., Nolan D.: *Reliability Engineering Handbook*. Marcel Dekker, 1999
2. Faulin J. (ed.), Juan A.A. (ed.), Martorell S. (ed.), Ramirez-Marquez J.E. (ed.): *Simulation Methods for Reliability and Availability of Complex Systems*. Springer-Verlag, 2010
3. Fishman G., S.: *Symulacja komputerowa. Pojęcia i metody*. PWE, 1981
4. Fishman G.S.: *Discrete-Event Simulation: Modeling, Programming, and Analysis*. Springer, 2001
5. Karpiński J., Korczak E.: *Metody oceny niezawodności dwustanowych systemów technicznych*. Instytut Badań Systemowych PAN, 1990
6. Migdalski J. (red.): *Poradnik niezawodności. Podstawy matematyczne*. Wydawnictwo Przemysłu Maszynowego „WEMA”, 1982
7. Tobias P. A., Trindade D.: *Applied Reliability*. Chapman and Hall/CRC, 2011
8. Wackerly D., Mendenhall W., Scheaffer R. L.: *Mathematical Statistics with Applications*. Duxbury Press, 2007
9. Wainer G.A. (ed.), Mosterman P.J. (ed.): *Discrete-Event Modeling and Simulation: Theory and Applications*. CRC Press, 2010
10. Wesołowski Z.: *Analiza niezawodnościowa niestacjonarnych systemów czasu rzeczywistego*. Redakcja Wydawnictw Wojskowej Akademii Technicznej, 2006

Streszczenie

W artykule zaproponowano wykorzystanie metody symulacji stochastycznej do oceny niezawodności systemów stacjonarnych w szerszym sensie. Przyjęto, że modelami ewolucji czasowej stanów niezawodnościowych systemu są zmienne losowe o dodatnio skoncentrowanych wartościach. Przedstawiono metodologię modelowania niezawodnościowego i metodologię modelowania symulacyjnego. Przytoczono przykład wykorzystania metody symulacyjnej do oceny niezawodności systemu rozproszonego.

Słowa kluczowe: model niezawodnościowy systemu, symulacja stochastyczna, eksploatacja systemu

Simulation of operation of systems

Summary

In the paper the use of stochastic simulation method for evaluation of the reliability of weak stationary systems have been proposed. It is assumed that models of the time evolution of the system reliability states are random variables with positively concentrated values. Methodology for reliability modeling and methodology for simulation modeling have been presented. An example of using the simulation method for the distributed system reliability evaluation has been quoted.

Keywords: model of system reliability, stochastic simulation, operation of a system