

Metoda dopasowania funkcji nieliniowej do danych punktów pomiarowych i jej pasmo niepewności

Jacek Puchalski

Główny Urząd Miar, ul. Elektoralna 2, 00-137 Warszawa

Zygmunt Lech Warsza

Sieć Badawcza Łukasiewicz – Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów PIAP, Al. Jerozolimskie 202, 02-486 Warszawa

Streszczenie: W pracy przedstawiono propozycję metody wyznaczania parametrów i pasma niepewności funkcji nieliniowej dopasowanej do zmierzonych danych punktów badanych. By ją zlinearyzować trzeba dokonać zamiany jednej lub obu zmiennych określonej funkcji nieliniowej. Następnie metodą regresji liniowej dobrano najkorzystniejsze parametry linii prostej dopasowanej do wartości współrzędnych punktów wg ważonego ogólnego kryterium średniokwadratowego WTLS. Uwzględnia się też współczynniki autokorelacji i korelacji wzajemnej oraz niepewności obu współrzędnych oszacowane na podstawie przewodnika GUM. Z parametrów otrzymanej linii prostej i jej pasma niepewności wynikają poszukiwane parametry funkcji nieliniowej oraz jej pasmo niepewności. Podano przykłady liczbowe wyznaczania parametrów i pasma niepewności dwiema metodami dla jednej z gałęzi paraboli drugiego stopnia oraz dla złożonej funkcji wykładniczej.

Słowa kluczowe: regresja liniowa funkcji nieliniowych, dopasowanie, niepewność, pasmo niepewności, autokorelacja, korelacja wzajemna, ważona ogólna metoda najmniejszych kwadratów

1. Wprowadzenie

Charakterystyki znamionowe wielu sensorów, przetworników i przyrządów pomiarowych, jak i zależności parametrów wielu badanych zjawisk, właściwości materiałów, charakterystyki urządzeń i ich elementów opisuje się funkcjami nieliniowymi. W praktyce metrologicznej (np. we wzorcowaniu i okresowej kontroli przyrządów) wyznacza się rzeczywiste wartości parametrów badanych charakterystyk. Ich przebiegi i niepewności porównuje się ze znamionowymi, by stwierdzić, czy spełniają określone wymagania.

Podstawowym narzędziem matematycznym stosowanym w dopasowywaniu parametrów różnych funkcji liniowych i nieliniowych do zmierzonych wartości jednej lub kilku współrzędnych badanych punktów jest regresja liniowa. Dla dwu zmiennych dotyczy ona wyznaczenia funkcji $y = f(p, x)$ o liniowej zależności od jej m parametrów p_i , $i = 1, \dots, m$. Na przykład, dla paraboli $y = ax^2 + bx + c$ wyznacza się parametry a , b , c . Jako kryterium wykorzystuje się różne warianty metody najmniejszych kwadratów, w tym najbardziej ogólną jej postać o akronimie

WTLS (ang. *Weighted Total Least Squares*), czyli ważona ogólna metoda najmniejszych kwadratów). Uwzględnia ona wszystkie dane badanych punktów, tj. zmierzone wartości współrzędnych, rozkłady i niepewności oraz autokorelacje i korelacje wzajemne wyników ich pomiarów. Wyznacza się równanie badanej funkcji i granice jej pasma niepewności rozszerzonej (zwanego też korytarzem niepewności) jako przedziału występowania błędów o określonym prawdopodobieństwie. Regresję liniową stosuje się we wszystkich ścisłych, przyrodniczych i społecznych dyscyplinach naukowych, w medycynie i ochronie zdrowia, w gospodarce i dziedzinach technicznych, w tym w służbie miar. Opracowane są metody analityczne i algorytmy numeryczne do wyznaczania parametrów funkcji liniowych i wiele nieliniowych dopasowanych do danych pomiarowych.

Istnieje wiele metod regresji liniowej dla dopasowywania różnych funkcji nieliniowych do danych pomiarowych. Są one rozbudowane numerycznie i zwykle nazywane nazwiskami ich twórców. Najstarszą jest metoda Gaussa-Newtona z 1809 r. [5–8]. Metody quasi-newtonowskie to: metoda Davidson-a, Fletcher-a i Powell-a [9], metody BFGS [10], Levenberga-Marquardta [11–13] i ogólna numeryczna metoda rozwiązywania równań nieliniowych Raphsona-Newtona. Stosuje się też metodę Monte Carlo.

W podstawowych pracach matematycznych o metodach regresji zwykle nie ocenia się niepewności pomiarów ściśle według zasad międzynarodowego przewodnika wyznaczania niepewności pomiarów GUM [1] (ang. *Guide to the expression of Uncertainty in Measurement*), używanego powszechnie w praktyce pomiarowej. Wynika to stąd, że jego pierwsza wersja, inicjująca pojęcia niepewności pomiarów ukazała się w 1993 r., zaś wiele metod regresji powstało wcześniej. Nawet w najnowszych pracach zwykle nie uwzględnia się niepewności składowej typu

Autor korespondujący:

Zygmunt Lech Warsza, zlw1936@gmail.com

Artykuł recenzowany

nadesłany 17.07.2023 r., przyjęty do druku 25.08.2023 r.



Zezwala się na korzystanie z artykułu na warunkach licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 3.0

B (o symbolu u_B), którą szacuje się łączny zrandomizowany wpływ zbioru nieznanych co do wartości błędów systematycznych przyrządów użytych w eksperymencie pomiarowym. Dokonuje się to na podstawie maksymalnych dopuszczalnych błędów przyrządów podawanych przez producentów. Jeśli powtarza się pomiary współrzędnych badanych punktów, to wyznacza się też losowe składowe u_A i niepewności złożone $u = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$.

Parametry poszukiwanej funkcji $y = f(x)$ wyznacza się metodą regresji liniowej według kryterium najmniejszych kwadratów dla współrzędnych punktów badanych z uwzględnieniem ich niepewności u , autokorelacji i korelacji wzajemnej [14]. Szacuje się też pasmo niepewności rozszerzonej $U = ku(y)$ dla rzędnej $y = f(x)$ o określonym prawdopodobieństwie p .

Autorzy w serii prac o stosowaniu regresji liniowej w technice pomiarowej [15–22], w tym trzech [15, 16, 22], wcześniej opublikowanych w PAR, konsekwentnie stosowali zasady przewodnika GUM [1] do oceny niepewności pomiarów punktów badanych i pasma niepewności linii prostej wyznaczonej metodą regresji. Rozpatrzyli różne przypadki parametrów oraz pomiarów jednej i obu współrzędnych punktów badanych przy występowaniu autokorelacji dla zbiorów błędów opisywanych przez niepewności u_A oraz u_B dla każdej z obu zmiennych i z uwzględnieniem ich autokorelacji i korelacji wzajemnej, czyli kros-korelacji. Uwzględni się to też w proponowanej metodzie regresji liniowej dla funkcji nieliniowych.

2. Metoda dopasowania funkcji nieliniowej do danych pomiarowych

Do wyznaczania parametrów modeli matematycznych opisujących charakterystyki urządzeń i ich elementy, w tym funkcji nieliniowych używa się teraz powszechnie obliczeń komputerowych i metody najmniejszych kwadratów. Przedtem unikano tej metody jako bardzo uciążliwej obliczeniowo. Stosowano m.in. wzrokowe dopasowywanie wykresów krzywych do punktów pomiarowych zaznaczanych na papierze milimetrowym. Krzywe nieliniowe linearyzowano przez dobór dla poszukiwanej funkcji odpowiedniej podziałki na tym papierze, np. skalę kwadratową, logarytmiczną lub wykładniczą. Była to metoda mało dokładna.

Poniżej proponuje się podobną numeryczną metodę wyznaczania parametrów określonej funkcji nieliniowej $y = f(x)$ dopasowanej do danych eksperymentalnych, ale realizowaną komputerowo. W metodzie tej też dokonuje się zmiany zmiennych określających współrzędne punktów pomiarowych, takiej, aby w nowym układzie kartezjańskim uzyskać linię prostą. Nowe zmienne ψ i ξ są różnymi funkcjami jednej ze zmiennych pierwotnych y lub x . Zakłada się też, że są one sparаметryzowane jednym wspólnym parametrem β . Równanie linii prostej w nowych współrzędnych ma wówczas postać:

$$\psi(y, \beta) = \theta_1 \xi(x, \beta) + \theta_0 \quad (1)$$

Parametry równania (1) zostaną dopasowane metodą regresji liniowej do danych pomiarowych według uogólnionego kryterium najmniejszych kwadratów WTLS. Z otrzymanych wartości parametrów θ_1 , θ_0 i β wyznaczy się parametry funkcji nieliniowej. W tym ujęciu, wskutek niedokładności pomiarów, zarówno współczynnik nachylenia θ_1 , jak i wyraz wolny θ_0 będą miały niepewności $u(\theta_1) \neq 0$ i $u(\theta_0) \neq 0$.

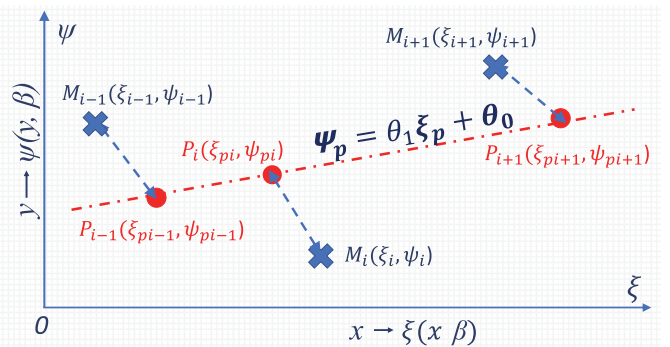
W rozwiązywaniu zagadnień techniki pomiarowej metodami regresji zastosuje się liniowe przybliżenie wartości błędów i niepewności przez człon z pierwszą pochodną. Jest to dopuszczalne, gdy ich wartości nie przekraczają kilku procent zakresu i odchylenia położenia punktów od wyznaczonej funkcji (zmienna reszt-

kowa) nie są zbyt duże. Dlatego też proponowaną tu metodę nazwalibyśmy przybliżoną.

W nowych zmiennych ψ i ξ występuje parametr β . Dla każdego zbioru danych pomiarowych ma on określoną najkorzystniejszą stałą wartość o niepewności $u(\beta) \approx 0$. Ograniczenie rozrzutu z pierwszą pochodną umożliwia minimalizację funkcji kryterialnej $\phi_{\psi\xi}$ jako dwuargumentowej zależnej tylko od θ_1 i β . Rozwiązanie wymaga użycia złożonych algorytmów numerycznych. Większa liczba dobieranych parametrów znacznie skomplikowałaby procedurę minimalizacji funkcji $\phi_{\psi\xi}$. Mogłyby pojawić się lokalne minima, a nawet funkcja kryterialna bez globalnego minimum. Zwiększyłyby się też istotnie czas obliczeń numerycznych.

Dokładność wyniku otrzymanego omawianą metodą ocenia się przez szerokość pasma niepewności wyznaczonej funkcji, a przy znanym znamionowym jej przebiegu, przez rozbieżność obu krzywych.

Jako przykłady obliczeniowe proponowanej metody rozpatrzy się dwa warianty wyznaczania parametrów paraboli drugiego stopnia oraz złożonej funkcji wykładniczej, uznanej w monografii N. Drapera i H. Smitha [25] za niemożliwą do linearyzacji przez zmianę zmiennych. Parametry obu funkcji nieliniowych zostaną dopasowane do danych pomiarowych badanych punktów dla różnych niepewności i korelacji składowych losowych ich współrzędnych. Funkcja nieliniowa $y = f(x)$ po zamianie zmiennych na ψ i ξ staje się linią prostą $\psi(y, \beta) = \theta_1 \xi(x, \beta) + \theta_0$ dopasowaną do punktów $M_i(\xi_i, \psi_i)$ metodą regresji liniowej (rys. 1). Wykorzystamy rozważania dotyczące regresji liniowej linii prostej dla pomiarów jednej i obu zmiennych oraz różnych przypadków rozrzutu współrzędnych, ich niepewności, autokorelacji i korelacji wzajemnej zmiennych. Zawarte są one we wcześniejszych naszych pracach [15–24], w tym polskojęzycznych [15, 16, 20, 22, 23].



Rys. 1. Wynik przekształcenia funkcji nieliniowej w linię prostą
Fig. 1. The result of transforming the non-linear function into a straight line

Niepewności parametrów θ_1 i θ_0 prostej (1) zależą od niepewności pomiarów współrzędnych punktów $M_i(x_i, y_i)$ (dla $i = 1, \dots, n$) i od wszystkich autokorelacji i korelacji wzajemnych zbiorów współrzędnych, które mogą wystąpić w tych pomiarach. Wpływy te opisuje ogólnie macierz kowariancji

$U_Z = \begin{bmatrix} U_X & U_{XY} \\ U_{XY}^T & U_Y \end{bmatrix}$. Składa się ona z czterech macierzy i występuje w funkcji kryterialnej $(\Delta X, \Delta Y)$:

$$\phi(\Delta X, \Delta Y) = [\Delta X, \Delta Y] \begin{bmatrix} U_X & U_{XY} \\ U_{XY}^T & U_Y \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \end{bmatrix} \rightarrow \min \quad (2)$$

gdzie: $\Delta X = X - X_p$ i $\Delta Y = Y - Y_p$ to wektory odchylenia jako różnice między wektorami współrzędnych punktów pomiarowych $X = [x_1, \dots, x_n]^T$, $Y = [y_1, \dots, y_n]^T$ i wektorami $X_p = [x_{p1}, \dots, x_{pn}]^T$ i $Y_p = [y_{p1}, \dots, y_{pn}]^T$ odpowiadających im współrzędnych punk-

tów leżących na krzywej dopasowywanej, U_X , U_Y i U_{XY} – macierze kowariancji współrzędnych x i y punktów badanych i ich korelacji wzajemnych (krzyżowych).

Dopasowanie funkcji nieliniowej $y = f(x)$ do zmierzonych współrzędnych (x_i, y_i) punktów badanych wynika z dopasowania metodą regresji linii prostej $\psi = \theta_1 \xi + \theta_0$ (rys. 1) do nowych współrzędnych punktów $M_i(\xi_i, \psi_i)$. Punktem tym odpowiadają punkty $P_i(\xi_{pi}, \psi_{pi})$ dla $i = 1, \dots, n$, leżące na tej prostej. Odcinki łączące oba rodzaje punktów, w ogólnym przypadku mają różne długości i nachylenia. Są one zależne od nachylenia prostej regresji i od elementów macierzy kowariancji zmierzonych współrzędnych. Przy braku korelacji, macierz ta staje się diagonalna i nachylenia odcinków łączących punkty zależą tylko od nachylenia prostej regresji i wzajemnego stosunku kwadratów niepewności obu współrzędnych w każdym punkcie pomiarowym. W szczególnym przypadku dla równych niepewności obu współrzędnych punktów, odcinki te są prostopadłe do prostej regresji. Punktem pomiarowym M_i odpowiadają na tej prostej punkty P_i o położeniu zależnym od współrzędnych M_i oraz ich niepewności i współczynników korelacji. Jeśli występują tylko niepewności y , to punkty P_i są rzutami punktów M_i w kierunku pionowym 0ψ na tę prostą.

Zależności opisujące propagację odchyłeń przy zmianie zmiennej można przedstawić w postaci rozwinięcia w szereg Taylora. Małe wartości odchyłeń zmiennej resztkowej wraz z błędami pomiaru współrzędnych punktów przybliża się z wystarczającą dokładnością pierwszymi wyrazami tego rozwinięcia. Za pomocą pierwszej pochodnej określa się odchylenia ψ i ξ jako $\Delta \xi \approx \xi'(x, \beta) \Delta x$ i $\Delta \psi \approx \psi'(y, \beta) \Delta y$. Zapisuje się je wspólnie w macierzy diagonalnej L o rozmiarze $[2n \times 2n]$:

$$L = \begin{bmatrix} \xi'(x_1, \beta) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \xi'(x_n, \beta) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \psi'(y_1, \beta) & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \psi'(y_n, \beta) \end{bmatrix} \quad (3)$$

dla której $LL^{-1} = L^{-1}L = I$, gdzie I – jest macierzą jednostkową.

Niepewności w nowych współrzędnych kartezjańskich wynikają pośrednio z tego liniowego przybliżenia. Dla gaussowskich rozkładów odchyłeń: $u(\psi) \approx |\psi'(y, \beta)|u(y)$ i $u(\xi) \approx |\xi'(x, \beta)|u(x)$ i funkcja kryterialna (2) w nowych współrzędnych kartezjańskich przyjmuje postać następującą:

$$\begin{aligned} \phi(\Delta X, \Delta Y) &= [\Delta X, \Delta Y] L L^{-1} \begin{bmatrix} U_X & U_{XY} \\ U_{XY}^T & U_Y \end{bmatrix}^{-1} L^{-1} L \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \end{bmatrix} \approx \\ &\approx [\Delta \xi, \Delta \psi] \begin{bmatrix} U_\xi & U_{\xi\psi} \\ U_{\xi\psi}^T & U_\psi \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta \xi \\ \Delta \psi \end{bmatrix} = \phi_{\psi\xi}(\Delta \xi, \Delta \psi, \beta) \end{aligned} \quad (4)$$

Punkty pomiarowe i macierze kowariancji w nowych współrzędnych określone są odpowiednio przez wektory ξ i ψ oraz macierze U_ξ , U_ψ i $U_{\xi\psi}$. Jedynie nieznanym jest parametr β . Należy dobrać taką jego stałą wartość, aby zminimalizować funkcję kryterialną $\phi_{\psi\xi}$. Zakłada się, że niepewność tej operacji jest pomijalnie mała, tzn. $u(\beta) \approx 0$. Przy przekształceniu wektorów X , X_p i Y , Y_p odpowiednio w wektory ξ , ξ_p i ψ , ψ_p , z (2) i (4) w celu dopasowania funkcji nieliniowej otrzymuje się układ dwu równań: opisujące minimalizację nowej funkcji kryterialnej $\phi_{\psi\xi}$ i równanie linii prostej. Podano je poniżej.

$$\begin{cases} \phi_{\psi\xi}(\Delta \xi, \Delta \psi, \beta) \rightarrow \min \\ \psi_p = \theta_1 \xi_p + \theta_0 \end{cases} \quad (5a, b)$$

W przypadku ogólnym, z uwzględnieniem wszystkich możliwych korelacji [14, 19, 22], rozwiązanie tego układu w nowych współrzędnych kartezjańskich ψ i ξ jest identyczne jak dla prostej regresji metodą WTLS wraz z przypadkami szczególnymi [19, 22–24]. Funkcję kryterialną $\phi_{\psi\xi}$ wyznacza się numerycznie. Zależy ona od nachylenia prostej θ_1 i jej przesunięcia θ_0 powiązanych jednoznacznie jako relacja $\theta_0 = (S_y - \theta_1 S_x) / S$ parametrów pomocniczych S , S_x i S_y , które są różnymi funkcjami współrzędnych x_i , y_i i efektywnej macierzy kowariancji zdefiniowanymi i opisanymi w [19, 22]. Korzystając z charakterystyki obliczonej w kilku punktach zmiennej θ_1 , dobiera się parametr β i znajduje minimum funkcji $\phi_{\psi\xi}(\theta_1)$, by otrzymać linię prostą dopasowaną do punktów pomiarowych. W nowych współrzędnych ψ i ξ niepewności prostej związane są tylko z parametrami θ_1 i θ_0 . Przy wzajemnym ich skorelowaniu, istotnym parametrem jest współczynnik korelacji $\rho_{\theta_1\theta_0}$. Elementy te można wyznaczyć z macierzy określonej w (4) wykorzystując propagację niepewności i przybliżone wzory dla współczynników wrażliwości opisane w [19, 22]. Granice pasma niepewności, jako obszaru wokół poszukiwanej funkcji, wyznacza się numerycznie w środowisku programowym, np. R, MATLAB i metodą Monte Carlo.

W generacji próbek z macierzy kowariancji (4) wykorzystuje się metodę dekompozycji Choleski-ego [3]. Metoda ta umożliwia wygenerowanie wielowymiarowej zmiennej Z o skorelowanych składowych określonych przez macierz kowariancji U_Z . Rozkład Choleski-ego polega na przedstawieniu macierzy kowariancji U_Z jako iloczynu dwu macierzy trójkątnych: dolnej H i górnej jako jej transpozycji H^T . Wtedy $U_Z = HH^T$. W ten sposób uzyskuje się losowe wielowymiarowe wektory Z o składowych skorelowanych według macierzy U_Z . Otrzymuje się to przez wygenerowanie wektorów R jako nieskorelowanych próbek z rozkładu normalnego $N(0, 1)$, a następnie pomnożeniu macierzy H^T przez te wektory, tj. $Z = H^T R + E$. Wektor $E = [\xi, \psi]$ jest wielowymiarową wartością oczekiwaną dla rozkładu pierwotnego. Wygenerowane skorelowane wektory losowe służą do wyznaczenia z równania (5b) rozkładów współczynnika kierunkowego θ_1 i wyrazu wolnego θ_0 , by znaleźć przedział rozszerzenia $\pm U_\psi$ o prawdopodobieństwie 0,95 dla dowolnie wybranej wartości zmiennej ξ . Wyznacza się numerycznie wartości parametrów prostej, jako oznaczone indeksami ‘min’, tj.: $\theta_{1\min}$, $\theta_{0\min}$, $u(\theta_{1\min})$, $u(\theta_{0\min})$ i współczynnik korelacji $\rho_{\theta_1\theta_0}$. Zakłada się, że istnieje funkcja odwrotna ψ^{-1} . Dopasowaną nieliniową funkcję można wtedy zapisać jako:

$$y = \psi^{-1}(\theta_{1\min} \xi(x, \beta_{\min}) + \theta_{0\min}) \quad (6)$$

Granice pasma niepewności rozszerzonej wielkości wyjściowej opisuje wspólnie wzór:

$$\begin{aligned} U_{y\pm} &= \\ &= \left| \psi^{-1}(\theta_{1\min} \xi(x, \beta_{\min}) + \theta_{0\min} \pm U) - \psi^{-1}(\theta_{1\min} \xi(x, \beta_{\min}) + \theta_{0\min}) \right| \end{aligned} \quad (7)$$

lub w wersji przybliżonej

$$U_y = U / \psi' \quad (8)$$

gdzie:

$$U_y = t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-2} \sqrt{u^2(\theta_{1\min}) \xi^2 + 2\rho_{\theta_1\theta_0} \xi u(\theta_{1\min}) u(\theta_{0\min}) + u^2(\theta_{0\min})} \quad (8a)$$

– niepewność rozszerzona argumentu funkcji odwrotnej dla skorelowanych rozkładów $\theta_{1\min}$ i $\theta_{0\min}$, a współczynnik $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-2}$

odpowiada odwróconej dystrybucji rozkładu *t*-Studenta o $n - 2$ stopniach swobody i pokryciu z prawdopodobieństwem $1 - \alpha = 0,95$ ($\alpha = 0,05$).

3. Dopasowanie funkcji drugiego stopnia do punktów pomiarowych

Charakterystyki wielu rodzajów przyrządów pomiarowych, czujników i przetworników oraz właściwości badanych materiałów, wyznacza się z pomiarów współrzędnych odpowiedniej liczby punktów badanych. Gdy są one opisywane funkcjami nieliniowymi, to parametry równania tej funkcji, wyznacza się stosując metodę regresji liniowej. Przy wzorcowaniu lub kalibracji przyrządów wyniki porównuje się z danymi znamionowymi i szacuje się ich dokładność. Rozpatrzmy przykład dopasowywania charakterystyki opisanej funkcją drugiego stopnia [24] jako gałęzi paraboli o równaniu:

$$y = Ax^2 + Bx + C \tag{9}$$

lub w postaci kanonicznej

$$y = Ax^2 + Bx + C = A\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + C - \frac{B^2}{4A} \tag{10}$$

Przez odpowiednią zmianę zmiennych równanie to można przekształcić w liniowe i dopasować je do nowych współrzędnych punktów badanych [24]. Rozpatrzmy dwie metody dopasowania krzywej parabolicznej.

3.1. Dopasowanie paraboli metodą I

Metoda I polega na przekształceniu współrzędnej x w nową współrzędną kartezjańską $\xi(x, \beta) = (x + \beta)^2$ oraz podstawieniu

$$\theta_1 = A, \quad \beta = \frac{B}{2A} \quad \text{i} \quad \theta_0 = C - \frac{B^2}{4A}. \quad \text{Zaś rzędna się nie zmienia,}$$

tj. $\psi = y$. Równanie (10) przekształci się więc do postaci:

$$y = \theta_1 \xi + \theta_0 \tag{11}$$

Niepewność nowej współrzędnej ξ określa się z prawa propagacji niepewności. Dla małych jej wartości uwzględnia się tylko wyrazy z pierwszą pochodną:

$$u(\xi_i) \approx \left| \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \right| u(x_i) = 2|x_i + \beta| u(x_i) \quad i = 1, \dots, n. \tag{11a}$$

Błędy pomiaru określa się przez przybliżenia:

$$\Delta \xi_i \approx \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \Delta x_i = 2(x_i + \beta) \Delta x_i. \tag{11b}$$

Jako przykład rozpatrzmy symulowane badania rzeczywistej charakterystyki przetwarzania przetwornika napięcia o znamionowej charakterystyce parabolicznej opisanej ogólnie wzorem (10). Dla dziesięciu wartości x_i jego napięcia wejściowego x zmierzono wartości y_i napięcia wyjściowego y . Pomiaru obu napięć wykonano miernikiem o standardowej niepewności względnej $\rho = 2\%$. W tabeli 1 podano wartości obu współrzędnych punktów pomiarowych i symulowane odchyłki Δy od charakterystyki znamionowej $y \approx 0,133x^2 + 0,04x + 1,003$.

Przy użyciu skróty Excel (Dopasowanie, parabola I.xlsx ver.1.01), na podstawie danych pomiarowych z dziesięciu punktów, wyznaczono wartości funkcji $\phi_{\psi\xi}(\theta_1)$. Skorzystano tu

z wzorów na efektywną macierz odwrotną do macierzy kowariancji i z parametrów pomocniczych [19, 22].

Minimalizacji dokonano za pomocą parametru β monitorując wyznaczoną charakterystykę $\phi_{\psi\xi}(\theta_1)$ zawierającą lokalne minimum. Dla dopasowania parametru $\beta = \beta_{\min}$ otrzymuje się minimum globalne. Ilustruje to rysunek 2a. Dla tych samych danych punktów pomiarowych wyznaczono charakterystykę $\phi_{\psi\xi}(\theta_0)$ wykorzystując jednoznaczną zależność między wartością wyrazu wolnego, a wartością współczynnika kierunkowego w punkcie globalnego minimum funkcji $\phi_{\psi\xi}$ (rys. 2b). Dla minimum funkcji kryterialnej otrzymuje się następujące wzory dla parametrów paraboli:

$$A = \theta_{1\min}, \tag{12a}$$

$$B = 2A\beta_{\min} = 2\beta_{\min}\theta_{1\min}, \tag{12b}$$

$$C = \theta_{0\min} + \beta_{\min}^2 \theta_{1\min}. \tag{12c}$$

Dopasowaną funkcję drugiego stopnia z pasmem niepewności $\pm U_y(x)$ opisuje równanie:

$$y = \theta_{1\min}(x + \beta_{\min})^2 + \theta_{0\min} \pm U_y(x) \tag{13}$$

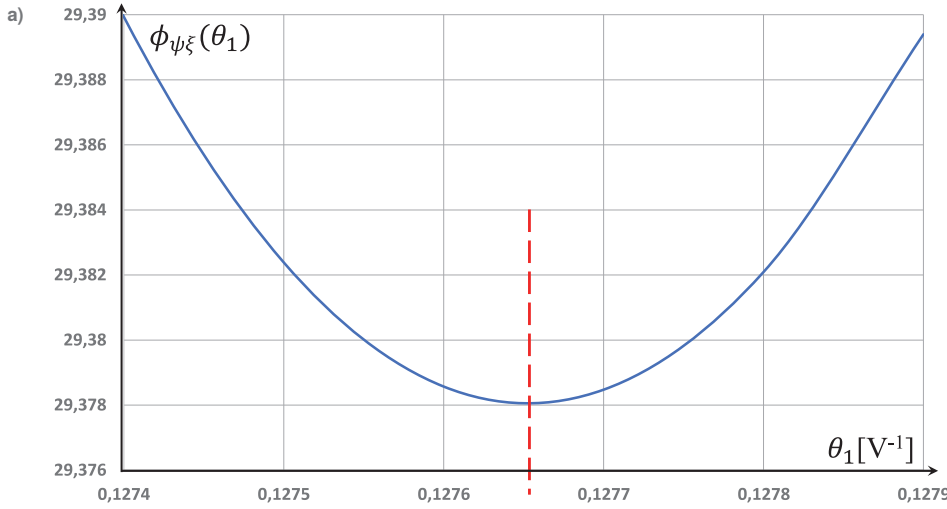
gdzie niepewność rozszerzoną U_y określają wzory (7, 8).

Z wartości współrzędnych $(\theta_{1\min}, \theta_{0\min})$ dla punktu globalnego minimum (rys. 2a,b) otrzymano następujące parametry dopasowanej paraboli drugiego stopnia: $A = 0,1276$, $B = 0,0534$, $C = 0,9812$. Wraz z pasmem niepewności przedstawiono ją na rys. 3a. Po przyjęciu jednakowych współczynników autokorelacji $+0,2$ dla elementów macierzy U_x , U_y i ujemnych współczynników $-0,2$ korelacji krzyżowych x_i i y_j dla $i, j = 1, \dots, n$, tj. dla macierzy U_{XY} otrzymano następujące parametry: $\beta_{\min} = 0,24$, $\theta_{1\min} = 0,1275$, $\theta_{0\min} = 0,968$, globalne minimum $\phi_{\psi\xi\min} \approx 36,49$ oraz inne równanie dopasowanej paraboli 2-go stopnia $y = 0,1275x^2 + 0,0612x + 0,975$. Podano je wraz z pasmem niepewności na rys. 3b.

Tabela 1. Współrzędne badanych punktów paraboli drugiego stopnia o parametrach znamionowych $A = 0,13333 \approx 0,133$; $B = 0,039999 \approx 0,04$; $C = 1,003$ i ich odchyłki Δy

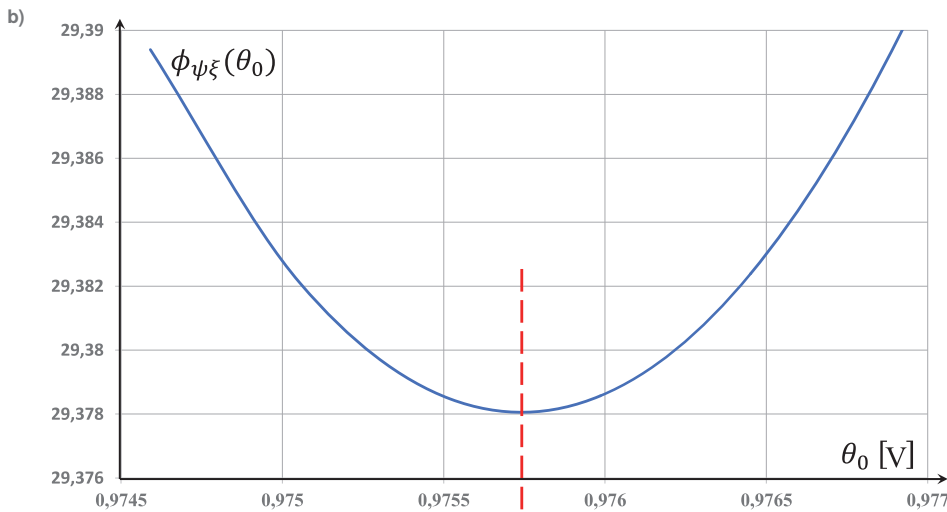
Table 1. Coordinates of the examined points of the 2nd degree parabola with parameters rated $A = 0.13333 \approx 0.133$; $B = 0.039999 \approx 0.04$; $C = 1.003$ and their deviations Δy

Lp.	Współrzędne punktów pomiarowych		Błędy dopasowania do znamionowej charakterystyki parabolicznej Δy [V]
	[V]	[V]	
1	1	1,14	-0,034
2	2	1,72	0,1
3	3	2,14	-0,18
4	4	3,26	0,04
5	5	4,66	0,12
6	6	5,71	-0,33
7	7	6,83	-0,99
8	8	10,19	0,33
9	9	12,50	0,34
10	10	13,64	-1,1



Rys. 2. Quasi-paraboliczne charakterystyki numeryczne:

a) $\phi_{\psi\xi}(\theta_1)$,
 b) $\phi_{\psi\xi}(\theta_0)$ dla $\beta_{\min} = 0,21$, $\phi_{\psi\xi\min} \approx 29,38$
 Fig. 2. Quasi-parabolic numerical:
 a) characteristics $\phi_{\psi\xi}(\theta_1)$,
 b) $\phi_{\psi\xi}(\theta_0)$ dla $\beta_{\min} = 0,21$, $\phi_{\psi\xi\min} \approx 29,38$



Wpływ korelacji na przebiegi granic pasma niepewności ilustruje rys. 4.

Dla współrzędnych skorelowanych w całym badanym zakresie charakterystyk parabolicznej otrzymano prawie dwukrotnie szersze pasmo niepewności, niż przy braku skorelowania.

Równania obu otrzymanych parabol i paraboli znamionowej $y \approx 0,133x^2 + 0,04x + 1,003$ różnią się niewiele. Parabola ta przebiega wewnątrz ich pasm niepewności.

3.2. Dopasowanie parabol – metoda II

Metoda II polega na pierwiastkowaniu równania (10) wykonanym po przeniesieniu wyrazu wolnego $\beta = C - \frac{B^2}{4A}$ i zamianie

współrzędnej y nową współrzędną $\psi(y, \beta) = \sqrt{y - \beta}$ dla $y > \beta$

oraz na podstawieniu $\theta_1 = \sqrt{A}$, ($A > 0$) i $\theta_0 = \frac{B}{2\sqrt{A}}$. Wówczas

$C = \beta + \frac{B^2}{4A}$. Zakłada się, że w całym zakresie pomiarowym wartość $x + \frac{\beta}{2A} > 0$ i że moduł z kwadratu po wykonaniu pierwiastkowania w równaniu (10) jest równy tej wartości. Natomiast współrzędna x pozostaje niezmienną, tzn. $\xi(x, \beta) = x$ i równanie (10) przekształca się do postaci

$$\psi = \theta_1 x + \theta_0 \tag{14}$$

Niepewności dla nowej współrzędnej ψ określone są z prawa propagacji niepewności przy uwzględnieniu wyrazów tylko

$$z \text{ pierwszą pochodną } u(\psi_i) \approx \left| \frac{\partial \psi}{\partial y_i} \right| u(y_i) = \frac{u(y_i)}{2\sqrt{y - \beta}} \text{ dla } i = 1, \dots, n.$$

$$\text{Błędy wynikają z ich propagacji, tj. } \Delta \psi_i \approx \frac{\partial \psi}{\partial y_i} \Delta y_i = \frac{\Delta y_i}{2\sqrt{y - \beta}}.$$

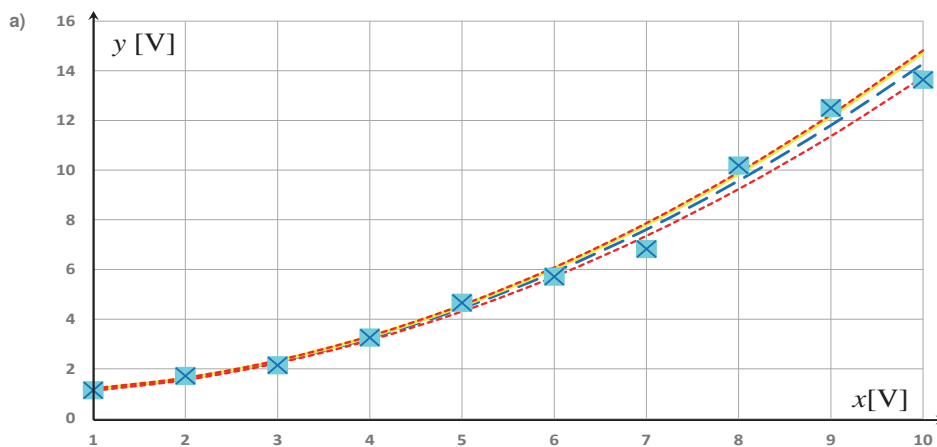
Zakłada się też, że niepewność standardowa $u(\beta) \approx 0$.

W tabeli 2 podano wartości y parabolii drugiego stopnia i niepewności rozszerzone pomiarów skorelowanych

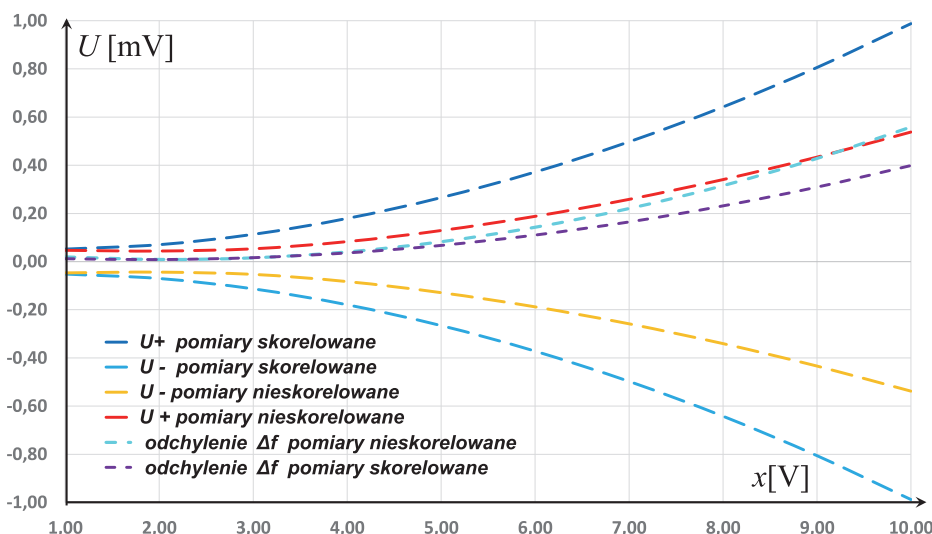
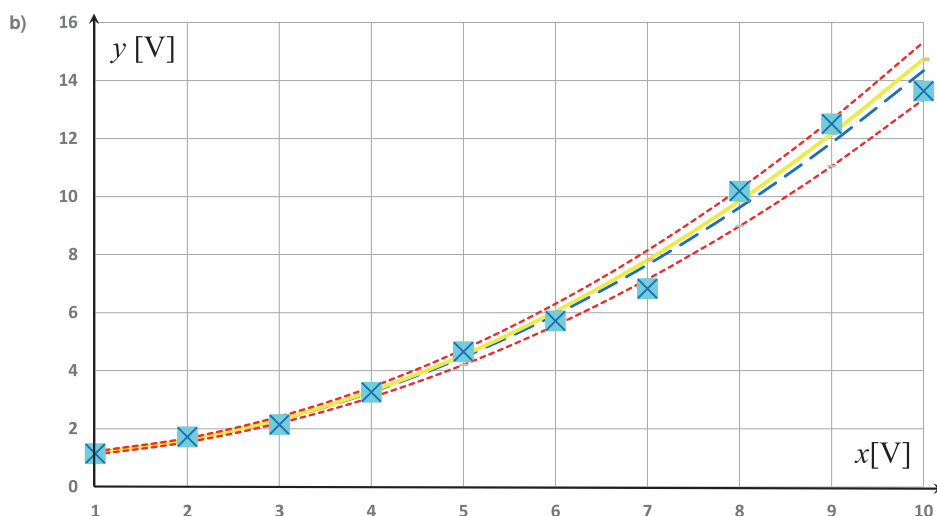
$$\left(k = t_{1-\frac{0,05}{2}, 10-2} = 2,31 \right) \text{ i nieskorelowanych, wyznaczone meto-}$$

dami I i II dla x_i punktów badanych. Otrzymane dane wykorzystano do wyznaczenia krzywych podanych na rys. 5 i 6.

Na rys. 5 pokazano pasma niepewności bezwzględnych i odchylenia charakterystyki dopasowanej od nominalnej dla metody II. Otrzymano je z użyciem skoroszytu Excel (Dopasowanie – parabola II.xlsx ver.1.01). Natomiast na rys. 6 przedstawiono wartości niepewności względnych $\delta[\%]$ otrzymane dla obu metod I i II. Przy nieskorelowanych wynikach pomiarów wartości te są bliskie sobie.



Rys. 3. Parabola dopasowana do danych punktów badanych X z tabeli 1 – linia niebieska przerywana i jej pasmo niepewności dla pokrycia 0,95 – linie czerwone drobno przerywane: a) z korelacją, b) bez korelacji
Fig. 3. Parabola fitted to the data of the test points X from table 1 – dashed blue line and its uncertainty band for coverage 0.95 – finely dashed red lines: a) with correlation, b) without correlation



Rys. 4. Niepewności rozszerzone U i odchylenie Δf charakterystyki dopasowanej od nominalnej dla skorelowanych i nieskorelowanych wielkości mierzonych jako funkcje współrzędnej x
Fig. 4. Expanded uncertainties U and deviation Δf of the fitted characteristic from the nominal one for correlated and uncorrelated quantities measured as functions of the x coordinate

4. Dopasowanie złożonej funkcji wykładniczej

Rozważmy dopasowywanie złożonej krzywej wykładniczej o dwu parametrach α_1 i α_2 , opisaną wzorem:

$$y = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} [\exp(-\alpha_2 x) - \exp(-\alpha_1 x)] + \alpha_3 \quad (15)$$

Parametry równania (15) dopasowuje się ważoną metodą najmniejszych kwadratów (WTLS) o wartościach

$$\alpha_1 = 0,999 \approx 1; \quad \alpha_2 = 0,0999 \approx 0,1; \quad \alpha_3 = 0. \quad (15a)$$

Dopasowanie krzywej (15) do punktów pomiarowych z tabeli 2 metodą przybliżoną polega na skorzystaniu z nowych zmiennych ξ i ψ opisanych jako $\xi(x, \alpha_1, \alpha_2) = \exp(-\alpha_2 x) - \exp(-\alpha_1 x)$

oraz $\psi(y) = y$. Funkcja (15) we współrzędnych kartezjańskich ξ i ψ przyjmuje postać:

$$\psi(y) = \theta_1 \xi(x, \alpha_1, \alpha_2) + \theta_0 \quad (15b)$$

gdzie dodatkowo wprowadzone parametry są jednoznacznie okre-

$$\text{słone } \theta_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \text{ i } \theta_0 = \alpha_3.$$

W tym przypadku parametr dopasowania β jest jednym z parametrów α_1 lub α_2 , np. $\beta = \alpha_1$. Numeryczne dopasowanie zrealizowano z wykorzystaniem przygotowanego skoroszytu Excel (Dopasowanie, wykładnicza. xlsx ver. 1.01) oraz środowiska R, a także powtórzono w środowisku MATLAB (skrypt.Uab.txt). Dla zminimalizowania funkcji kryterialnej wykreślono charakterystykę $\phi(\theta_1)$. Dopasowanie jest zaś realizowane przez parametr $\beta_{\min} = \alpha_1$. Wtedy $\alpha_2 = \beta_{\min}(1 - 1/\theta_{\min})$, $\alpha_3 = \theta_{\min}$.

Z propagacji błędów i propagacji niepewności otrzymuje się:

$$\Delta \xi \approx \xi'(x) \Delta x = \left[-\alpha_2 \exp(-\alpha_2 x) + \alpha_1 \exp(-\alpha_1 x) \right] \Delta x, \quad (16a)$$

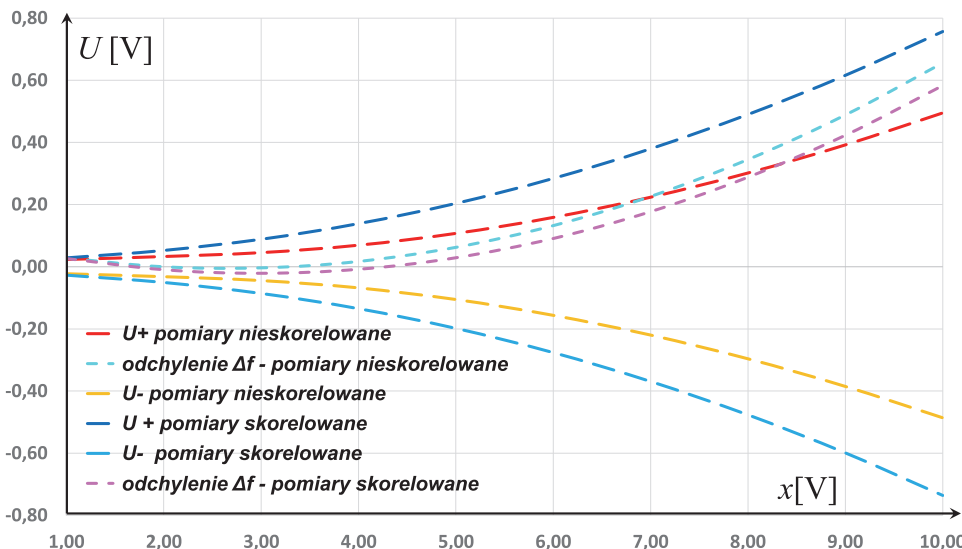
$$u(\xi) = \left| \xi'(x) \right| u(x) = \left| -\alpha_2 \exp(-\alpha_2 x) + \alpha_1 \exp(-\alpha_1 x) \right| u(x). \quad (16b)$$

W przykładzie przyjęto, że niepewności parametrów θ_1 i θ_0 , tj. $u(\theta_1) \neq 0$ i $u(\theta_0) \neq 0$, wynikają z niepewności punktów pomiarowych ($\delta = 2\%$) i umożliwiają określenie przebiegu granic pasma niepewności. Natomiast wpływ niepewności parametru β jest pomijalny. W porównaniu do dopasowania krzywą paraboliczną, w tym przypadku, przy tak wybranej parametryzacji krzywej dwuwykładniczej opisanej (15) otrzymuje się dodatkowe zależności nowej współrzędnej ξ oraz jej niepewności

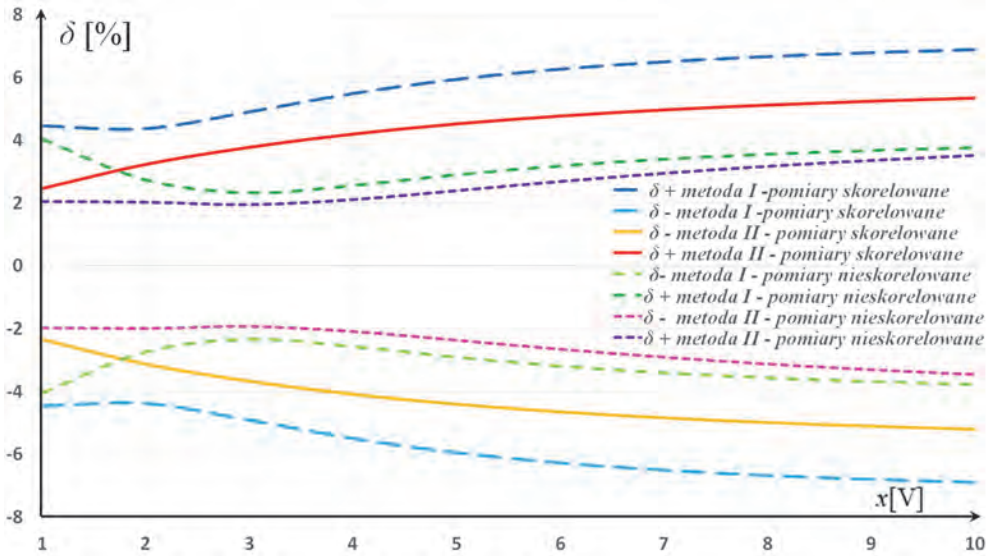
Tabela 2. Wartości y dopasowanej krzywej drugiego stopnia i niepewności rozszerzone pomiarów nieskorelowanych i skorelowanych (k = 2,31) wyznaczone metodami I i II

Table 2. The y-values of the second-order curve fit and the expanded uncertainties of uncorrelated and correlated measurements (k = 2,31) determined by methods I and II

Lp.	Metoda I				Metoda II			
	Dopasowanie y[V]		Niepewność rozszerzona U_y [V]		Dopasowanie y [V]		Niepewność rozszerzona U_y [V]	
	Nieskorelowane	Skorelowane	Nieskorelowane	Skorelowane	Nieskorelowane	Skorelowane	Nieskorelowane $U_{y^-} \approx U_{y^+}$	Skorelowane $U_{y^-} \approx U_{y^+}$
1	1,16	1,16	0,05	0,05	1,15	1,15	0,02	0,03
2	1,60	1,61	0,04	0,07	1,62	1,63	0,03	0,05
3	2,29	2,31	0,05	0,11	2,33	2,34	0,05	0,09
4	3,24	3,26	0,08	0,18	3,28	3,30	0,07	0,14
5	4,44	4,47	0,13	0,27	4,47	4,51	0,11	0,20
6	5,90	5,93	0,19	0,37	5,91	5,95	0,16	0,28
7	7,61	7,65	0,26	0,50	7,59	7,64	0,22	0,38
8	9,58	9,63	0,34	0,64	9,51	9,57	0,30	0,49
9	11,80	11,85	0,43	0,81	11,67	11,74	0,39	0,62
10	14,28	14,34	0,54	0,99	14,08	14,15	0,50	0,76



Rys. 5. Niepewności rozszerzone U_y paraboli i odchylenie Δf charakterystyki dopasowanej od nominalnej w metodzie II dla skorelowanych i nieskorelowanych wielkości mierzonych, w funkcji współrzędnej x
Fig. 5. Expanded uncertainties U_y of the parabola and deviation Δf of the fitted characteristic from the nominal in method II for correlated and uncorrelated measurands, as a function of the x coordinate

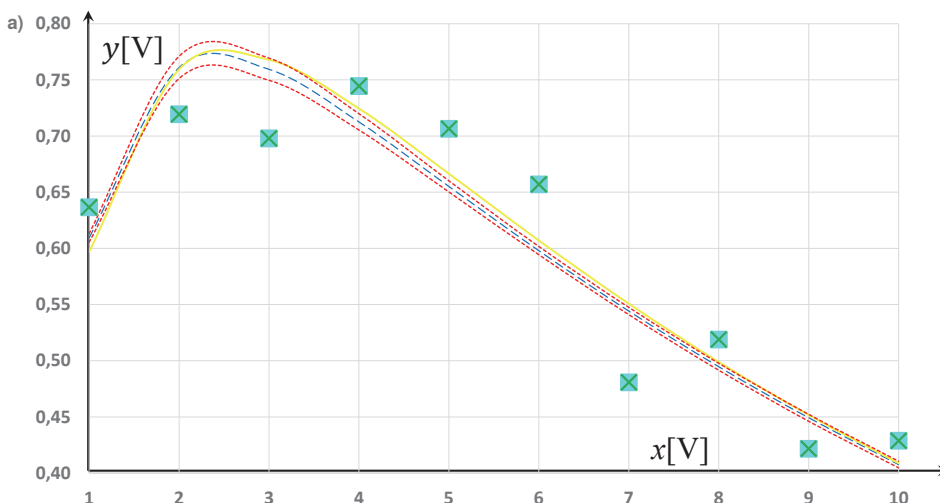


Rys. 6. Niepewność względna rozszerzona w metodzie I i II dla skorelowanych i nieskorelowanych wielkości mierzonych w funkcji współrzędnej x

Fig. 6. Expanded relative uncertainty in methods I and II for correlated ones and uncorrelated measured quantities as a function of the x

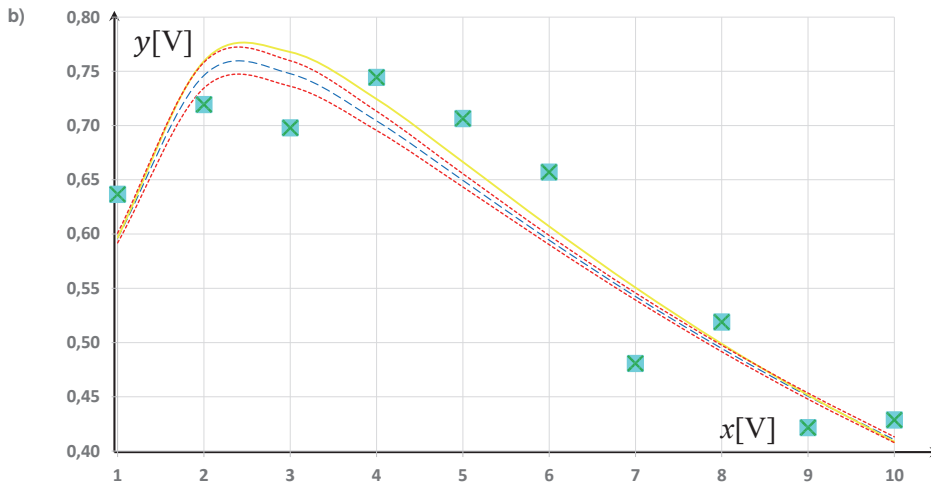
Tabela 3. Wartości y dopasowanej krzywej dwuwykładniczej i rozszerzone niepewności pomiarów nieskorelowanych i skorelowanych ($k = 2,31$)
Table 3. The y-values of the fitted biexponential curve and the expanded uncertainties of uncorrelated and correlated measurements ($k = 2,31$)

Współrzędne punktów pomiarowych x, y [V]		Wartości poprawne i zasymulowane błędy dopasowania Δy [V]		Dopasowanie y [V]		Niepewność rozszerzona bezwzględna i względna U_y [V], δ_y [%]			
x	y	Wartości poprawne	Δy	Nieskorelowane	Skorelowane	Nieskorelowane		Skorelowane	
						U_y	δ_y	U_y	δ_y
1	0,64	0,63662	0,04	0,60928	0,59632	0,00386	0,63	0,00453	0,76
2	0,72	0,71933	-0,04	0,76098	0,74624	0,01005	1,32	0,01201	1,61
3	0,70	0,69781	-0,07	0,75932	0,74784	0,00996	1,31	0,01196	1,60
4	0,74	0,74445	0,02	0,71251	0,70425	0,00731	1,03	0,00896	1,27
5	0,71	0,70644	0,04	0,65512	0,64946	0,00499	0,76	0,00614	0,95
6	0,66	0,65704	0,05	0,59796	0,59443	0,00369	0,62	0,00427	0,72
7	0,48	0,48075	-0,07	0,54421	0,54252	0,00323	0,59	0,00332	0,61
8	0,52	0,51888	0,02	0,49462	0,49457	0,00313	0,63	0,00295	0,60
9	0,42	0,42161	-0,03	0,44916	0,45059	0,00309	0,69	0,00282	0,63
10	0,43	0,42870	0,02	0,40758	0,41037	0,00298	0,73	0,00271	0,66

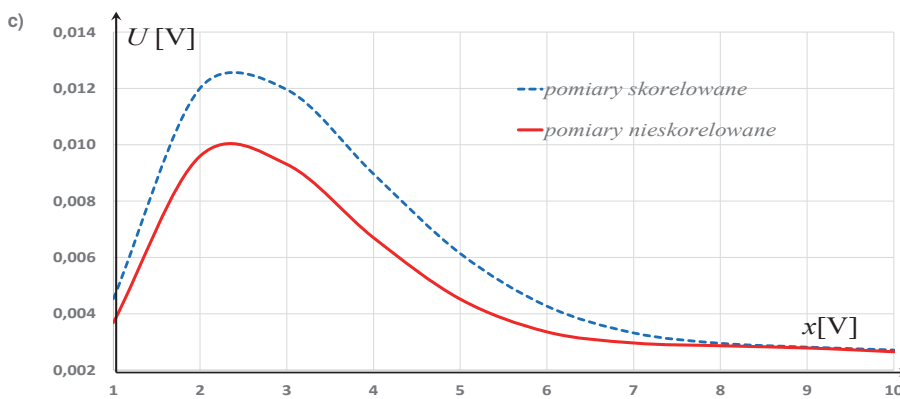


Rys. 7a. Krzywa dopasowana o parametrach $\theta_{1min} = 1,086$ i $\theta_{0min} = -0,032$, $\alpha_1 = \beta_{min} = 1,15$, $\alpha_2 = \beta_{min} (1 - 1/\theta_{1min}) = 0,91$ na poziomie $\phi_{\psi_{\xi min}} \approx 103,5$ i pasmo niepewności – pomiary nieskorelowane

Fig. 7a. Fitted curve with parameters $\theta_{1min} = 1,086$ and $\theta_{0min} = -0,032$, $\alpha_1 = \beta_{min} = 1,15$, $\alpha_2 = \beta_{min} (1 - 1/\theta_{1min}) = 0,91$ at the level of $\phi_{\psi_{\xi min}} \approx 103,5$ and uncertainty band – uncorrelated measurements



Rys. 7b. Krzywa dopasowana o parametrach $\theta_{1min} = 1,05$ i $\theta_{0min} = -0,013$, $\alpha_1 = \beta_{min} = 1,1$, $\alpha_2 = \beta_{min} (1 - 1/\theta_{1min}) = 0,052$ dla $\phi_{\psi \in min} \approx 128$ i pasmo niepewności – pomiary skorelowane
 Fig. 7b. Fitted curve with parameters $\theta_{1min} = 1,05$ i $\theta_{0min} = -0,013$, $\alpha_1 = \beta_{min} = 1,1$, $\alpha_2 = \beta_{min} (1 - 1/\theta_{1min}) = 0,052$ for $\phi_{\psi \in min} \approx 128$ and uncertainty band – correlated measurements



Rys. 7c. Porównanie zmian niepewności rozszerzonej U o pokrycie $p = 0,95$ (górny fragment pasma niepewności) nieskorelowanych i skorelowanych wyników pomiarów funkcji dwuwykładniczej (15)
 Fig. 7c. Comparison of changes in expanded uncertainty U with coverage $p = 0.95$ (upper part of the band uncertainty) of uncorrelated and correlated results of bi-exponential function measurements (15)

(16b) zależnej od nachylenia prostej θ_1 , gdyż $\alpha_2 = \beta(1 - 1/\theta_1)$. Wartości współrzędnych symulowanych punktów pomiarowych i wartości dopasowane podano w tabeli 3.

W wyniku dopasowania funkcji dla danych nieskorelowanych otrzymano funkcję i jej pasma niepewności przedstawione na rys. 7a. Dla porównania z serią danych skorelowanych przyjęto, że dane te charakteryzują się tymi samymi współczynnikami korelacji dla macierzy kowariancji U_x i U_y równymi 0,2 dla zmiennej x . Dopasowaną krzywą wraz z pasmem niepewności dla korelacji wzajemnych (macierz kowariancji U_{xy} z jednakowymi współczynnikami korelacji $-0,2$) podano na rys. 7b. Na obu tych rysunkach podano też znamionową krzywą wykładniczą oznaczoną linią ciągłą żółtą. Porównanie przebiegów górnej granicy pasm niepewności obu tych przypadków przedstawiono na rys. 7c.

5. Podsumowanie

Przedstawiono metodę przybliżonego dopasowania parametrów funkcji nieliniowych do zmierzonych współrzędnych punktów badanych i sprawdzono ją na kilku przykładach. Metoda ta polega na zastosowaniu regresji liniowej dla przekształconych postaci tych funkcji przez odpowiednią zmianę zmiennych. W nowym układzie współrzędnych kartezjańskich stają się one liniowe. W metodzie tej wykorzystuje się prawa propagacji błędów i niepewności dla małych odchyłeń od wartości nominalnej. Jest to metoda przybliżona, gdyż do obliczeń przyjęto wartość pierwszej pochodnej funkcji transformującej zmienne.

Dopasowanie zrealizowano dla dwu przykładów funkcji nieliniowej, tj. gałęzi paraboli drugiego stopnia oraz dla złożonej funkcji wykładniczej, którą w monografii N. Drapera i H. Smitha

[25 str.163] uznano za niesprowadzalną do linowej przez zmianę zmiennych. Dla funkcji kwadratowej zastosowano dwa warianty, I i II, omawianej metody. Otrzymano różne układy współrzędnych i różne wyniki dopasowania obu funkcji i niejednakowe szerokości pasm niepewności. Dotyczy to też zbiorów mierzonych współrzędnych skorelowanych i nieskorelowanych.

Dla obu metod I i II otrzymane pasmo niepewności funkcji poszerza się ze wzrostem niepewności pomiaru każdej ze współrzędnych punktów badanych. Zmiany szerokości pasma niepewności wraz z x dla obu metod są większe przy skorelowaniu. Przy wzroście dodatnich współczynników korelacji dla współrzędnych x i y oraz wzroście wartości modułu ujemnych współczynników korelacji wzajemnych pomiędzy współrzędnymi x i y każdego z punktów obserwuje się poszerzenie pasma niepewności.

Dokładność omówionej metody przybliżonej zależy od rodzaju dopasowywanej funkcji nieliniowej. Należy zweryfikować, czy jest ona zadowalająca dla określonego zadania, w którym wykorzystuje się wartości funkcji wyznaczonej metodą regresji.

Według przewodnika GUM do oceny niepewności złożonej u , współrzędnych x_i, y_i poszczególnych badanych punktów wykorzystuje się sumowanie geometryczne niepewności typu A i B,

$$tj. u_i = \sqrt{u_{A_i}^2 + u_{B_i}^2}. \text{ Niepewność } u_{B_i} \text{ wynika z maksymalnego}$$

błędu względnego E przyrządu, podanego przez jego producenta lub w świadectwie z kalibracji. Gdy mierzy się różne wartości mierzonych tym samym przyrządem o stałym błędzie E , to każda z nich będzie miała inną, proporcjonalną do mierzonej wartości składową niepewności u_B . Te różnice u_B mają większe znaczenie w pomiarach o porównywalnych z u_B lub mniejszych wartościach niepewności u_A i trzeba to uwzględnić. W ocenie niepewności u_{Bij} operacji matematycznych na zbiorach warto-

ści zmierzonych tym samym przyrządem o stałym maksymalnym błędzie względnym E , ich współczynnik korelacji $k_{ij} \approx 1$.

Ze wzoru $u_{Bij} = \sqrt{u_{Bi}^2 + 2k_{ij}u_{Bi}u_{Bj} + u_{Bj}^2}$ dla sumy dwu wartości

wynika $u_{Bij} = u_{Bi} + u_{Bj}$ i dla ich różnicy $u_{Bij} = |u_{Bi} - u_{Bj}|$.

Dla operacji mnożenia i dzielenia takie same zależności dotyczą błędów względnych.

Bibliografia

1. Joint Committee for Guides in Metrology (BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP & OIML) JCGM 100:2008 Evaluation of Measurement Data—Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (Sevres, France: International Bureau of Weights and Measures BIPM)
2. Golub G.H., Van Loan C.F., *Matrix Computations*. J. Hopkins University Press, Baltimore, 3rd ed., 1996.
3. Grafarend E.W., Awange J.L., *Applications of Linear and Nonlinear Models—Fixed Effects, Random Effects, and Total Least Squares*. “Journal of Geodetic Science”, Vol. 3, No. 1, 2013, 77–78 DOI: 10.2478/jogs-2013-0009.
4. Golub G., Van Loan C., *An analysis of the total least squares problem*, “SIAM Journal of Numerical Analysis”, Vol. 17, No. 6, 1980, 883–893, DOI: 10.1137/0717073.
5. Mittelhammer R.C., *Econometric Foundations*, Cambridge University Press. 2000, 197–198, ISBN 0-521-62394-4.
6. Christodoulos A., Floudas M., *Encyclopedia of Optimization*. Springer, 2008. ISBN 978038774583.
7. Dennis J.E. Jr., Schnabel R.B., *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. SIAM 1996 reproduction of Prentice-Hall 1983 edition. DOI: 10.1137/1.9781611971200.
8. Davidson W.C., *Variable Metric Method for Minimization*. AEC Research and Development Report ANL 5990. DOI: 10.2172/4252678.
9. Fletcher R., *Practical methods of optimization* (2nd ed.) New York John Wiley and Sons, 1987, ISBN 978-0-471-91547-8.
10. Mascarenhas W.F., *The divergence of the BFGS and Gauss Newton Methods*, “Mathematical Programming”, 2013, arXiv:1309.7922, DOI: 10.48550/arXiv.1309.7922.
11. Levenberg K., *A Method for the Solution of Certain Non-Linear Problems in Least Squares*. “Quarterly of Applied Mathematics”, Vol. 2, No. 2, 1944, 164–168, DOI: 10.1090/qum/10666.
12. Marquardt D., *An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters*. “SIAM Journal on Applied Mathematics”, Vol. 11, No. 2, 1963, 431–441, DOI: 10.1137/0111030.
13. Kanzow CH., Yamashita N., Fukushima M., *Levenberg–Marquardt methods with strong local convergence properties for solving nonlinear equations with convex constraints*. “Journal of Computational and Applied Mathematics”, Vol. 172, No. 2, 2004, 375–397, DOI: 10.1016/j.cam.2004.02.013.
14. Krystek M., Mathias A., *A least-squares algorithm for fitting data points with mutually correlated coordinates to a straight line*. “Measurement Science and Technology”, Vol. 22, 2011, DOI: 10.1088/0957-0233/22/3/035101.
15. Warsza Z.L., Puchalski J., *Niepewności pomiarów w metodzie regresji liniowej. Cz. 1. Prosta i jej pasma niepewności dla nieskorelowanych danych pomiarowych*, „Pomiary Automatyka Robotyka”, R. 24, Nr 3, 2020, 79–91, DOI: 10.14313/PAR_237/79.
16. Warsza Z.L., Puchalski J., *Niepewności pomiarów w metodzie regresji liniowej. Cz. 2. Niepewności prostej regresji dla zmiennej Y o skorelowanych danych*, „Pomiary Automatyka Robotyka”, R. 24, Nr 4, 2020, 61–72, DOI: 10.14313/PAR_238/61.
17. Warsza Z.L., Puchalski J., *Uncertainty Bands of the Regression Line for Data with Type A and Type B Uncertainties of Dependent Variable Y*. Proceedings of 22nd Conference on Automation 2021, Vol. 1390, 342–363, DOI: 10.1007/978-3-03074893-7_32.
18. Warsza Z.L., Puchalski J., *Uncertainty bands of the regression line for autocorrelated data of dependent variable Y*. Proceedings of 22nd Conference on Automation 2021, Vol. 1390, 364–386, DOI: 10.1007/978-3-03074893-7_33.
19. Puchalski J., *A new algorithm for generalization of least square method for straight line regression in Cartesian System for fully correlated both coordinates*. “International Journal of Automation, Artificial Intelligence and Machine Learning”, Vol. 2, No. 2, 2021, 20–54.
20. Warsza Z.L., Puchalski J., *Ocena dokładności pomiarów w metodzie regresji liniowej z uwzględnieniem zasad przewodnika GUM*. Materiały Międzyuczelnianej Konferencji Metrologów. 53 MKM Warszawa Główny Urząd Miar, 2021, „Metrologia Teoria i Praktyka” (red. M.R. Rząsa, Studia i Monografie, z. 556 Politechnika Opolska 2021, 59–104.
21. Warsza Z.L., Puchalski J., *Method of estimation uncertainties of indirect multivariable measurement including accuracy of processing function as extension of GUM-S2*. Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology and Testing AMCTM XII. Pavese F., Forbes A.B., Zhang N. F., Chunovkina A.G. (Eds.): Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences. Vol. 90, (2021), 451–463, DOI: 10.1142/9789811242380_0029.
22. Puchalski J., Warsza Z.L., *Regresja i niepewność linii prostej dla pomiarów obu zmiennych x i y ze wszystkimi korelacjami*, „Pomiary Automatyka Robotyka”, R. 26, Nr 2, 2022, 47–58, DOI: 10.14313/PAR_244/47.
23. Puchalski J., Warsza Z.L., *Wyznaczanie linii prostej metodą regresji liniowej i jej pasma niepewności według GUM z pomiarów obu zmiennych x i y przy ich autokorelacji i korelacji wzajemnej*. red. J. Augustyn, Metrologia badania i zastosowania. Monografia M152 (54 MKM) Politechnika Świętokrzyska Kielce, 2022, 235–256.
24. Puchalski J., Warsza Z.L., *Linear Regression method of matching the parabolic curve to tested points of both correlated coordinates* Abstract 2p. Paris MathMet 2022 EMN Conference.
25. Draper R.D., Smith H., *Applied Regression Analysis* 3rd Edition Wiley, New York, 1998 (polskie tłumaczenie wyd. 1 1966. *Analiza regresji stosowana*. PWN Warszawa 1973).

The Method of Fitting a Non-linear Function to Data of Measured Points and its Uncertainty Band

Abstract: The paper presents a method of determining parameters and uncertainty bands of a specific non-linear function fitted to given measured data of examined points. One or both of the variables of this non-linear function are changed so as to linearize it. Using the linear regression method, found are the most favorable parameters of this straight line for its adjustment to the measured values of the coordinates of points tested according to the weighted total mean square WTLS criterion. Their autocorrelation and cross-correlation coefficients as well as uncertainties estimated according to the rules of the GUM guide are considered. The parameters and the uncertainty band of the non-linear function result from the parameters of this straight line and its uncertainty band. Numerical examples of determining the parameters and uncertainty bands for the branch of a 2nd degree parabola (two methods) and for the complex exponential function are given.

Keywords: linear regression of non-linear functions, fit, uncertainty and its band, correlation, weighted total least squares method

doc. dr inż. Zygmunt Lech Warszawa

zlw1936@gmail.com

ORCID: 0000-0002-3537-6134

Absolwent Wydziału Elektrycznego Politechniki Warszawskiej 1959, doktorat 1967, docent od 1970. Praca: Instytut Elektrotechniki 1958–1963 i 1994–1995, Politechnika Warszawska 1960–1970, Politechnika Świętokrzyska 1970–1978 (organizator i dziekan Wydziału Transportu w Radomiu), Organizator i kierownik: Ośrodka Aparatury Pomiarowej w Instytucie Meteorologii i Gospodarki Wodnej 1978–1982 oraz Zakładu Automatykacji i Pomiarów w Instytucie Chemii Przemysłowej 1983–1992. Doradca Ministra Edukacji Narodowej 1992–1995, Politechnika Radomska 1983–2002. Obecnie główny specjalista w Przemysłowym Instytucie Automatyki i Pomiarów PIAP. Autor ponad 340 publikacji, 6 monografii, kilkudziesięciu prac badawczych i konstrukcyjnych, 11 patentów oraz promotor 2 doktorów. Prezes Polskiego Towarzystwa Metrologicznego. Członek stowarzyszenia PolSPAR oraz Akademii Metrologii Ukrainy.



dr inż. Jacek Puchalski

j.puchalski@gum.gov.pl

ORCID: 0000-0002-5055-8550

Absolwent Wydziału Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej (1986 r.) oraz Wydziału Elektroniki (1988 r.) Politechniki Warszawskiej. W latach 1987–1995 asystent na Politechnice Warszawskiej, w 1995 r. obronił pracę doktorską. Kolejne 10 lat pracował w branży nowych technologii w firmach produkujących i importujących kasy rejestrujące. Przygotowywał i uczestniczył w certyfikacji nowych modeli kas w Ministerstwie Finansów oraz prowadził szkolenia i serwis urządzeń fiskalnych. Od 2006 r. pracuje w Głównym Urzędzie Miar. Zajmował się zatwierdzeniem typu i oceną zgodności taksometrów elektronicznych i mierników prędkości w ruchu drogowym, a obecnie jako główny metrolog rozwija metody matematyczne szacowania niepewności pomiarowych.

