

Katarzyna ZEUG-ŻEBRO, Monika MIŚKIEWICZ-NAWROCKA  
Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach  
Wydział Zarządzania  
katarzyna.zeug-zebro@ue.katowice.pl, monika.miskiewicz@ue.katowice.pl

## BUDOWA PORTFELA INWESTYCYJNEGO W OPARCIU O WYBRANE CHARAKTERYSTYKI TEORII CHAOSU

**Streszczenie.** Inwestorzy podejmując decyzje dotyczące konstrukcji portfela optymalnego, wspomagają się zazwyczaj zaawansowanymi matematycznie metodami prowadzącymi do zmniejszenia ryzyka inwestycji. Na szczególną uwagę zasługują metody klasyczne, metody analizy technicznej oraz metody analizy fundamentalnej. Alternatywnym podejściem jest zastosowanie wybranych charakterystyk teorii chaosu. Celem pracy będzie próba zdywersyfikowania ryzyka portfela inwestycyjnego zbudowanego na podstawie nieklasycznej miary ryzyka jaką jest wymiar fraktalny oraz miary identyfikacji chaosu, tj. największego wykładnika Lapunowa.

**Słowa kluczowe:** analiza portfelowa, ryzyko inwestycyjne, wymiar fraktalny, największy wykładnik Lapunowa

## CONSTRUCTION OF OPTIMAL PORTFOLIO BASED ON SELECTED CHARACTERISTICS OF CHAOS THEORY

**Abstract.** Investors when making decisions about optimal portfolio construction, typically use mathematically advanced methods that lead to a reduction in investment risk. Classical methods, technical analysis methods and fundamental analysis methods deserve particular attention. An alternative approach is to use of selected characteristics of chaos theory. The aim of the study will be an attempt to diversify the risk of the investment portfolio built on the basis of the non-classical risk measure which is the fractal dimension and the measure of chaos identification, ie the largest Lyapunov exponent.

**Keywords:** portfolio analysis, investment risk, fractal dimension, largest Lyapunov exponent

## Wprowadzenie

Decyzja inwestora dotycząca zakupu dodatkowych papierów wartościowych ma na celu zmniejszenie do zera ryzyka dywersyfikowalnego i zoptymalizowanie przychodu i ryzyka inwestycji. Poprawnie skonstruowany portfel papierów wartościowych pozwala na osiągnięcie tych właśnie celów. Alternatywą dla klasycznego modelu Markowitza jest budowa portfela inwestycyjnego na podstawie miar wywodzących się z teorii chaosu deterministycznego, tj. wymiaru fraktalnego i największego wykładnika Lapunowa.

Wymiar fraktalny jest jedną z miar, które odzwierciedlają ryzykowność podejmowanych inwestycji. Określa on stopień poszarpania wykresu szeregu czasowego, co pozwala przyjąć, że im większy wymiar szeregu, tym większa jego zmienność. W takim razie papiery wartościowe, których szeregi stóp zwrotu mają większy wymiar, są bardziej zmienne, a to oznacza, że są bardziej ryzykowne [Orzeszko, 2010]. Kolejną miarą zaproponowaną przez autorów jest największy wykładnik Lapunowa, który służy m.in. do identyfikacji chaosu deterministycznego, jak również pozwala na oszacowanie wiarygodnych prognoz rzeczywistych szeregów czasowych.

Celem pracy była próba zdywersyfikowania ryzyka portfela inwestycyjnego. Badanie przeprowadzono na podstawie nieklasycznej miary ryzyka, jaką jest wymiar fraktalny oraz miary identyfikacji chaosu, tj. największego wykładnika Lapunowa. Do oszacowania wymiaru posłużono się metodą segmentowo-wariacyjną, natomiast w celu wyznaczenia największego wykładnika Lapunowa zastosowano algorytm Rosensteina-Kantza. W badaniach wykorzystano szeregi czasowe utworzone z cen zamknięcia spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie wchodzących w skład indeksu WIG 20 lub jego listy rezerwowej<sup>1</sup>. Dane obejmowały okres od 02.01.2012 do 31.03.2017. Obliczenia przeprowadzono przy użyciu programów napisanych w języku programowania Delphi oraz pakietu Microsoft Excel.

### 1. Wymiar fraktalny

Wymiar fraktalny jest uogólnieniem wymiaru euklidesowego i służy do opisu skomplikowanych strukturalnie obiektów geometrycznych, np. szeregów czasowych. Wymiar ten bada, w jakim stopniu analizowany obiekt (szereg) wypełnia przestrzeń, w której jest zainicjowany [Orzeszko, 2010]. Jego cechą charakterystyczną jest fakt, że może on przyjmować wartości niecałkowite.

---

<sup>1</sup> Portfel indeksu WIG 20 po korekcie kwartalnej 16.06.2017 (według stanu na 19.05.2017).

W przypadku szeregów szybkozmiennych (antypersystentnych<sup>2</sup>), im wyższy jest wymiar fraktalny tym częściej można obserwować odwracanie się trendu. Z kolei dla szeregów wolnozmiennych (persystentnych), im niższa wartość tego wymiaru, tym zjawisko wzmacniania trendu jest silniejsze. Z tego też względu wymiar fraktalny został uznany za istotną charakterystykę szeregów czasowych pochodzących z rynku finansowego, pozwalającą na ocenę ryzyka inwestycyjnego [Bula, 2012].

W celu wyznaczenia wymiaru fraktalnego obiektu geometrycznego  $A$ , szacuje się minimalną liczbę domkniętych hipersześcianów potrzebnych do jego pokrycia. Wymiar ten można obliczyć korzystając ze wzoru:

$$D(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\ln L(A, \varepsilon)}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}, \quad (1)$$

gdzie  $L(A, \varepsilon)$  jest minimalną liczbą hipersześcianów o boku długości  $\varepsilon$ .

W pierwszym kroku szacowania wymiaru fraktalnego szeregu czasowego  $\{x_t\}$ , wyznacza się na płaszczyźnie punkty o współrzędnych  $(t, x_t)$ . Następnie łącząc je kolejno odcinkami otrzymuje się linię łamaną  $K$ . Wymiar fraktalny tak skonstruowanej łamanej  $K$  jest wymiarem szeregu czasowego.

### 1.1. Metoda segmentowo-wariacyjna

Jedną z najpopularniejszych metod szacowania wymiaru fraktalnego jest metoda wariacyjna [Dubuc i in., 1989]. Jej rozszerzeniem jest metoda segmentowo-wariacyjna S-W zaproponowana przez M. Zwolankowską [2000]. Według tej metody wymiar fraktalny szeregu czasowego  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  można wyznaczyć obliczając granicę:

$$D(N) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln L(K, \varepsilon)}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}, \quad (2)$$

gdzie  $L(K, \varepsilon)$  jest minimalną liczbą kwadratów o boku długości  $\varepsilon$  pokrywających linię łamaną  $K$ . Wzór (2) można przekształcić do prostszej, równoważnej postaci podstawiając za  $L(K, \varepsilon)$  następującą formułę:

$$L(K, \varepsilon) = \frac{P(K, \varepsilon)}{\varepsilon^2}, \quad (3)$$

gdzie  $P(K, \varepsilon)$  jest polem pokrywającym całą łamaną  $K$ . Dodatkowo można przyjąć, że dla dostatecznie małych wartości  $\varepsilon$  prawdziwy jest wzór:

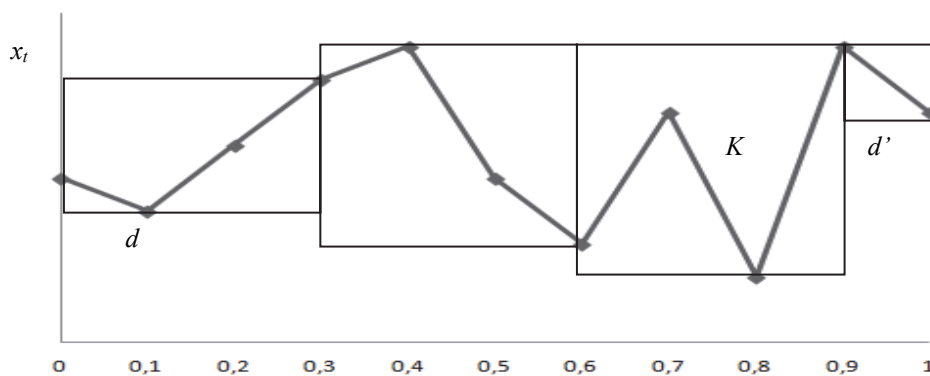
<sup>2</sup> Dla szeregu antypersystentnego wymiar fraktalny jest większy od 1,5, zaś dla szeregu persystentnego  $D(N) \leq 1,5$ .

$$D(N) \approx \frac{\ln \frac{P(K, \varepsilon)}{\varepsilon^2}}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}. \quad (4)$$

Algorytm metody segmentowo-wariacyjnej powstał w oparciu o wzór (4) i przebiega według następujących kroków:

**Krok 1.** W pierwszej kolejności, dla każdej obserwacji szeregu czasowego  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  należy wyznaczyć punkt o współrzędnych  $\left(\frac{t-1}{N-1}, x_t\right)$ <sup>3</sup>, dla  $t = 1, 2, \dots, N$  a następnie połączyć te punkty odcinkami tworząc linię łamaną  $K$ .

**Krok 2.** Następnie wyznaczona łamana  $K$  zostaje pokryta prostokątami rozpiętymi nad  $n$  ( $n \geq 2, n \in N$ ), kolejnymi punktami (Rys. 1). Otrzymuje się w ten sposób  $k = \left\lceil \frac{N-1}{n-1} \right\rceil$ <sup>4</sup> prostokątów, każdy o podstawie  $d = \frac{n-1}{N-1}$ .



Rys. 1. Konstrukcja pokrycia  $n$  punktów linii łamanej  $K$

Źródło: Opracowanie własne.

**Krok 3.** Jeśli iloraz  $\frac{N-1}{n-1}$  jest liczbą całkowitą, wtedy kolejne wyznaczone prostokąty zostają oznaczone następująco:

$$P_*(n) = [a_j; b_j] \times [a'_j; b'_j], \quad (5)$$

gdzie

$$a_j = (j-1) \cdot d, b_j = j \cdot d,$$

$$a'_j = \min\{K(x); x \in [a_j; b_j]\}, b'_j = \max\{K(x); x \in [a_j; b_j]\}.$$

<sup>3</sup> Pierwsze współrzędne naniesionych punktów są równo oddalone od siebie.

<sup>4</sup> Symbol  $\lceil \cdot \rceil$  oznacza część całkowitą liczby.

W przeciwnym przypadku, po przeprowadzeniu procedury pozostaje niepokrytych  $N - (n-1) \cdot k - 1$  ostatnich punktów łamanej  $K$ . Punkty te pokrywa się dodatkowym prostokątem o podstawie  $d' = \frac{N - (n-1) \cdot k - 1}{N-1}$ :

$$P_*(n) = [b_k; 1] \times [a'; b'], \quad (6)$$

gdzie

$$a' = \min\{K(x), x \in [b_k; 1]\}, \quad b' = \max\{K(x), x \in [b_k; 1]\}.$$

**Krok 4.** Następnie należy obliczyć pole pokrycia linii łamanej  $K$  zgodnie ze wzorem:

$$P(K, d) = \sum_{j=1}^k d \cdot (b'_j - a'_j) + d' \cdot (b' - a'). \quad (7)$$

**Krok 5.** Ostatecznie, przekształcając wzór (2) do postaci:

$$D(N) \cdot \ln \frac{1}{d} \approx \ln \frac{\sum_{j=1}^k d \cdot (b'_j - a'_j) + d' \cdot (b' - a')}{d^2}, \quad (8)$$

wymiar fraktalny szeregu czasowego zostaje oszacowany jako współczynnik re-

gresji zmiennych  $\ln \frac{1}{d}$  i  $\ln \frac{\sum_{j=1}^k d \cdot (b'_j - a'_j) + d' \cdot (b' - a')}{d^2}$ .

## 2. Największy wykładnik Lapunowa

Wykładniki Lapunowa są miarą wrażliwości układu dynamicznego na zmianę warunków początkowych<sup>5</sup>. Określają one średnie tempo oddalania lub zbliżania się dwóch początkowo bliskich sobie stanów podczas ewolucji układu [Miśkiewicz-Nawrocka, 2012].

Dla układu dynamicznego  $(X, f)$ , w którym  $X \subset \mathbb{R}^m$ ,  $f: X \rightarrow X$  ( $m \geq 1$ ), wykładniki Lapunowa są zdefiniowane jako granice [Zawadzki, 1996]:

$$\lambda_i(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\mu_i(n, x_0)|, \quad i = 1, \dots, m, \quad (9)$$

gdzie:  $\mu_i(n, x_0)$  są wartościami własnymi macierzy  $Df^n(x_0)$ ,

$Df^n(x_0)$  - jest macierzą Jacobiego odwzorowania  $f^n$  równą:

$$Df^n(x_0) = Df(x_{n-1}) \cdot \dots \cdot Df(x_1) Df(x_0),$$

<sup>5</sup> Układ dynamiczny  $(X, f)$  jest wrażliwy na zmianę warunków początkowych, jeżeli istnieje  $\varepsilon > 0$  takie, że dla każdego  $x \in X$  oraz każdego otoczenia  $U$  punktu  $x$  istnieją  $y \in U$  oraz  $n \geq 1$  takie, że:

$$\|f^n(x) - f^n(y)\| > \varepsilon,$$

gdzie  $f^n$  jest  $n$ -krotnym złożeniem odwzorowania  $f$ . [Deavney, 1987; za: Zawadzki, 1996].

$f^n$  - jest  $n$ -krotnym złożeniem funkcji  $f$ ,

$$Df(x) = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right], \quad f_i \text{ są składowymi odwzorowania } f,$$

$i, j = 1, 2, \dots, m$ .

$m$  – wymiarowy układ dynamiczny  $(X, f)$  posiada  $m$  wykładników Lapunowa, które informują o zmianie odległości między bliskimi stanami, względem odpowiedniego kierunku w przestrzeni stanów.

Największy wykładnik Lapunowa  $\lambda_{\max}$  służy do identyfikacji chaosu deterministycznego. W 1993 roku Rosenstein [Rosenstein, Collins i De Luca, 1993], a rok później Kantz [Kantz, 1994] przedstawili algorytm wyznaczania największego wykładnika Lapunowa, który przebiega według następujących etapów [Kantz i Schreiber, 2004]:

**Krok 1.** Wyznaczamy zbiory  $Z_t$ , złożone z  $K$  najbliższych sąsiadów  $\hat{x}_{t_j}^d$  wektorów opóźnień  $\hat{x}_t^d$  [Zeug-Żebro i in., 2013], spełniających warunek  $|t - t_j| > t^*$ , gdzie  $t^*$  jest ustaloną liczbą naturalną. Dodany warunek zwiększa prawdopodobieństwo, że znaleziony sąsiad nie będzie należał do trajektorii wektora  $\hat{x}_t^d$ .

**Krok 2.** Obliczamy:

$$r_n(t) = \frac{1}{K} \sum_{\hat{x}_{t_j}^d \in Z_t} |x_{t+n} - x_{t_j+n}|, \quad t = 1, 2, \dots, M; \quad n = 0, 1, \dots, n_{\max}, \quad (10)$$

gdzie:  $M = N - (d-1)\tau$ ,  $n_{\max}$  jest ustaloną liczbą naturalną, określającą liczbę iteracji.

**Krok 3.** Wyznaczamy średnią z  $r_n(t)$  po wszystkich  $d$  – historiach:

$$r_n = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M r_n(t). \quad (11)$$

**Krok 4.** Największy wykładnik Lapunowa jest współczynnikiem regresji:

$$\ln(r_n) = \ln(r_0) + \lambda_{\max} n. \quad (12)$$

Dla szeregów chaotycznych nachylenie prostej regresji (wykresu ilustrującego zależność  $\ln \Delta_n$  od numeru iteracji  $n$ ) w początkowej fazie powinno być dodatnie. Największy wykładnik Lapunowa  $\lambda_{\max}$  szacuje się w oparciu o zbiór punktów należących do tego obszaru. Zatem oszacowana wartość  $\lambda_{\max}$  zależy nie tylko od wyboru metryki, liczby najbliższych sąsiadów, wymiaru zanurzenia, ale także od ustalonej wartości  $n_{\max}$ , dla której współczynnik regresji jest dodatni [Kantz i Schreiber, 2004].

### 3. Konstrukcja portfeli papierów wartościowych

H. Markowitz [Markowitz, 1952] zaproponował metodę pozwalającą na obniżenie ryzyka portfela papierów wartościowych, tj. dywersyfikację ryzyka, polegającą na dokładaniu kolejnych walorów do portfela. Zwiększając liczbę elementów wchodzących w jego skład (dywersyfikując ryzyko portfela), można zmniejszać do zera udział wariancji poszczególnych akcji w ryzyku całkowitym portfela. Model zaproponowany przez Markowitza można zapisać w następującej postaci:

**Model 1:**

$$\min S_p^2, \quad (13)$$

z warunkami ograniczającymi

$$R_p \geq R_0$$

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

gdzie:  $R_p$  - oczekiwana stopa zwrotu portfela  $m$  akcji:

$$R_p = \sum_{i=1}^m x_i R_i, \quad (14)$$

$R_i$  - oczekiwana stopa zwrotu  $i$ -tej akcji,

$R_0$  - oczekiwana stopa zwrotu dla spółek,

$S_p$  - ryzyko portfela  $m$  akcji:

$$S_p^2 = \sum_{i=1}^m x_i^2 S_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m x_i x_j S_i S_j \rho_{ij}, \quad (15)$$

$S_i$  - odchylenie standardowe akcji  $i$ -tej spółki,

$\rho_{ij}$  - współczynnik korelacji  $i$ -tej akcji z  $j$ -tą akcją,

$x_i$  - udział  $i$ -tej akcji w portfelu,

$m$  - liczba akcji w portfelu.

Propozycją autorów jest budowa portfeli inwestycyjnych w oparciu o wymiar fraktalny [Zeug-Żebro, 2016] i największy wykładnik Lapunowa [Miśkiewicz-Nawrocka, Zeug-Żebro, 2015]. W tym celu należy rozwiązać następujące zadania optymalizacyjne:

**Model 2:**

$$\min \left( \sum_{i=1}^m D_i(N) x_i \right), \quad (16)$$

z warunkami ograniczającymi:

$$\begin{aligned} R_p &\geq R_0 \\ \sum_{i=1}^m S_i x_i &\leq S_0 \\ \sum_{i=1}^m x_i &= 1 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

gdzie:  $D_i(N)$  - wymiar fraktalny dla szeregu czasowego generowanego przez ciąg notowań akcji  $i$ -tej spółki,

$S_0$  - średnie odchylenie standardowe spółek,

pozostałe oznaczenia j.w.

**Model 3:**

$$\max \left( \sum_{i=1}^m \lambda_{\max i} x_i \right), \quad (17)$$

z warunkami ograniczającymi:

$$\begin{aligned} R_p &\geq R_0 \\ \sum_{i=1}^m S_i x_i &\leq S_0 \\ \sum_{i=1}^m x_i &= 1 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

gdzie:  $\lambda_{\max i}$  - największy wykładnik Lapunowa dla szeregu czasowego generowanego przez ciąg notowań akcji  $i$ -tej spółki,

pozostałe oznaczenia j.w.

Inną propozycją jest minimalizowanie ryzyka portfela z dodatkowym uwzględnieniem miar teorii chaosu obliczonych dla spółek wchodzących w jego skład. Otrzymany w ten sposób wzór na wariancję portfela jest klasyczną wariancją portfela (wg Markowitza) skorygowaną o poziom miary ryzyka jaką jest wymiar fraktalny oraz o wartość największego wykładnika Lapunowa. W tym przypadku, modele budowy portfela przyjmują postać:

**Model 4:**

$$\min \left( \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m x_i x_j S_i S_j \rho_{ij} (1 - D_i(N))(1 - D_j(N)) \right) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} R_p &\geq R_0 \\ \sum_{i=1}^m x_i &= 1 \end{aligned}$$



$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

gdzie: wszystkie oznaczenia j.w.

**Model 5:**

$$\min \left( \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m x_i x_j S_i S_j \rho_{ij} (1 - \lambda_{\max i}) (1 - \lambda_{\max j}) \right) \quad (19)$$

$$R_p \geq R_0$$

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

gdzie: wszystkie oznaczenia j.w.

#### 4. Analiza empiryczna proponowanych modeli

Badaniu poddano szeregi finansowe<sup>6</sup> utworzone z cen zamknięcia spółek notowanych na GPW w Warszawie wchodzących w skład indeksu WIG20 lub jego listy rezerwowej (Tabela 1). Dodatkowym warunkiem wyboru spółek, była dodatnia wartość oczekiwanej stopy zwrotu. W analizie wykorzystano dane obejmujące okres od 02.01.2012 do 31.03.2017.

Badanie wymienionych wyżej szeregów czasowych przebiegało w następujących etapach:

1. Wyznaczenie oczekiwanej stopy zwrotu akcji  $R_i$  i odchylenia standardowego stóp zwrotu  $S_i$ .
2. Szacowanie wymiaru fraktalnego  $D_i(N)$  na podstawie metody segmentowo-wariacyjnej.
3. Rekonstrukcja przestrzeni stanów metodą opóźnień-wektory opóźnień.
4. Wyznaczenie wartości największego wykładnika Lapunowa  $\lambda_{\max}$ .
5. Budowa portfeli inwestycyjnych (Modele 1-5).
6. Obliczenie rocznych stóp zwrotu dla wyznaczonych portfeli.

Przeprowadzone badania empiryczne pozwoliły wyznaczyć wymiar fraktalny wykorzystując metodę segmentowo-wariacyjną. Otrzymane wartości przedstawiono w tabeli 1<sup>7</sup>, gdzie dodatkowo przedstawiono wartości oczekiwanej stopy zwrotu oraz odchylenia standardowego stóp zwrotu badanych szeregów czasowych (obliczenia wykonano dla miesięcznej stopy zwrotu).

<sup>6</sup> Dane pochodzą z archiwum plików programu Omega, dostępnych na stronie internetowej [www.bossa.pl](http://www.bossa.pl) [dostęp: 1.04.2017].

<sup>7</sup> W celu oszacowania wymiaru fraktalnego posłużono się programami autora napisanym w języku programowania Delphi.

Tabela 1

Wyniki szacowania wymiaru fraktalnego, odchylenia standardowego, oczekiwanej stopy zwrotu i współczynnika asymetrii dla szeregów czasowych spółek wchodzących w skład indeksu WIG20 lub jego listy rezerwowej<sup>8</sup>

Spółka	$D_i(N)$	$S_i$	$R_i$	Spółka	$D_i(N)$	$S_i$	$R_i$
ASSECOPOL	1,5085	0,0505	0,0055	LOTOS	1,4623	0,0803	0,0060
BZWBK	1,4647	0,0594	0,0073	LPP	1,4000	0,0896	0,0235
CCC	1,4190	0,0864	0,0268	MBANK	1,4217	0,0666	0,0086
CDPROJEKT	1,4026	0,0929	0,0355	MILLENNIUM	1,4477	0,0876	0,0128
CYFROPLAST	1,4938	0,0556	0,0131	PEKAO	1,5461	0,0585	0,0039
EUROCASH	1,4474	0,0794	0,0149	PGNIG	1,4629	0,0708	0,0071
INGBSK	1,4981	0,0465	0,0091	PKNORLEN	1,4209	0,0796	0,0172
KERNEL	1,4947	0,1100	0,0011	PZU	1,4747	0,0603	0,0042
KRUK	1,3523	0,0655	0,0302	SYNTHOS	1,5523	0,0847	0,0010

Źródło: Opracowanie własne.

W kolejnym kroku badań, zrekonstruowano przestrzeń stanów za pomocą metody opóźnień [Takens, 1981], tj. wyznaczono wektory opóźnień, gdzie czas opóźnień  $\tau$  oszacowano na podstawie analizy funkcji informacji wzajemnej [Nichols, Seaver, Trickey, 2006], a wymiar zanurzenia  $d$  obliczono stosując metodę najbliższego pozornego sąsiada – *MNPS* [Abarbanel, Brown i Kennel, 1992] (Tabela 2). Do wyznaczenia największego wykładnika Lapunowa (Tabela 2) posłużono się algorytmem Kantza i Rosensteina. W obliczeniach przyjęto liczbę sąsiadów  $k = 1$  i wartość  $t^* = 10$ . Następnie zastosowano regresję liniową do przybliżania linią prostą wykresu zależności wartości  $\ln d_n$  od numeru iteracji  $n$ .

Tabela 2

Wyniki szacowania czasy opóźnienia, wymiaru zanurzenia, największego wykładnika Lapunowa dla wybranych spółek

Spółka	$\tau$	$d$	$\lambda_{\max}$	$R^2$	Spółka	$\tau$	$d$	$\lambda_{\max}$	$R^2$
ASSECOPOL	3	6	0,0042	0,3485	LOTOS	2	8	0,0258	0,2751
BZWBK	3	10	0,0901	0,2458	LPP	3	7	0,0198	0,1557
CCC	1	8	0,0368	0,5634	MBANK	2	9	0,0381	0,3047
CDPROJEKT	3	2	0,1648	0,2841	MILLENNIUM	2	6	0,0521	0,3017
CYFROPLAST	3	5	0,0266	0,2098	PEKAO	2	6	0,0299	0,3141
EUROCASH	2	9	0,0361	0,3491	PGNIG	3	7	0,0048	0,4383
INGBSK	2	7	0,0283	0,3071	PKNORLEN	1	7	0,0385	0,5486
KERNEL	5	8	0,0464	0,1208	PZU	4	8	0,0705	0,1378
KRUK	1	2	0,1001	0,3078	SYNTHOS	3	10	0,0858	0,1576

Źródło: Opracowanie własne.

W kolejnym etapie analizy skonstruowano osiemnaście optymalnych portfeli akcji, na podstawie wcześniej zaproponowanych modeli optymalizacyjnych. W skład portfeli oznaczonych numerami 1 – 5 weszły spółki będące odpowiednio rozwiązaniem zadań zawartych w modelach: 1, 2, 3, 4 i 5. W portfelach 1' – 5' umieszczono spółki będące rozwiązaniem zadań 1-5, dla których przyjęto dodatkowe założenie o istotności oszacowanego wykładnika Lapunowa, tj. współczynnik determinacji  $R^2 > 0,3$ . Następnie przyjmując założenie

<sup>8</sup> Obliczenia oparto na danych obejmujących okres od 02.01.2012 do 31.03.2017.

$D_i(N) \leq 1,5$  powtórzono badanie dla wszystkich modeli (skonstruowano portfele 1'' – 5''). W celach porównawczych zbudowano również portfele o równych udziałach akcji (Portfele 6, 6' i 6''). Szczegóły konstrukcji portfeli zawiera tabela 3.

Tabela 3

## Budowa portfeli optymalnych

<b>Portfel 1</b>	<b>Portfel 2</b>	<b>Portfel 3</b>	<b>Portfel 4</b>	<b>Portfel 5</b>	<b>Portfel 6</b>
Model 1	Model 2	Model 3	Model 4	Model 5	Równe udziały
<b>Portfel 1'</b>	<b>Portfel 2'</b>	<b>Portfel 3'</b>	<b>Portfel 4'</b>	<b>Portfel 5'</b>	<b>Portfel 6'</b>
Model 1 $\lambda_{\max}$ - istotny	Model 2 $\lambda_{\max}$ - istotny	Model 3 $\lambda_{\max}$ - istotny	Model 4 $\lambda_{\max}$ - istotny	Model 5 $\lambda_{\max}$ - istotny	Równe udziały $\lambda_{\max}$ - istotny
<b>Portfel 1''</b>	<b>Portfel 2''</b>	<b>Portfel 3''</b>	<b>Portfel 4''</b>	<b>Portfel 5''</b>	<b>Portfel 6''</b>
Model 1 $D_i(N) \leq 1,5$	Model 2 $D_i(N) \leq 1,5$	Model 3 $D_i(N) \leq 1,5$	Model 4 $D_i(N) \leq 1,5$	Model 5 $D_i(N) \leq 1,5$	Równe udziały $D_i(N) \leq 1,5$

Źródło: Opracowanie własne.

Do obliczenia udziałów poszczególnych spółek w portfelu wykorzystano narzędzie *solver* będące dodatkiem arkusza kalkulacyjnego *Excel*. W tabelach 4 – 6 przedstawiono udziały poszczególnych spółek oraz wartość oczekiwaną i ryzyko zbudowanych portfeli. Znak „-” postawiono przy spółkach, które nie weszły w skład portfela optymalnego.

Tabela 4

## Stopa zwrotu, ryzyko i udziały akcji w wyznaczonych portfelach

Spółka	Udziały akcji					
	Portfel 1	Portfel 2	Portfel 3	Portfel 4	Portfel 5	Portfel 6
ASSECOPOL	0,15731	-	-	0,21914	-	0,05556
BZWBK	-	-	0,30000	-	-	0,05556
CCC	-	-	-	-	-	0,05556
CDPROJEKT	0,05405	-	0,30000	-	0,12062	0,05556
CYFROPLAST	0,08689	-	-	-	-	0,05556
EUROCASH	0,13406	-	-	0,30000	0,30000	0,05556
INGBSK	0,31023	-	-	0,30000	0,30000	0,05556
KERNEL	-	-	-	-	-	0,05556
KRUK	0,10305	0,30000	0,30000	-	-	0,05556
LOTOS	-	-	-	-	-	0,05556
LPP	0,00540	0,20967	-	0,18086	-	0,05556
MBANK	-	0,30000	-	-	-	0,05556
MILLENNIUM	-	-	-	-	-	0,05556
PEKAO	-	-	-	-	-	0,05556
PGNIG	-	-	-	-	-	0,05556
PKNORLEN	0,00368	0,19033	-	-	-	0,05556
PZU	0,14533	-	0,00997	-	0,27938	0,05556
SYNTHOS	-	-	0,09003	-	-	0,05556
<b>Oczekiwana stopa zwrotu portfela</b>	0,01266	0,01984	0,02203	0,01266	0,01266	0,01266
<b>Ryzyko portfela</b>	0,03179	0,04827	0,05164	0,03769	0,03656	0,04018

Źródło: Opracowanie własne.

Tabela 5

Stopa zwrotu, ryzyko i udziały akcji w wyznaczonych portfelach z warunkiem istotności największego wykładnika Lapunowa

Spółka	Udziały akcji					
	Portfel 1'	Portfel 2'	Portfel 3'	Portfel 4'	Portfel 5'	Portfel 6'
ASSECOPOL	0,22365	-	-	0,20000	0,27449	0,10000
CCC	-	0,02456	-	-	-	0,10000
EUROCASH	0,15933	-	-	0,20000	0,30000	0,10000
INGBSK	0,30745	0,07544	0,17065	0,20000	-	0,10000
KRUK	0,18050	0,30000	0,30000	0,20000	0,12551	0,10000
MBANK	-	0,30000	0,22935	-	-	0,10000
MILLENNIUM	0,05848	-	0,30000	0,20000	0,30000	0,10000
PEKAO	0,00000	-	-	-	-	0,10000
PGNIG	0,02037	-	-	-	-	0,10000
PKNORLEN	0,05023	0,30000	-	-	-	0,10000
<b>Oczekiwana stopa zwrotu portfela</b>	0,01361	0,01814	0,01643	0,01450	0,01361	0,01361
<b>Ryzyko portfela</b>	0,03472	0,04821	0,05070	0,03032	0,03896	0,04083

Źródło: Opracowanie własne.

Tabela 6

Stopa zwrotu, ryzyko i udziały akcji w wyznaczonych portfelach z warunkiem  $D_i(N) \leq 1,5$

Spółka	Udziały akcji					
	Portfel 1''	Portfel 2''	Portfel 3''	Portfel 4''	Portfel 5''	Portfel 6''
BZWBK	0,08360	-	0,30000	-	0,02737	0,06667
CCC	0,05350	-	-	-	0,02790	0,06667
CDPROJEKT	0,05168	0,06742	0,30000	0,17934	0,08173	0,06667
CYFROPLAST	0,10544	-	-	-	0,02753	0,06667
EUROCASH	0,05324	-	-	0,30000	0,30000	0,06667
INGBSK	0,14088	-	-	0,30000	0,28788	0,06667
KERNEL	0,02163	-	-	-	0,02720	0,06667
KRUK	0,09735	0,30000	0,30000	-	0,02800	0,06667
LOTOS	0,04467	-	-	-	0,02734	0,06667
LPP	0,04755	0,30000	-	-	0,02781	0,06667
MBANK	0,06809	0,30000	-	-	0,02741	0,06667
MILLENNIUM	0,04227	-	-	-	0,02752	0,06667
PGNIG	0,05864	-	-	-	0,02737	0,06667
PKNORLEN	0,05491	0,03258	-	-	0,02764	0,06667
PZU	0,07655	-	0,10000	0,22066	0,02729	0,06667
<b>Oczekiwana stopa zwrotu portfela</b>	0,01449	0,02164	0,02232	0,01449	0,01436	0,01449
<b>Ryzyko portfela</b>	0,01826	0,03942	0,03895	0,03488	0,02931	0,01990

Źródło: Opracowanie własne.

Analizując dane przedstawione w tabelach 4-6 można stwierdzić, że najwyższą oczekiwaną stopą zwrotu charakteryzują się portfele wyznaczone na podstawie miar pochodzących z teorii chaosu deterministycznego (portfele 2, 3, 2', 3', 2'' i 3''). Natomiast portfel 1'' obciążony jest najniższym poziomem ryzyka. Modyfikacja funkcji celu w modelach 4 i 5, związana z dołączeniem do klasycznej miary ryzyka, wymiaru fraktalnego i największego wykładnika Lapunowa, wpływa tylko w znikomym stopniu na oczekiwaną stopę zwrotu z portfela i nie zmniejsza ryzyka związanego z inwestycją w taki portfel. Świadczą o tym portfele 4, 5, 4', 5',

4'', 5'' dla których zaobserwowano brak lub nieznaczny wzrost wartości stopy zwrotu i nie-stety wyższy poziom ryzyka.

W kolejnym kroku badań obliczono roczne stopy zwrotu (dla wyznaczonych portfeli) uzyskane w okresie 31.03.2016-31.03.2017. Otrzymane rezultaty zamieszczono w tabeli 7.

Tabela 7

## Roczna stopa zwrotu dla wyznaczonych portfeli optymalnych

	<b>Portfel 1</b>	<b>Portfel 2</b>	<b>Portfel 3</b>	<b>Portfel 4</b>	<b>Portfel 5</b>	<b>Portfel 6</b>
Stopa zysku portfela (%)	24,9571	23,0258	28,1776	22,7943	22,2026	22,6111
	<b>Portfel 1'</b>	<b>Portfel 2'</b>	<b>Portfel 3'</b>	<b>Portfel 4'</b>	<b>Portfel 5'</b>	<b>Portfel 6'</b>
Stopa zysku portfela (%)	24,1599	21,8767	22,5169	20,0917	-0,6435	16,3503
	<b>Portfel 1''</b>	<b>Portfel 2''</b>	<b>Portfel 3''</b>	<b>Portfel 4''</b>	<b>Portfel 5''</b>	<b>Portfel 6''</b>
Stopa zysku portfela (%)	23,9207	23,2471	27,5391	26,8714	23,3876	23,9027

Źródło: Opracowanie własne.

Z danych przedstawionych w tabeli 7 wynika, że największy zysk w analizowanym okresie można było uzyskać inwestując w portfele 3, 3'', 4'' zbudowane w oparciu o największy wykładnik Lapunowa oraz wymiar fraktalny. Portfele 1, 1' i 1'' zbudowane na podstawie klasycznego modelu Markowitza (zadanie 1) charakteryzuje zbliżona wartość zysku. Zastosowanie klasycznego modelu Markowitza dla wybranych spółek nie daje możliwości uzyskania tak dobrych rezultatów, jak w przypadku portfeli w których zastosowano miary chaosu deterministycznego (zadanie 2 i 3). Warto zwrócić uwagę, że stopa zysku portfeli w przypadku zastosowania dodatkowego założenia ( $D_i(N) \leq 1,5$  i  $\lambda_{\max}$  - istotny) spadła a nawet w przypadku portfela 5' osiągnęła ujemny poziom.

## Podsumowanie

W pracy zaproponowano koncepcję portfeli papierów wartościowych zmodyfikowanych o dwie miary: wymiar fraktalny i największy wykładnik Lapunowa. Stanowiły one alternatywę dla klasycznego modelu Markowitza. W badaniu empirycznym rozpatrzono cztery warianty nowego podejścia (Zadania 2-5) oraz model Markowitza. Analizą objęto lata 2012-2017. Badania potwierdziły zasadność łączenia analizy portfelowej z elementami wywodzącymi się z teorii chaosu deterministycznego. Wyniki przeprowadzonych analiz mogą być pomocne w podejmowaniu decyzji inwestycyjnych i zarządzaniu ryzykiem inwestycyjnym.

## Bibliografia

1. Abarbanel H.D., Brown R., Kennel M.B.: Determining Embedding Dimension for Phase Space Reconstruction Using a Geometrical Construction. „Physical Review A”, Vol. 45(6), 1992, p. 3404-3411.
2. Bula R.: Aspekty metodyczne szacowania wymiaru fraktalnego finansowych szeregów czasowych. „Młodzi Naukowcy dla Polskiej Nauki”, Vol. 2, No. 9, 2012, s. 192-200.
3. Devaney R.L.: An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Redwood City 1987.
4. Dubuc B., Quinlou J.F., Roques-Carnes C., Tricot C., Zucker S.W., Evaluating the Fractal Dimension of Profiles, “Physical Review A”, Vol. 39, 1989.
5. Kantz H.: A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of a time series. Physical Letters A, vol. 185(1), 1994, 77–87.
6. Kantz H., Schreiber T.: Nonlinear Time Series Analysis. Cambridge University Press 2004, (second edition).
7. Markowitz H.: Portfolio Selection. “Journal of Finance”, 1952, p. 77-91.
8. Miśkiewicz-Nawrocka M.: Zastosowanie wykładników Lapunowa do analizy ekonomicznych szeregów czasowych. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Katowice 2012.
9. Miśkiewicz-Nawrocka M., Zeug-Żebro K.: Zastosowanie wykładników Lapunowa do wyznaczania portfeli optymalnych. „Studia Ekonomiczne”, nr 221, 2015, s. 61-72.
10. Nichols J.M., Seaver M., Trickey S.T.: A method for detecting damage-induced nonlinearities in structures using information theory. Journal of Sound and Vibration, Vol. 297, No. 1–2, 2006, p. 1–16.
11. Orzeszko W.: Wymiar fraktalny szeregów czasowych a ryzyko inwestowania. „Acta Universitatis Nicolai Copernici. Ekonomia XLI. Nauki Humanistyczno-Społeczne”, z. 397, 2010.
12. Przekota G., Waściński T.: Wybrane problemy oceny ryzyka zmian ceny akcji za pomocą miar klasycznych i nieklasycznych. „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Humanistyczno-Przyrodniczego w Siedlcach. Administracja i Zarządzanie”, nr 95, 2012, s. 71-82.
13. Rosenstein M. T., Collins J. J., De Luca C. J.: A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets. Physica D, vol. 65, 1993, p. 117 – 134.
14. Takens F.: Detecting strange attractors in turbulence [in:] D.A. Rand and L.S. Young (eds.) Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin 1981, p. 366 – 381.
15. Zawadzki H.: Chaotyczne systemy dynamiczne. Elementy teorii i wybrane zagadnienia ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice 1996.

16. Zeug-Żebro K., Dębicka J., Kuśmierczyk P., Łyko J.: Wybrane modele matematyczne ekonomii. Decyzje i wybory. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu 2013.
17. Zeug-Żebro K.: Badanie wpływu zastosowania wymiaru fraktalnego na konstrukcję portfela optymalnego. „Studia Ekonomiczne”, nr 265, 2016, s. 120-132.
18. Zwolankowska D.: Metoda segmentowo-wariacyjna. Nowa propozycja liczenia wymiaru fraktalnego, „Przegląd Statystyczny”, R. 47, z. 1-2, 2000.