Randomizacja odchylenia pomiarowego przy ocenie zdolności pomiarowej przyrządu

Paweł Fotowicz

Główny Urząd Miar

Streszczenie: Randomizację odchylenia pomiarowego wykorzystuje się przy ocenie zdolności pomiarowej przyrządu. Odchylenie pomiarowe to estymata błędu systematycznego wyznaczana jako różnica pomiędzy wskazaniem przyrządu pomiarowego a wartością wzorcową. Randomizacja polega na przyjęciu odpowiedniego rozkładu prawdopodobieństwa dla tego odchylenia. Miarą zdolności pomiarowej przyrządu jest niepewność rozszerzona obliczana po wykonaniu pomiaru na wzorcu pomiarowym. Niepewność tę odnosi się do wartości granicznej, którą może być największy błąd dopuszczalny. Zdolność pomiarowa jest wskaźnikiem umożliwiającym ocenę jakości metrologicznej przyrządu.

Słowa kluczowe: zdolność pomiarowa, niepewność pomiaru

1. Wprowadzenie

Jednym z istotnych zagadnień metrologicznych dotyczących oceny przyrządu pomiarowego jest sposób podejścia przy traktowaniu oddziaływań systematycznych. Obecnie obserwuje się tendencję do włączania tych oddziaływań do budżetu niepewności pomiaru, jako jedną z jego składowych. Przykładem może być projekt normy dotyczącej oceny zdolności pomiarowej [1]. Zakłada on randomizację odchylenia pomiarowego, jako różnicy pomiędzy wartością wskazaną przez przyrząd pomiarowy na wzorcu i wartością samego wzorca. Randomizacja polega na przyjęciu odpowiedniego rozkładu prawdopodobieństwa dla określonego oddziaływania. Odchylenie pomiarowe należy do kategorii oddziaływań systematycznych. Dla takich oddziaływań przyjmuje się rozkłady inne niż normalny, stosując metodę typu B obliczania niepewności pomiaru [2].

2. Zdolność pomiarowa

Zdolność pomiarową bada się przy użyciu wzorców pomiarowych, a sama czynność zbliżona jest do wzorcowania. W najprostszym badaniu można zastosować jeden wzorzec, na którym należy wykonać serię pomiarową o określonej liczności w warunkach powtarzalności.

Zdolność pomiarowa przyrządu wyrażana jest wskaźnikiem, który można zdefiniować następująco [1]:

$$Q_{\mathrm{MS}} = \frac{U_{\mathrm{MS}}}{E_{\max}} \cdot 100\ \% \qquad (1)$$

gdzie U_{MS} oznacza niepewność rozszerzoną dla prawdopodobieństwa 95 %, a $E_{\max}$ największy błąd dopuszczalny. Na ogół przyjmuje się, że niepewność rozszerzona powinna stanowić 1/3 wartości błędu dopuszczalnego. Przy ocenie zdolności pomiarowej przyrządu należy brać pod uwagę następujące składowe: rozrzut wskazań przyrządu, rozdzielczość wskazań przyrządu, odchylenie pomiarowe, niedokładność wzorca pomiarowego oraz wpływ warunków środowiskowych na wzorzec.

Pierwsza ze składowych związana jest bezpośrednio z przyrządem pomiarowym i dotyczy rozrzutu jego wskazań na wzorcu pomiarowym wykonywanych w warunkach powtarzalności. Miarą niepewności standardowej tej składowej jest odchylenie standardowe eksperymentalne pojedynczego wskazania q_i uzyskiwanego na podstawie serii n odczytów:

$$u_{\mathrm{rep}} = s(q) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{N}\left(q_i - \overline{q}\right)^2} \qquad (2)$$

Zgodnie z zaleceniami [1] minimalna seria obserwacji powinna mieć $n = 30$ obserwacji.

Drugą rozważaną składową jest rozdzielczość pomiaru. Niepewność standardową wyznaczamy na podstawie kwantu wskazania R:

$$u_{\mathrm{res}} = \frac{R}{2\sqrt{3}} \qquad (3)$$

Trzecią składową jest odchylenie pomiarowe, traktowane jako różnica pomiędzy średnią serii obserwacji $\overline{q}$ na wzorcu i wartością odniesienia q_{w}:

$$B = \left|\overline{q} - q_{\mathrm{w}}\right| \qquad (4)$$

Wartością odniesienia jest w tym wypadku wartość wielkości reprezentowana przez wzorzec. Odchylenie pomiarowe B traktowane jest jako składowa niepewności, a przypisana mu niepewność standardowa wynosi [1]:

$$u_{\mathrm{bias}} = \frac{B}{\sqrt{3}} \qquad (5)$$

W powyższej sytuacji mamy do czynienia z randomizacją przy użyciu rozkładu prostokątnego.

Kolejne składowe niepewności związane są z wzorcem pomiarowym. Pierwsza z nich wyraża niedokładność wzorca. Miarą jej jest niepewność rozszerzona U dla poziomu ufności ok. 95 %, a niepewność standardowa wynosi:

$$u_{\mathrm{cal}} = \frac{U}{k} \qquad (6)$$

gdzie k jest współczynnikiem rozszerzenia, którego wartość wraz z niepewnością rozszerzoną podana jest w świadectwie wzorcowania.

Ostatnią rozważaną składową jest wpływ warunków środowiskowych na wzorzec pomiarowy. Na ogół jest nim wpływ temperatury. W takim wypadku należy wyznaczyć zmianę wartości wzorca pod wpływem temperatury. Zmiana wartości wzorca (np. długości płytki wzorcowej) określona będzie zależnością:

$$\Delta L = \Delta t \cdot \alpha \cdot L \tag{7}$$

gdzie Δt to dopuszczalna zmiana temperatury w trakcie badań zdolności pomiarowej, α to współczynnik rozszerzalności termicznej wzorca, a L to wartość reprezentowana przez wzorzec. W ten sam sposób można wyznaczyć np. zmianę rezystancji opornika wzorcowego przy badaniach zdolności pomiarowej omomierza. Niepewność standardowa wynosi [1]:

$$u_{\mathrm{temp}} = \frac{\Delta L}{\sqrt{3}} \tag{8}$$

3. Niepewność rozszerzona

Możliwe są dwa sposoby obliczenia niepewności rozszerzonej związanej ze zdolnością pomiarową przyrządu. Pierwszy może być oparty na prawie propagacji niepewności [2]. W metodzie tej oblicza się niepewność rozszerzoną jako iloczyn współczynnika rozszerzenia $k = 2$ (dla poziomu ufności ok. 95 %) i złożonej niepewności standardowej u_c:

$$U_{\mathrm{MS}} = k \cdot u_{\mathrm{c}} \tag{9}$$

gdzie złożona niepewność standardowa wyznaczana jest na podstawie prawa propagacji niepewności:

$$u_{\mathrm{c}}^2 = u_{\mathrm{rep}}^2 + u_{\mathrm{res}}^2 + u_{\mathrm{bias}}^2 + u_{\mathrm{cal}}^2 + u_{\mathrm{temp}}^2 \tag{10}$$

Drugim sposobem obliczeniowym jest zastosowanie metody propagacji rozkładów przy użyciu metody Monte Carlo [3]. Można wówczas wyznaczyć niepewność rozszerzoną jako połowę przedziału rozszerzenia, pod warunkiem że rozkład związany z wielkością wyjściową jest symetryczny:

$$U_{\mathrm{MS}} = \frac{y_{\mathrm{high}} - y_{\mathrm{low}}}{2} \tag{11}$$

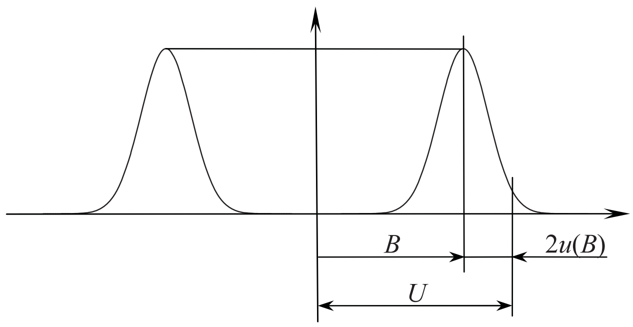
gdzie y_{high} to górna granica przedziału rozszerzenia, a y_{low} to dolna granica przedziału rozszerzenia wielkości wyjściowej. Równanie pomiaru wielkości wyjściowej ma postać:

$$y = \delta x_{\mathrm{rep}} + \delta x_{\mathrm{res}} + \delta x_{\mathrm{bias}} + \delta x_{\mathrm{cal}} + \delta x_{\mathrm{temp}} \tag{12}$$

gdzie wielkości wejściowe δx reprezentują możliwe zbiory wartości dla poszczególnych składowych niepewności. Należy przyjąć dla nich określone rozkłady prawdopodobieństwa. Pierwsza składowa to rozrzut wskazań, z którym, ze względu na dużą liczbę obserwacji, można związać rozkład normalny. Druga składowa to rozdzielczość, z którą zwyczajowo wiąże się rozkład prostokątny [2]. W wyniku randomizacji odchylenia pomiarowego, z trzecią składową można związać rozkład prostokątny. Niedokładność wzorca pomiarowego określa się na podstawie informacji ze świadectwa wzorowania, w którym niepewność wyrażana jest dla poziomu ufności ok. 95 % i współczynniku rozszerzenia $k = 2$, co uzasadnia przyjęcie rozkładu normalnego. Ostatnia składowa, związana z wpływem temperatury na wzorzec, opisana jest rozkładem prostokątnym. Mamy więc do czynienia z dwoma typami rozkładów prawdopodobieństwa dla wielkości wejściowych. Rozkłady te można w prosty sposób wygenerować przy użyciu podstawowego generatora liczb losowych, dostępnego w każdym środowisku programowym.

4. Randomizacja odchylenia pomiarowego rozkładem płasko-normalnym

W celu randomizacji odchylenia pomiarowego można także zastosować rozkład płasko-normalny, będący splotem rozkładu prostokątnego z normalnym [4]. Rozkład ten można wykorzystać również przy obliczaniu niepewności pomiaru [5], lecz ze względu na swoje własności szczególnie nadaje się do omawianego celu [6]. Sama metoda randomizacji polega na jednoczesnym uwzględnieniu odchylenia pomiarowego i niepewności jej wyznaczenia w jednym rozkładzie (rys. 1).



Rys. 1. Randomizacja odchylenia pomiarowego
Fig. 1. Randomization of the bias

Rozkład płasko-normalny opisany jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa o postaci [5]:

$$g(\eta) = \frac{1}{2\sqrt{6\pi} \cdot r} \int_{\eta-\sqrt{3}\cdot r}^{\eta+\sqrt{3}\cdot r} \exp\left[-\frac{\xi^2}{2}\right] \mathrm{d}\xi \tag{13}$$

Przy obliczeniach należy wyznaczyć parametr rozkładu, który można zdefiniować w następujący sposób [6]:

$$r = \frac{2 \cdot |B|}{3 \cdot u(B)} + 1 \tag{14}$$

Miarą $u(B)$ może być niepewność wzorca pomiarowego, czyli: $u(B) = u_{\mathrm{cal}}$. W celu wygenerowania zbioru wartości o rozkładzie płasko-normalnym można posłużyć się zależnością w postaci:

$$\delta x = \frac{r\, z_{\mathrm{P}} + z_{\mathrm{N}}}{\sqrt{r^2 + 1}} \tag{15}$$

gdzie z_P i z_N są zmiennymi losowymi mającymi standaryzowane rozkłady prawdopodobieństwa: prostokątny i normalny.

Zrandomizowane odchylenie pomiarowe δx_{rand} w przedstawionym powyżej postępowaniu zastępuje dwie składowe: δx_{bias} i δx_{cal}. Równanie pomiaru wielkości wyjściowej przybiera wówczas postać:

$$y = \delta x_{\text{rep}} + \delta x_{\text{res}} + \delta x_{\text{rand}} + \delta x_{\text{temp}} \tag{16}$$

5. Przykład obliczeniowy

Przedstawione powyżej rozważania można wykorzystać przy ocenie zdolności pomiarowej typowego przyrządu pomiarowego jakim jest, przykładowo, mikrometr. Zdolność ta oceniana jest przy użyciu wzorca pomiarowego w postaci płytki wzorcowej. Mikrometr charakteryzuje się rozdzielczością wskazania: 1 µm. Płytka wzorcowa posiada świadectwo wzorcowania mówiące, że jej długość wynosi: 20,0002 mm, która została wyznaczona z niepewnością rozszerzoną 0,1 µm, dla poziomu ufności ok. 95 %. Wykonano 30 odczytów wskazania mikrometru na płytce wzorcowej i zestawiono je w tab. 1.

Tab. 1. Wyniki pomiaru mikrometrem
Tab. 1. Micrometer measurement result

Wyniki pomiaru		
20,001 mm	20,001 mm	20,001 mm
20,001 mm	20,000 mm	20,001 mm
20,001 mm	20,001 mm	20,000 mm
20,002 mm	20,001 mm	20,001 mm
20,001 mm	20,001 mm	20,001 mm
20,001 mm	20,001 mm	20,001 mm
20,001 mm	20,001 mm	20,002 mm
20,000 mm	20,001 mm	20,001 mm
20,001 mm	20,002 mm	20,001 mm
20,001 mm	20,001 mm	20,001 mm
$\bar{l}$ = 20,001 mm		
$s(l)$ = 0,00045 mm		

Pierwszą rozpatrywaną składową jest rozrzut wskazań mikrometru na płytce wzorcowej. Niepewność standardowa związana z tą składową wynosi:

$$u_{\text{rep}} = s(l) = 0{,}45\,\mu\text{m} \tag{17}$$

Drugą rozpatrywaną składową jest rozdzielczość wskazań mikrometru: $R = 1$ µm. Niepewność standardowa związana z tą składową wynosi:

$$u_{\text{res}} = \frac{R}{2\sqrt{3}} = 0{,}29\ \mu\text{m} \tag{18}$$

Trzecią rozpatrywaną składową jest odchylenie pomiarowe. Estymata zmierzonej długości płytki wzorcowej mikrometrem, w postaci średniego wskazania, wynosi 20,001 mm, a długość płytki wzorcowej, na podstawie świadectwa wzorcowania, $l_w = 20{,}0002$ mm. Odchylenie pomiarowe to:

$$B = \left|\bar{l} - l_{\text{w}}\right| = 0{,}8\,\mu\text{m} \tag{19}$$

stąd niepewność standardowa związana z tą składową wynosi:

$$u_{\text{bias}} = \frac{B}{\sqrt{3}} = 0{,}46\,\mu\text{m} \tag{20}$$

Czwartą rozpatrywaną składową jest niedokładność wzorca pomiarowego. Ze świadectwa wzorcowania wynika, że niepewność rozszerzona to $U = 0{,}1$ µm, wyznaczona przy poziomie ufności ok. 95 %, dla którego współczynnik rozszerzenia $k = 2$. Stąd niepewność standardowa:

$$u_{\text{cal}} = \frac{U}{k} = 0{,}05\ \mu\text{m} \tag{21}$$

Piąta, ostatnia składowa związana jest z wpływem temperatury na wzorzec. Współczynnik rozszerzalności cieplnej stali stopowej, materiału z którego wykonana jest płytka wzorcowa, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ 1/°C. Pomiar wykonywany był przy granicznej zmianie temperatury $\Delta t = \pm 1$ °C. Graniczna zmiana wymiaru płytki wzorcowej wynosi:

$$\Delta L = \Delta t \cdot \alpha \cdot L = 0{,}24\ \mu\text{m} \tag{22}$$

stąd niepewność standardowa związana z tą składową to:

$$u_{\text{temp}} = \frac{\Delta L}{\sqrt{3}} = 0{,}14\ \mu\text{m} \tag{23}$$

Obliczając złożoną niepewność standardową, na podstawie (10), otrzymujemy: $u_c = 0{,}72$ µm. Niepewność rozszerzona to $U_{\text{MS}} = 1{,}44$ µm. Biorąc pod uwagę, że największy błąd dopuszczalny $E_{\text{max}} = \pm 5$ µm, otrzymujemy wskaźnik zdolności pomiarowej mikrometru:

$$Q_{\text{MS}} = \frac{U_{\text{MS}}}{E_{\text{max}}} = 29\ \% \tag{24}$$

Te same obliczenia możemy wykonać metodą propagacji rozkładów przy zastosowaniu symulacji Monte Carlo. Możemy wówczas sformułować równanie wielkości wyjściowej, którą jest zmierzona długość płytki wzorcowej mikrometrem:

$$l = \bar{l} + \delta l_{\text{rep}} + \delta l_{\text{res}} + \delta l_{\text{bias}} + \delta l_{\text{cal}} + \delta l_{\text{temp}} \tag{25}$$

Następnie stosujemy zaleconą procedurę postępowania [3]. Obliczamy $M = 10^4$ razy równanie wielkości wyjściowej, za każdym razem generując wartości dla wielkości wejściowych zgodnie z przyjętymi rozkładami prawdopodobieństwa i ich parametrami (niepewnością standardową). Otrzymany zbiór danych wyjściowych sortujemy zgodnie z rosnącą kolejnością i przypisujemy im kolejne prawdopodobieństwa, wyznaczając w ten sposób dystrybuantę numeryczną rozkładu wyjściowego. Następnie wyznaczamy wartości graniczne przedziału rozszerzenia, którymi są kwantyle rzędu $p = 2{,}5$ % oraz $p = 97{,}5$ % tego rozkładu. Połowa ich różnicy wyznacza niepewność rozszerzoną dla prawdopodobieństwa 95 %.

Parametry poszczególnych wielkości równania pomiaru zestawiono w tabeli 2.

Tab. 2. Zestawienie parametrów wielkości
Tab. 2. Quantity parameters

Symbol wielkości	Estymata wielkości	Rozkład prawdopodobieństwa	Niepewność standardowa
δl_{rep}	0 mm	normalny	0,00045 mm
δl_{res}	0 mm	prostokątny	0,00029 mm
δl_{bias}	0 mm	prostokątny	0,00046 mm
δl_{cal}	0 mm	normalny	0,00005 mm
δl_{temp}	0 mm	prostokątny	0,00014 mm
l	20,001 mm	–	0,00072 mm

Obliczone, zgodnie z powyższym postępowaniem, graniczne wartości przedziału rozszerzenia wynoszą odpowiednio: $l_{high} = 20{,}0024$ mm oraz $l_{low} = 19{,}9996$ mm, co daje wartość niepewności rozszerzonej: $U_{MS} = 1{,}4$ µm. Jest ona nieco niższa niż obliczona przy zastosowaniu prawa propagacji niepewności (10), wyznaczając wartość wskaźnika zdolności pomiarowej: $Q_{MS} = 28$ %.

Wykonując obliczenia z wykorzystaniem omówionej metody randomizacji odchylenia pomiarowego rozkładem płasko-normalnym, można przedstawić równanie wielkości wyjściowej w postaci:

$$l = \bar{l} + \delta l_{rep} + \delta l_{res} + \delta l_{rand} + \delta l_{temp} \tag{26}$$

Liczba wielkości wejściowych redukuje się o jedną. Parametry tych wielkości można zestawić w tabeli 3.

Tab. 3. Zestawienie parametrów wielkości z uwzględnieniem randomizacji
Tab. 3. Quantity parameters with randomization

Symbol wielkości	Estymata wielkości	Rozkład prawdopodobieństwa	Niepewność standardowa
δl_{rep}	0 mm	normalny	0,00045 mm
δl_{res}	0 mm	prostokątny	0,00029 mm
δl_{rand}	0 mm	płasko-normalny	0,00054 mm
δl_{temp}	0 mm	prostokątny	0,00014 mm
l	20,001 mm	–	0,00078 mm

Obliczone dla tych parametrów graniczne wartości przedziału rozszerzenia wynoszą odpowiednio: $l_{high} = 20{,}0025$ mm oraz $l_{low} = 19{,}9995$ mm, co daje wartość niepewności rozszerzonej: $U_{MS} = 1{,}5$ µm. Jest ona nieco wyższa niż obliczona przy zastosowaniu prawa propagacji niepewności (10), wyznaczając wartość wskaźnika zdolności pomiarowej: $Q_{MS} = 30$ %.

6. Podsumowanie

Randomizację odchylenia pomiarowego można wykorzystać przy ocenie zdolności pomiarowej przyrządu. Czynność ta wymaga przyjęcia określonego rozkładu prawdopodobieństwa dla składowej systematycznej. Sama ocena zdolności pomiarowej obejmuje różne składowe, na podstawie których można wyznaczyć niepewność rozszerzoną. Do jej obliczeń można zastosować zarówno prawo propagacji niepewności, jak i metodę propagacji rozkładów przy użyciu symulacji Monte Carlo, zalecanych rozwiązań przy opracowaniu danych pomiarowych.

Bibliografia

1. *Statistical methods in process management – Capability and performance – Part 7: Capability of measurement processes.* ISO/FDIS 22514-7, 2012.
2. *Guide to the expression of uncertainty in measurement.* JCGM 100:2008.
3. *Supplement 1 to the Guide to the expression of uncertainty in measurement – Propagation of distributions using a Monte Carlo method.* JCGM 101:2008.
4. Fotowicz P., *Obliczanie niepewności rozszerzonej metodą analityczną opartą na splocie rozkładów wielkości wejściowych*, „Pomiary Automatyka Robotyka" 1/2005, 5–9.
5. Fotowicz P., *Wykorzystanie rozkładu płasko-normalnego przy obliczaniu niepewności pomiaru*, „Pomiary Automatyka Kontrola" 6/2011, 595–598.
6. Fotowicz P., *Metoda randomizacji oddziaływania systematycznego i jej praktyczne zastosowanie*, „Pomiary Automatyka Kontrola" 11/2011, 1293–1296.

Bias randomization in evaluation of measurement instrument capability

Abstract: Randomizing of a bias is used in evaluation of measurement instrument capability. Bias is an estimate of systematic error treated as difference between an indication of measuring instrument and a value of standard. Randomization relies on the assumption of suitable probability distribution for the bias. The measure of the capability is an expanded uncertainty calculating after measurement on the standard. The expanded uncertainty is related to limited value. This limited value may be a maximum permissible error.

Keywords: measurement capability, uncertainty

dr inż. Paweł Fotowicz

Absolwent Politechniki Warszawskiej. Studia ukończył na Wydziale Mechaniki Precyzyjnej w 1981 r. Pracuje w Głównym Urzędzie Miar, zajmując się zagadnieniami teoretycznymi metrologii, głównie problematyką niepewnością pomiaru. Jest autorem ponad stu publikacji w postaci referatów i artykułów w czasopismach krajowych i zagranicznych.

e-mail: uncert@gum.gov.pl