Zofia Hanusz[*], Zbigniew Siarkowski[**],
[*]Katedra Zastosowań Matematyki
[**]Katedra Maszyn i Urządzeń Rolniczych
Akademia Rolnicza w Lublinie

OKREŚLANIE FUNKCJI CELU PRZY DOBORZE MASZYN ROLNICZYCH

Streszczenie

W pracy zostały przedstawione podstawowe funkcje matematyczne najczęściej wykorzystywane do zagadnień prognostycznych w doborze maszyn rolniczych. Omówiono podstawowe własności tych funkcji, podano przykłady związków pomiędzy zmiennymi, w których stosuje się omawiane typy funkcji. Podano metodę wyznaczania parametrów strukturalnych występujących w modelu oraz metodę analizy statystycznej modelu. Przedstawiono przykład zastosowania metody do wyznaczaniu funkcji celu przy doborze opryskiwaczy rolniczych.

Słowa kluczowe: funkcja celu, dobór maszyn, rozsiewacze nawozów, produkcja rolnicza

Wprowadzenie i cel pracy

Przedstawiona w pracy Hanusz i Siarkowskiego [2005] metodyka ustalania postaci funkcji celu przy doborze maszyn i urządzeń do produkcji rolniczej zawiera 6 etapów postępowania. Przedstawione tam etapy mają charakter ogólny i określają pełny zakres czynności jakie należy wykonać aby w sposób kompleksowy ustalić postać analityczną zależności pomiędzy zmienną określaną i określającą. W tej pracy przedstawiono najczęściej wykorzystywane funkcje matematyczne, które mogą być wykorzystane do określania funkcji celu, wyrażającej zależność funkcyjną zmiennej określanej przez zmienną niezależną. Wraz z równaniami funkcji celu podano przykłady związków, które mogą być opisywane wskazanymi równaniami. Ponadto, postacie niektórych typów funkcji celu zostały zobrazowane wykresami. Głównym celem tej pracy było opisanie metodyki określania funkcji celu przy doborze maszyn i urządzeń do realizacji procesów produkcyjnych w rolnictwie. Metodyka ta została opisana za pomocą najczęściej wykorzystywanych zależności matematycznych określających relacje zachodzące pomiędzy zmienną objaśnianą i objaśniającą. Rozważono kilka rodzajów związków, które mogą być wykorzystywane w zależności od charakteru zmiennych i przyjmowanych przez nie wartości. Zwrócono także uwagę na czynności, jakie należy przeprowadzić aby osiągnąć ostateczną postać funkcji celu.

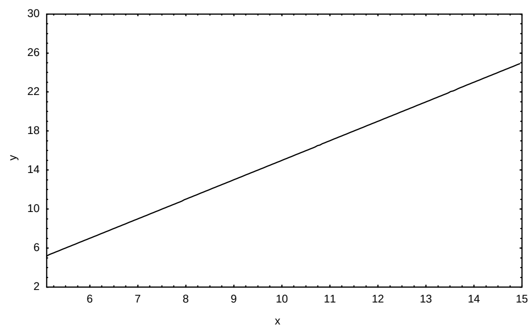
Metodyka określania funkcji celu

Przy ustalaniu postaci analitycznej funkcji celu mogą wystąpić dwie sytuacje, w których:

- znana jest postać równania wynikająca z fizyki zjawiska, wówczas zadanie polega na określeniu najlepszych wartości parametrów równania,
- postać równania nie jest znana i należy ustalić tą postać oraz wartości parametrów występujących w równaniu.

Liniowa funkcja celu

W zagadnieniach poszukiwania związków opisujących zjawiska zachodzące w naukach rolniczych jedną z podstawowych i najczęściej wykorzystywanych zależności jest funkcja liniowa. Taką zależność dobieramy wówczas, gdy wiadomo, że nie istnieją punkty optymalne zjawiska, czyli nie posiada ono żadnych ekstremów i jest zjawisko ma charakter monotoniczny rosnący (jak na rys. 1.) lub malejący. Do wyznaczenia współczynników równania b_1 i b_0 wykorzystujemy metodę najmniejszych kwadratów, natomiast do badania istotności tych współczynników wykorzystujemy testy o rozkładzie *t-Studenta*. Należy podkreślić istotę obliczania współczynnika determinacji R^2, który określa stopień dopasowania funkcji liniowej do danych eksperymentalnych. Wysoki współczynnik determinacji ($\cong 1$) nie zawsze informuje nas o bardzo dobrym dopasowaniu funkcji liniowej do danych eksperymentalnych. Często jest to wynikiem małej liczby punktów doświadczalnych lub punkty doświadczalne są powtarzalnymi pomiarami dla kilku wartości zmiennej objaśniającej.



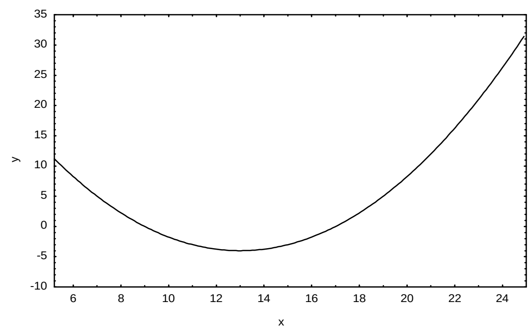
Rys. 1. *Funkcja liniowa* $y = b_1 x + b_0$

Fig. 1. *Linear function*

Zależność liniowa jest najczęściej stosowana w naukach eksperymentalnych i jest jednocześnie najlepiej opracowaną numerycznie funkcją regresyjną. W każdym pakiecie statystycznym znajdziemy program umożliwiający znalezienie jej postaci. Wiele zależności, poprzez przekształcenie zmiennej określającej lub określanej, daje się sprowadzić do zależności liniowej. Dodatkową zaletą funkcji liniowej jest prosta interpretacja uzyskanych współczynników w równaniu regresji.

Kwadratowa funkcja celu

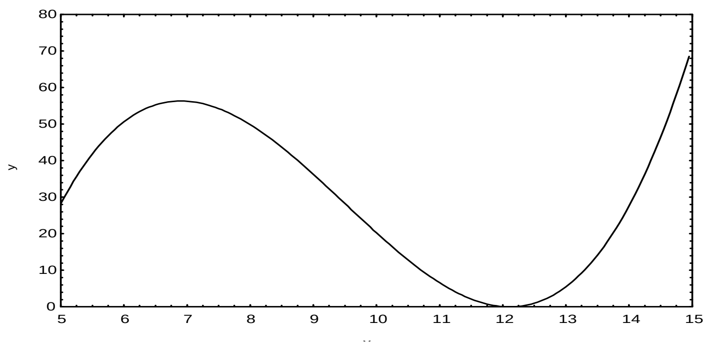
Inną sytuację obserwujemy wówczas, gdy wiadomo, że w zjawisku występuje punkt optymalny tzn. wiemy, że pewna wartość zmiennej określającej determinuje maksymalną bądź minimalną wartość zmiennej określanej. W takiej sytuacji, wykreślając punkty doświadczalne na wykresie, obserwujemy jedno ekstremum lokalne. Wówczas do opisu danych eksperymentalnych nie możemy stosować funkcji liniowej lecz dopasowujemy funkcję typu parabolicznego $y = b_2x^2 + b_1x + b_0$ (rys. 2). Współczynniki równania regresyjnego b_2, b_1 oraz b_0 wyznaczamy wykorzystując metodę najmniejszych kwadratów a ich łączną istotność weryfikujemy wykorzystując testy *F-Fishera* lub *t-Studenta* do zbadania istotności poszczególnych współczynników. W praktyce może się zdarzyć taka sytuacja, że nie zaobserwujemy w eksperymencie punktu optymalnego. Świadczyć to może o nieodpowiednim określeniu zakresu zmiennej objaśniającej lub czasami stan optymalny nie jest możliwy do osiągnięcia.



Rys. 2. Funkcja kwadratowa $y = b_2x^2 + b_1x + b_0$
Fig. 2. Square function

Wielomianowa funkcja celu

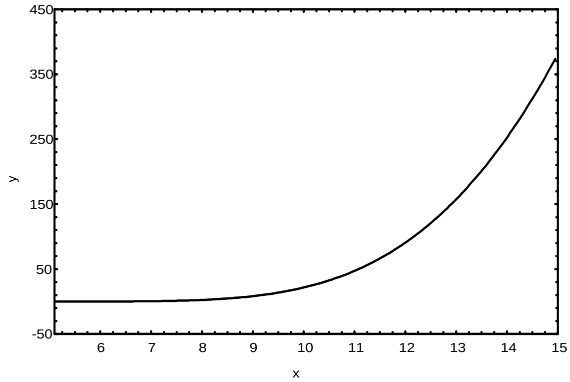
W przypadku, gdy obserwacje sugerują kilka ekstremów lokalnych, wówczas poszukujemy funkcji wielomianowej postaci $y = b_px^p + b_{p-1}x^{p-1} + b_1x + b_0$, gdzie rząd wielomianu p jest wyższy co najmniej o jeden niż obserwowana liczba ekstremów, tzn. $p \geq le + 1$ oraz *le* jest liczbą ekstremów lokalnych (dla dwóch ekstremów lokalnych, por. rys. 3). Współczynniki b_p, $b_{p-1},...,b_1$ oraz b_0 wyznaczamy stosując metodę najmniejszych kwadratów, a do testowania istotności wektora współczynników regresyjnych $\mathbf{b} = \left[b_p, b_{p-1}, \Lambda, b_1, b_0\right]'$, wykorzystujemy testy *F-Fishera*. Po odrzuceniu hipotezy o nieistotnym wektorze współczynników regresyjnych, testujemy hipotezy szczegółowe dotyczące poszczególnych współczynników regresyjnych, w oparciu o test *t-Studenta*. Tak jak w poprzednich paragrafach, obliczamy także współczynnik determinacji R^2, w celu sprawdzenia dokładności dopasowania funkcji celu do danych eksperymentalnych. Warto w tym miejscu zwrócić uwagę na fakt, iż w sytuacji kiedy niektóre współczynniki regresyjne okażą się nieistotne i odrzucimy je z równania regresyjnego to współczynnik determinacji w nowym modelu będzie niższy. Z tego też względu, chcąc utrzymać wyższy stopień dopasowania funkcji celu, w praktycznym zastosowaniu pozostawia się w funkcji celu współczynniki, które nieistotnie różnią się od zera na zadanym poziomie istotności.



Rys. 3. *Wielomian 3 stopnia* $y = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$
Fig. 3. *3rd order polynomial*

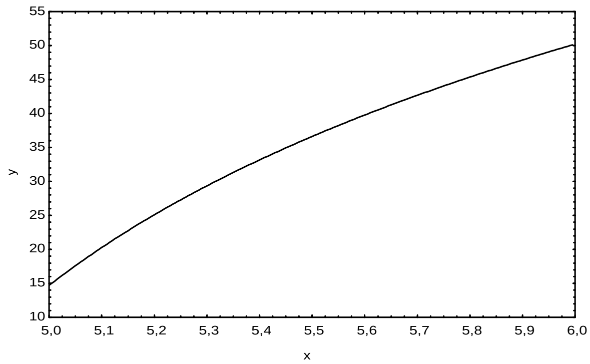
Funkcja celu opisująca pewien stały trend

W przypadku, gdy punkty doświadczalne wskazują na pewien trend rosnący bądź malejący, wówczas do określenia związku możemy także wykorzystać zależność wielomianową nieparzystego stopnia, która posiada jedynie punkty przegięcia lecz nie posiada punktów optymalnych. Częściej jednak, do opisu zależności dwóch zmiennych poszukuje się funkcji z rodziny funkcji wykładniczej $y = b_2e^{b_1x+b_0}$ (rys. 4), hiperbolicznej $y = \frac{b_1}{x} + b_0$ lub funkcji logarytmicznej $y = b_2\, ln(b_1x - b_0)$ (rys. 5).



Rys. 4. Funkcja wykładnicza $y = \frac{b_1}{x} + b_0$

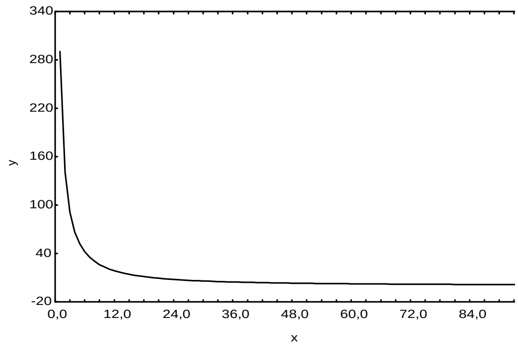
Fig. 4. Exponential function



Rys. 5. Wykres funkcji logarytmicznej $y = b_2\, ln(b_1 x - b_0)$

Fig. 5. Logarithmic function.

Współczynniki regresyjne we wszystkich typach powyższych funkcji mogą być wyznaczone MNK. Niejednokrotnie funkcje celu, poprzez proste przekształcenia zmiennych mogą być przetransponowane do funkcji liniowej. Dla przykładu, w funkcji hiperbolicznej $y = \frac{b_1}{x} + b_0$ (rys. 6), wystarczy w miejsce zmiennej opisującej x wstawić nową zmienną $z = \frac{1}{x}$ i poszukiwać funkcji celu w postaci $y = b_1 z + b_0$, natomiast dla wykładniczej funkcji celu $y = b_2 e^{b_1 x + b_0}$, jeżeli zlogarytmujemy cechę opisywaną *y*, wówczas $\ln y = \ln b_2 + b_1 x + b_0 = b_1 x + \tilde{b}_0$, gdzie $\tilde{b}_0 = \ln b_2 + b_0$. Jeżeli zatem wprowadzimy nową zmienną opisywaną $z = \ln y$ w funkcji wykładniczej lub odwrotność zmiennej opisującej w zależności hiperbolicznej, wówczas do opisu funkcji celu w nowym modelu poszukujemy liniowej funkcji opisanej w paragrafie 2.1.



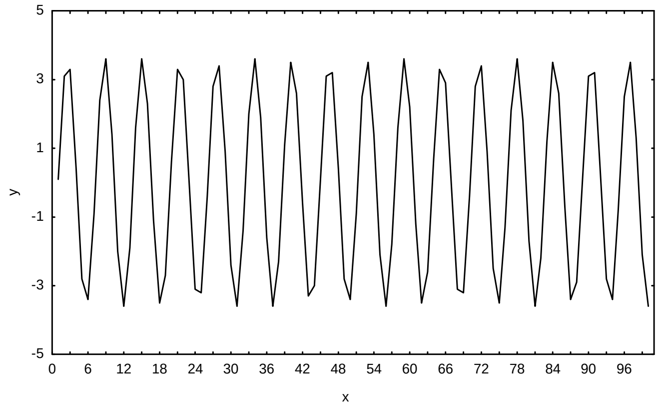
Rys. 6. Wykres funkcji hiperbolicznej $y=b_1/x+b_0$.
Fig. 6. Hyperbolic function.

Wymierna funkcja celu

W niektórych zagadnieniach, zmienne opisujące badany proces nie mogą być zdefiniowane dla pewnych określonych argumentów. Wartości funkcji w otoczeniu tych argumentów przyjmują bardzo duże, bądź małe wartości, wówczas do określenia postaci funkcji stosujemy funkcje wymierne (ilorazy wielomianów). Funkcje te posiadają asymptoty pionowe w tych wyróżnionych argumentach zmiennej objaśniającej. Jeśli ponadto wiadomo jest, iż funkcja celu nie może przekroczyć pewnych zakresów i na końcach określoności zmiennej objaśniającej funkcja celu przyjmuje stałe wartości (funkcja celu posiada asymptoty poziome), wówczas poszukujemy takiej funkcji wymiernej, w której stopień wielomianu występującego w liczniku jest nie większy od stopnia wielomianu występującego w mianowniku (por. rys. 6).

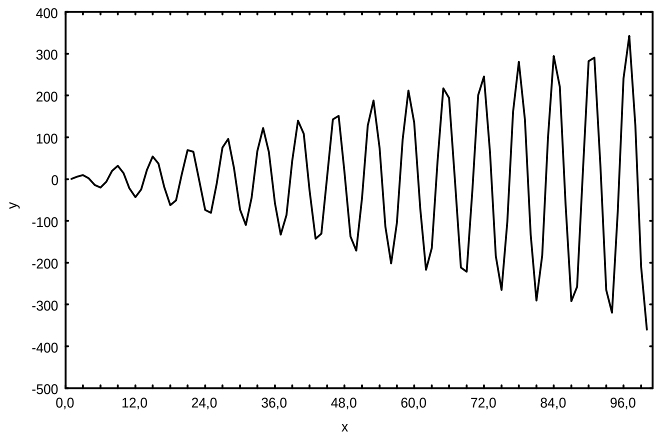
Funkcje cykliczne

Kolejny rodzaj poszukiwanych funkcji służących do opisu funkcji celu mogą stanowić funkcje cykliczne. Funkcje te charakteryzują się oscylacją wokół linii wyznaczającej główny trend. W takich przypadkach funkcja celu może być kombinacją funkcji trygonometrycznych. Jeśli wartości funkcji zmieniają się w pewnym skończonym przedziale $[y_{min}, y_{max}]$, wówczas najbardziej odpowiednie będą funkcje sinusoidalne (rys. 7). Jeżeli oprócz oscylacji wokół pewnej linii określającej trend, amplituda odchyleń zmienia się wraz ze wzrostem argumentu zmiennej objaśniającej, wówczas może to być kombinacja funkcji sinusoidalnych oraz zmiennej *x* (rys. 8). Natomiast w przypadku funkcji okresowych z asymptotami pionowymi najlepsze będą funkcje tangensoidalne (rys. 9). Ten rodzaj funkcji może występować w badaniach ekonomicznych, w których wartości funkcji celu powtarzają się w pewnych sezonach.



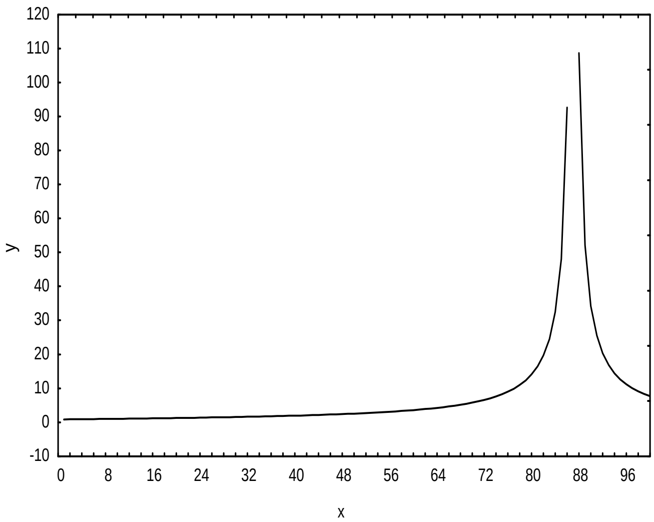
Rys. 7. *Funkcja cykliczna* $y = b_1 \sin(x - b_2) + b_3 \cos(x - b_4)$

Fig. 7. *Cyclic function*



Rys. 8. *Funkcja cykliczna postaci* $y = b_1 x \sin(b_2 x + b_3) + b_4 x \cos(b_5 x + b_6)$

Fig. 8. *Cyclic function of the form*



Rys. 9. *Funkcja okresowa* $y = b_2 \left| tg\left(b_1 x + b_o\right)\right|$

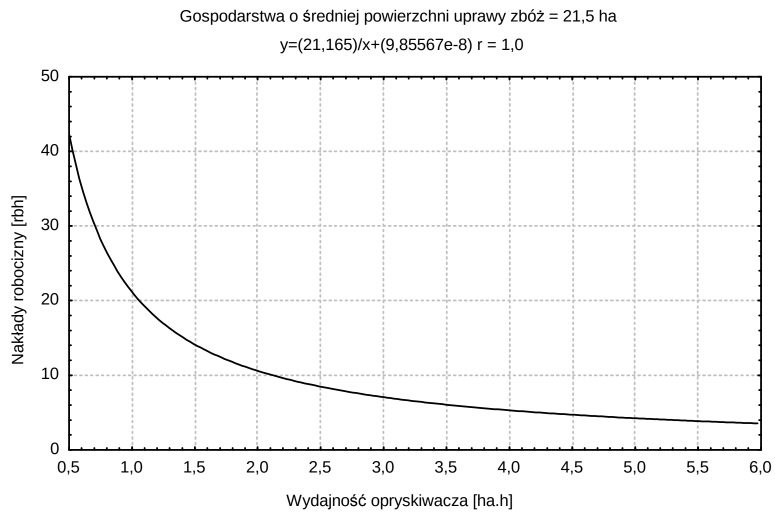
Fig. 9. *Periodical function*

Analiza statystyczna parametrów strukturalnych w funkcji celu

Po wyborze postaci funkcji celu, które zostały opisane w rozdziale 2, należy oszacować parametry strukturalne opisujące funkcję. Dla wszystkich przedstawionych funkcji, do oszacowania nieznanych parametrów wykorzystamy metodę najmniejszych kwadratów, która minimalizuje sumę kwadratów odchyleń wartości oszacowanych funkcji celu od wartości zaobserwowanych w eksperymencie. Dla każdej z omawianych powyżej funkcji celu, wzory do wyznaczania ocen dla parametrów będą różne. Niektóre z nich, jak w przypadku prostej regresji, wzory na obliczanie współczynnika kierunkowego i wyrazu wolnego są powszechnie znane i dostępne w podręcznikach ze statystyki matematycznej. Dla innych funkcji celu takie wzory powinny zostać podane ale w konkretnych sytuacjach, w których funkcja celu będzie właściwie dobrana do opisu danych eksperymentalnych. Po oszacowaniu parametrów strukturalnych modelu badamy czy wpływ na zmienną określaną jest istotny i ewentualnie modyfikujemy model opisujący funkcję celu poprzez redukcję współczynników nieistotnych. Zarówno w modelu wyjściowym jak i modelu zredukowanym wyznaczamy współczynnik determinacji, R^2, który informuje o stopniu dopasowania funkcji celu do danych eksperymentalnych. Jeżeli uzyskany współczynnik determinacji jest niski, należy wybrać inną funkcję celu lub do zmiennej objaśniającej dołączyć inne zmienne nie uwzględniane dotychczas funkcji celu. W przypadku małej wartości współczynnika determinacji, mogą istnieć także inne przyczyny złego dopasowania funkcji celu. Jedną z takich przyczyn jest wystąpienie odstających obserwacji, które zmieniają szacowane współczynniki. Istnieje wiele metod pozwalających wyeliminować takie zmienne ale to zagadnienie nie jest przedmiotem tej pracy.

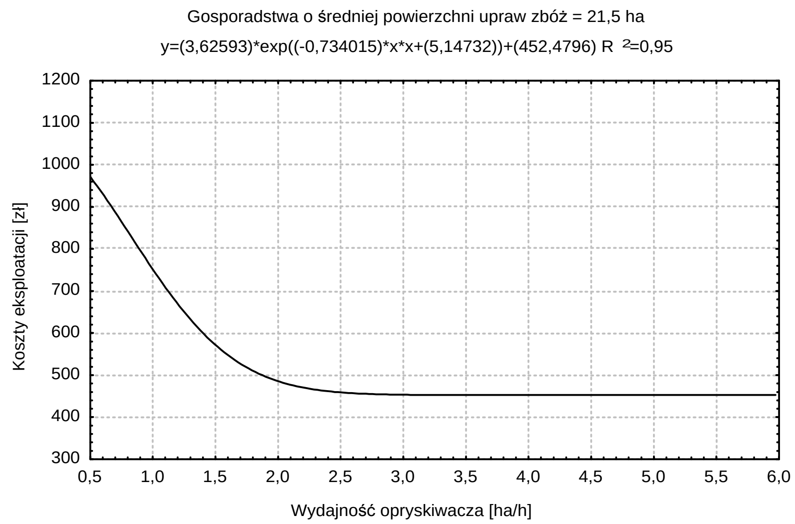
Przykład doboru funkcji celu przy doborze opryskiwaczy rolniczych

Przy określaniu zależności pomiędzy kosztami eksploatacji opryskiwaczy rolniczych wykorzystano metodyki opracowane przez Bogdanowicza i in. [1985] oraz Muzalewskiego [2002]. Rozpatrywano gospodarstwa o różnej wielkości uprawy zbóż (od 1ha do 25 ha) oraz 14 typów opryskiwaczy o wydajności od 2 do 19 ha/h. Do przykładu wybrano gospodarstwa, w którym średnia powierzchnia uprawy zbóż wynosiła około 21,5 ha. Uzyskane wyniki doboru funkcji celu przedstawiono na rys. 10–12. Jak się należało spodziewać zależność między wydajnością opryskiwaczy a nakładami robocizny opisała najlepiej funkcja hiperboliczna (rys. 10), natomiast zależność pomiędzy kosztami eksploatacji i nakładami energetycznymi a wydajnością opryskiwaczy najlepiej opisała funkcja wykładniczo-kwadratowa (rys. 11-12). Zauważono, że dla małych wartości wydajności opryskiwaczy koszty eksploatacji szybko maleją ze wzrostem wydajności, natomiast dla dużych wartości wydajności opryskiwaczy spadek ten jest bardzo powolny.



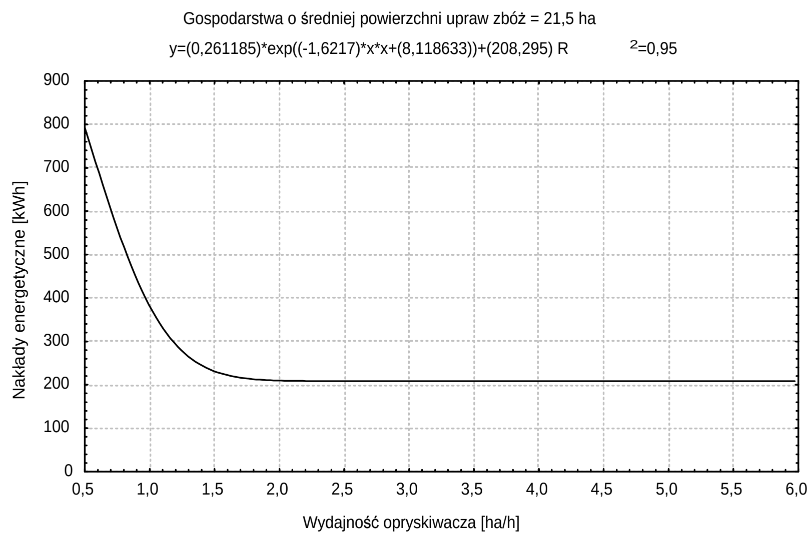
Rys. 10. Postać funkcji opisującej zależność nakładów robocizny od wydajności opryskiwaczy

Fig. 10. Function describing the dependence of labor inputs on spreader's efficiency



Rys. 11. Postać funkcji opisującej zależność kosztów eksploatacji od wydajności opryskiwaczy

Fig. 11. Function describing the dependence of exploitation costs on spreader's efficiency



Rys. 12. Postać funkcji opisującej zależność nakładów energetycznymi od wydajności opryskiwaczy

Fig. 12. Function describing the dependence of energy inputs on spreader's efficiency

Podsumowanie

W pracy przedstawiliśmy różne typy związków, jakie mogą być wykorzystywane do określania funkcji celu przy doborze maszyn i urządzeń do produkcji rolniczej. Praca ma charakter teoretyczny, dający podstawę do podejmowania właściwej decyzji o doborze postaci zależności w konkretnych zagadnieniach praktycznych. Szczegółowa postać tego związku zależeć będzie od danych eksperymentalnych. Dla konkretnych układów danych można oszacować parametry modelu a następnie poddać je analizie statystycznej. Często istnieje konieczność szacowania kilku funkcji celu i spośród nich wybrać tą, która charakteryzuje się najwyższym współczynnikiem determinacji. Zależność, wybrana w sposób przemyślany i najlepszy spośród kilku możliwych, może być wykorzystywana do właściwego prognozowania. Szczegółowe opracowania takich związków przy doborze maszyn i urządzeń rolniczych będzie przedmiotem innych prac.

Literatura

Bogdanowicz J., Banasiak J., Drozd M., 1985: Technologia prac maszynowych w rolnictwie, PWN, Warszawa.

Hanusz Z., Siarkowski Z., 2005: Metodyczne uwarunkowania określania funkcji celu przy doborze maszyn i urządzeń do produkcji rolniczej. Materiały na Jubileuszową Konferencję Międzynarodową z okazji 35-lecia Wydziału Inżynierii Produkcji AR w Lublinie.

Muzalewski A., 2002: Koszty eksploatacji maszyn. IBMER. Warszawa.

Zofia Hanusz, Zbigniew Siarkowski

ESTIMATION OF PURPOSE FUNCTION AT AGRICULTURAL DEVICES SELECTION

Summary

The paper presents general mathematical functions the most often used for prognostic issues at selection of agricultural devices. Basic properties of these functions were discussed and examples of interactions between variables, in which discussed function types are applied, were given. The method for determination of structural parameters occurring in the model and method of the model's statistical analysis were presented. The example of the method application for the purpose function determination at manure spreader selection was also presented.

Key words: purpose function, device selection, manure spreaders, agricultural production