PROGNOZOWANIE PROCESÓW LOGISTYCZNYCH METODĄ WAG HARMONICZNYCH

PREDICTING LOGISTIC PROCESSES USING THE HARMONIC WEIGHT METHOD

Marek MRÓZ
Akademia Sztuki Wojennej, Wydział Zarządzania i Dowodzenia, Instytut Logistyki

Streszczenie

Tematem artykułu jest prognozowanie procesów logistycznych metodą wag harmonicznych. Głównym celem jest pokazanie w ujęciu teoretycznym otrzymywania najlepszej prognozy procesów logistycznych wykorzystując metodę wag harmonicznych. Natomiast problem badawczy dotyczył właściwego wykorzystania do prognozowania procesów logistycznych metody wag harmonicznych, aby otrzymać w konsekwencji dokładniejszą prognozę.

Oczywistym działaniem opisanego algorytmu prognozowania metodą wag harmonicznych jest wygładzanie szeregu czasowego metodą trendu pełzającego przy właściwym doborze stałej wygładzenia za pomocą weryfikacji błędem średniokwadratowym. W metodzie trendu pełzającego, w wygładzeniu szeregu czasowego, zastosowano pięć sposobów szacowania parametrów strukturalnych modelu z jedną zmienną. Takie alternatywne podejście, powinno pomóc każdemu badaczowi dobrać właściwy sposób do swoich potrzeb.

Ujęcie teoretyczne problemu pozwoliło na podjęcie próby uporządkowania obszaru wiedzy związanej z prognozowaniem metodą wag harmonicznych, a w tym głównie z wygładzaniem szeregu czasowego metodą trendu pełzającego.

***Słowa kluczowe*:** prognoza, metoda wag harmonicznych, metoda trendu pełzającego.

Abstract

The subject of the article is predicting logistic processes using the harmonic weight method. The main goal is to show in the theoretical approach how to obtain the best prediction of logistics processes using the harmonics method. However, the research problem concerned the proper use of harmonic weight methods for predicting logistic processes to obtain a more accurate prediction as a consequence.

The obvious operation of the described algorithm of prediction using the harmonic weights method is smoothing the time series with the creeping trend method with the proper selection of the constant smoothing by means of the mean square error verification. In the creeping trend method, in smoothing the time series, five methods of estimating the structural parameters of the model with one variable were applied. Such an alternative approach should help every researcher to choose the right way to suit their preferences.

Theoretical approach to the problem allowed to organize the area of knowledge related to prediction using the harmonic weight method, and mainly with smoothing the time series with the creeping trend method.

Key words: *prediction, harmonic weight method, creeping trend method.*

WSTĘP

Prognozowanie procesów logistycznych wymaga od prognosty wykorzystania różnych narzędzi matematycznych, statystycznych czy też ekonometrycznych. „Prognoza jest pewnym orzeczeniem o przyszłym zdarzeniu będącym wynikiem określonej, zweryfikowanej naukowo, reguły przewidywania[1]". Do badania zjawisk logistycznych można wykorzystać wiele różnych narzędzi. Autor chciałby podjąć próbę zaprezentowania i usystematyzowania wiedzy na temat prognozowania metodą wag harmonicznych, gdyż w literaturze przedmiotu badań można odnaleźć różnorodne rozwiązania i podejścia do tej metody, nie zawsze kompletne i nie zawsze zbudowane na właściwym algorytmie. „Modele prognozowania można podzielić na subiektywne i sformalizowane. Pierwsze z nich opierają się na intuicji i doświadczeniu prognozującego (…). Metody sformalizowane wykorzystują natomiast najczęściej dwa rodzaje modeli: szeregów czasowych lub ekonometryczne. Te pierwsze próbują opisać badane zjawisko za pomocą pewnej funkcji trendu (…)[2]".

Prognozowanie procesów logistycznych metodą wag harmonicznych realizowane jest najczęściej na bazie szeregów czasowych wygładzanych trendem pełzającym. Można wygładzać szeregi czasowe także innymi metodami, jak na przykład: metodą średnich ruchomych[3], metodą wyrównania wykładniczego[4] (metodą *Browna*) itp. Jednak punktem wyjściowym dla każdego prognozowania, również metodą wag harmonicznych, jest zbudowanie szeregu czasowego opartego na danych empirycznych badanego procesu logistycznego. Wstępna analiza i budowa szeregu czasowego powinna zawierać jak najwięcej danych empirycznych[5] we właściwie dobranej jednostce czasu dla badanego procesu logistycznego. „Szereg czasowy powstaje w wyniku obserwacji mierzalnego zjawiska w kolejnych momentach lub okresach[6]". Zatem może to być skala chronologiczna zawierająca takie jednostki czasu, jak np.: godziny, dni, tygodnie, miesiące, kwartały lub lata. Dobór właściwych jednostek zależy ostatecznie od decyzji badacza, w aspekcie rozpatrywanego problemu.

Biorąc powyższe pod uwagę autor postawił sobie za **cel badań** *pokazanie sposobu otrzymywania najlepszej prognozy procesów logistycznych wykorzystując metodę wag harmonicznych.* Tak postawiony cel badań implikuje stosowny **problem badawczy:** *jak wykorzystać do prognozowania procesów logistycznych metodę wag harmonicznych, aby uzyskać jak najmniejszy błąd prognozy?*

---

[1] S. Krawczyk, *Metody ilościowe w planowaniu (działalności przedsiębiorstwa)*, Wydawnictwo C. H. Beck, Warszawa 2001, s. 224.
[2] A. Welfe, *Ekonometria*, PWE, Warszawa 2003, s. 218.
[3] „Metoda średnich ruchomych polega na zastępowaniu danych empirycznych (dla przyjętego okresu wygładzania) średnimi poziomami, czyli średnimi arytmetycznymi prostymi obliczonymi z badanego okresu i kilku odpowiednich okresów sąsiednich". A. Duda, *Prognozowanie w logistyce na przykładzie prognozy metodą średnich ruchomych,* [w:] Zeszyty Naukowe Akademii Sztuki Wojennej, Nr 3 (108), Warszawa 2017, s. 216.
[4] Metoda wyrównania wykładniczego (metoda *Browna*) może być przedstawiana jako średnia ważona wartości trendu z okresu poprzedniego oraz najnowszej obserwacji zmiennej zależnej y_t. K. Kukuła (red.), *Wprowadzenie do ekonometrii w przykładach i zadaniach*, Wydawnictwo naukowe PWN, Warszawa 2004, s. 127.
[5] Ważnym jest, aby analizowanych danych empirycznych było jak najwięcej, ponieważ wówczas mamy do czynienia z dużą próbą badawczą i mniejszymi błędami szacunkowymi.
[6] J. Podgórski, *Statystyka dla studiów licencjackich*, PWE, Warszawa 2005, s. 337.

Sformułowany problem badawczy posłużył do postawienia **hipotezy badawczej:** *proces prognozowania metodą wag harmonicznych należy rozpocząć od wygładzenia szeregu czasowego metodą trendu pełzającego. Dla właściwego doboru stałej wygładzania należy, przy wykorzystaniu błędu średniokwadratowego, porównać co najmniej dwie stałe wygładzania. Wybór stałej wygładzania posiadającej jak najmniejszy błąd średniokwadratowy wpływa na możliwość obliczenia dokładniejszej prognozy metodą wag harmonicznych.*

W niniejszym artykule rozpatrywany temat został ujęty w formie analizy teoretycznej procedury prognozowania procesów logistycznych metodą wag harmonicznych po uprzednim wygładzeniu szeregu czasowego metodą trendu pełzającego, aby uzyskać jak najlepszy efekt wygładzania oraz prognozę o najmniejszym błędzie.

PROGNOZA METODĄ WAG HARMONICZNYCH

Metoda wag harmonicznych, jak również metoda wyrównywania wykładniczego, charakteryzuje się brakiem znaczącej wymagalności stabilności parametrów strukturalnych modelu, a także wymagań co do jego analitycznej postaci, w przeciwieństwie do ekonometrycznych modeli przyczynowo–skutkowych. W metodzie wag harmonicznych, pod uwagę bierze się natomiast, zjawisko aktualizacji, czyli starzenia się informacji[7]. Im aktualniejsze są informacje, tym bardziej przydatne i wiarygodniejsze, od informacji starszych. Wagi starszych nośników informacji maleją w przeszłość w postępie geometrycznym czyli wykładniczo. Tym charakteryzują się metody należące do grupy modeli adaptacyjnych opartych na wykładniczym wyrównywaniu danych empirycznych.

Proces prognozowania metodą wag harmonicznych realizowany jest zazwyczaj w dwóch niezależnych etapach (obliczeniach)[8]:

1) W pierwszym etapie, według przyjętego algorytmu, zostaje wyrównany szereg czasowy ***metodą trendu pełzającego***;
2) W drugim etapie następuje obliczanie prognozy (na kolejne okresy $T > n$), ***metodą wag harmonicznych*** na bazie otrzymanego, w pierwszym etapie, wyrównanego szeregu czasowego.

„Modele prognozowania na podstawie analizy i ekstrapolacji szeregów czasowych są stosowane przede wszystkim do budowy prognoz krótkoterminowych, w niezbyt odległych horyzontach czasowych[9]".

[7] K. Kukuła (red.), *Wprowadzenie do ekonometrii* …, dz. cyt., s. 131.
[8] Tamże.
[9] J. Bendkowski, M. Kramarz, W. Kramarz, *Metody i techniki ilościowe w logistyce stosowanej. Wybrane zagadnienia*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2010, s. 21.

Etap pierwszy – metoda trendu pełzającego wyrównania szeregu czasowego

Przystępując do realizacji pierwszego etapu prognozowania metodą wag harmonicznych, dokonujemy wyrównania (wygładzenia) szeregu czasowego metodą trendu pełzającego przy zastosowaniu z góry ustalonego algorytmu, polegającego na realizacji następujących po sobie czynności (obliczeń):

1) Oszacowanie parametrów strukturalnych liniowych funkcji cząstkowych trendu z jedną zmienną t, dla określonego przez badacza okresu wygładzania np. $k = 3$ (trzyelementowej stałej wygładzania szeregu czasowego) korzystając przykładowo z Klasycznej Metody Najmniejszych Kwadratów[10] (KMNK),
2) Tworzenie cząstkowych modeli teoretycznych $\hat{y}_i$ na podstawie oszacowanych parametrów strukturalnych liniowych funkcji cząstkowych trendu z jedną zmienną t,
3) Obliczanie wartości wygładzonych – wartości teoretycznych dla kolejnych wartości t, które posłużyły do tworzenia cząstkowych modeli teoretycznych w etapie szacowania parametrów strukturalnych przy przyjętym okresie wygładzania k,
4) Ostateczne wygładzenie całości szeregu czasowego poprzez obliczenie średnich arytmetycznych prostych[11] z wcześniej uzyskanych wartości teoretycznych $\bar{\hat{y}}_t$.

Realizując krok po kroku, przedstawiony powyżej algorytm wyrównania szeregu czasowego metodą trendu pełzającego, rozpoczynamy obliczenia od pierwszego punktu, czyli od estymacji parametrów strukturalnych liniowych funkcji cząstkowych trendu z jedną zmienną t. „Wygładzenie szeregu czasowego ma na celu wyeliminowanie wahań przypadkowych[12]".

Szacowanie parametrów strukturalnych liniowych funkcji cząstkowych trendu z jedną zmienną t oraz tworzenie cząstkowych modeli teoretycznych

Pierwszym etapem prognozowania metodą wag harmonicznych jest dokonanie wyrównania empirycznego szeregu czasowego metodą trendu pełzającego. Przystępując do realizacji tego etapu należy oszacować parametry strukturalne liniowych funkcji cząstkowych trendu z jedną zmienną t, dla co najmniej dwóch stałych wygładzania. Autor w swoim opracowaniu posługuje się przyjętymi stałymi wygładzania $k = 3$ i $k = 5$. Według literatury przedmiotu badań, najlepiej przyjmować nieparzyste stałe wygładzania rozpoczynając od wartości $k = 3$.

---

[10] Klasyczna Metoda Najmniejszych Kwadratów zdecydowanie najczęściej znajduje zastosowanie w literaturze przedmiotu badań, spośród innych metod szacowania parametrów strukturalnych modeli ekonometrycznych. Kukuła (red.), *Wprowadzenie do ekonometrii* …, dz. cyt., s. 36.

[11] Średnią arytmetyczną prostą – „Obliczamy ją, dzieląc ogólną sumę wartości cechy przez ogólną sumę liczebności". J. D. Łaniec, *Elementy statystyki dla pedagogów*, Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko–Mazurskiego, Olsztyn 1999, s. 87.

[12] A. Maciąg, R. Piertoń, S. Kukla, *Prognozowanie i symulacja w przedsiębiorstwie*, PWE, Warszawa 2013, s. 74.

Chcąc dokonać estymacji parametrów strukturalnych liniowych funkcji cząstkowych z jedną zmienną, którą w rozpatrywanym przykładzie jest czas t, należy wykorzystać w praktyce do tego celu KMNK, stosując dowolnie wybrany sposób rozwiązywania układu dwóch równań z dwoma niewiadomymi parametrami:

– metody macierzowej,
– metody podstawiania,
– metody przeciwnych współczynników,
– metody klasycznej,
– metody wyznaczników.

Wybór każdego z podanych sposobów rozwiązywania układu dwóch równań z dwoma niewiadomymi parametrami w rezultacie daje te same wyniki. Dlatego też, tylko dla przypomnienia procedury rozwiązywania, autor przedstawił w tej części artykułu, ogólny opis tych sposobów. Ponadto należy dodać, że procedury szacowania parametrów strukturalnych liniowych funkcji cząstkowych z jedną zmienną t pokazane dla stałej wygładzania $k = 3$, są analogiczne również dla stałej wygładzania $k = 5$.

Metoda macierzowa

Pierwszym scharakteryzowanym sposobem jest metoda macierzowa. Elementem wyjściowym jest model empiryczny z nieoszacowanymi parametrami strukturalnymi α_0 i α_1 (wzór 1):

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \xi_t \quad (1)$$

gdzie:

y_t – zmienna zależna w empirycznym modelu z nieoszacowanymi parametrami strukturalnymi,
α_0, α_1 – nieoszacowane parametry strukturalne modelu empirycznego,
t – zmienna niezależna (czas),
ξ_t – czynnik losowy.

W metodzie macierzowej i nie tylko w tej metodzie, korzystając z KMNK, należy dla ułatwienia realizacji kolejnych obliczeń, utworzyć tabelę pomocniczą (tabela 1). W celu łatwego tworzenia potrzebnych macierzy oraz układu dwóch równań z dwoma niewiadomymi parametrami, a także do obliczania stosownych wyznaczników, które posiadają w swych zależnościach funkcyjnych znaki sum $\sum$[13], tabele pomocnicze powinny zawierać stosowny wiersz nagłówkowy powiązany z potrzebnymi we wzorach wartościami tych sum (tabela 1).

Tabela 1. Przykładowa tabela pomocnicza do budowy cząstkowego modelu teoretycznego metodą macierzową, dla $t = 1, 2, 3$ i $k = 3$

	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{y_t}$	$\boldsymbol{y_t \cdot t}$	$\boldsymbol{t^2}$
	1	y_1	$y_1 \cdot 1$	1
	2	y_2	$y_2 \cdot 2$	4
	3	y_3	$y_3 \cdot 3$	9
$\sum$	**6**	…	…	**14**

[13] Wzory posiadające w swej budowie znaki sum $\sum$ można łatwo obliczać, budując tabelę pomocniczą i w niej otrzymywać stosowne sumy, a wynik wpisywać bezpośrednio do wzoru zastępując nim sumę.

Metoda macierzowa polega na obliczeniu wektora a – ocen parametrów strukturalnych (wzór 2), który w konsekwencji posłuży do utworzenia modelu teoretycznego z oszacowanymi parametrami (wzór 10).

$$a = (X^T X)^{-1} \cdot X^T y \quad (2)$$

Aby oszacować wspomniane parametry strukturalne modelu empirycznego (wzór 1), funkcji z jedną zmienną t, należy najpierw utworzyć macierz $X^T X$ (wzór 3), korzystając z tabeli 1, a następnie sprawdzić czy jest ona osobliwa, czy też nieosobliwa.

$$X^T X = \begin{bmatrix} n & \sum t \\ \sum t & \sum t^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

W tym celu należy obliczyć wyznacznik macierzy $det(X^T X)$. Jeżeli macierz jest nieosobliwa, czyli wyznacznik jest różny od zera $det(X^T X) \neq 0$, wówczas można obliczyć macierz odwrotną (wzór 4).

$$(X^T X)^{-1} = \frac{1}{det(X^T X)} \cdot [(X^T X)^D]^T \quad (4)$$

Do obliczenia macierzy odwrotnej potrzebna jest macierz dopełnień $(X^T X)^D$, którą można utworzyć na podstawie wzoru 5, po uprzednim obliczeniu jej elementów (wzór 6).

$$(X^T X)^D = \begin{bmatrix} t_{11}^D & t_{12}^D \\ t_{21}^D & t_{22}^D \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$t_{ij}^D = (-1)^{i+j} \cdot detA_{ij} \quad (6)$$

gdzie:

t_{ij}^D – zmienne niezależne t tworzące elementy macierzy dopełnień,
i – numer wiersza zmiennej niezależnej t,
j – numer kolumny zmiennej niezależnej t,
$detA_{ij}$ – wyznacznik macierzy otrzymanej przez skreślenie *i-tego* wiersza i *j-tej* kolumny z wyjściowej macierzy $X^T X$.

Można także macierz dopełnień (wzór 5), otrzymać bezpośrednio z macierzy wyjściowej $X^T X$ (wzór 3), jeżeli jest ona kwadratową i symetryczną macierzą o rozmiarze 2×2, poprzez zamianę miejscami wartości elementów tej macierzy na głównej przekątnej (lewo ukośnej) oraz dodaniu pozostałym elementom macierzy znaków ujemnych (wzór 7).

$$(X^T X)^D = \begin{bmatrix} \sum t^2 & -(\sum t) \\ -(\sum t) & n \end{bmatrix} \quad (7)$$

Mając utworzoną macierz dopełnień, można przystąpić do obliczenia macierzy odwrotnej $(X^T X)^{-1}$ (wzór 4), jednak dopiero po utworzeniu wektora $X^T y$ (wzór 8), korzystając z tabeli 1.

$$X^T y = \begin{bmatrix} \sum y_t \\ \sum y_t t \end{bmatrix} \quad (8)$$

Następnie przystępujemy do obliczenia wektora ocen parametrów strukturalnych a (wzór 2 i 9):

$$a = (X^T X)^{-1} \cdot X^T y \;\rightarrow\; a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Otrzymane parametry posłużą do utworzenia modelu teoretycznego z jedną zmienną (wzór 10), o postaci:

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t \quad (10)$$

gdzie:

$\hat{y}_t$ – wartości teoretyczne zmiennej zależnej (w modelu teoretycznym z oszacowanymi parametrami strukturalnymi),

a_0, a_1 – oszacowane parametry strukturalne modelu teoretycznego,

t – zmienna niezależna (czas).

Metoda podstawiania

Identyczne wartości obliczonych parametrów strukturalnych do tworzenia modelu teoretycznego, możemy uzyskać także *metodą podstawiania*, rozwiązując układ dwóch równań z dwoma niewiadomymi parametrami (wzór 11), korzystając z KMNK.

$$\begin{cases} n \cdot a_0 + a_1 \sum t = \sum y_t \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 = \sum y_t t \end{cases} \quad (11)$$

Wzór ten uzupełniamy danymi empirycznymi z przygotowanej wcześniej tabeli pomocniczej (tabela 2).

Dla zróżnicowania przedstawianych w dalszej części przykładów tabel pomocniczych (tabela 2÷5), zaprezentowano je dla kolejnych wartości zmiennych niezależnych t i dla ustalonej przykładowej wartości stałej wygładzania $k = 3$.

Tabela 2. Przykładowa tabela pomocnicza do budowy cząstkowego modelu teoretycznego metodą podstawiania, dla $t = 2, 3, 4$ i $k = 3$

	t	y_t	$y_t \cdot t$	t^2
	2	y_2	$y_2 \cdot 2$	4
	3	y_3	$y_3 \cdot 3$	9
	4	y_4	$y_4 \cdot 4$	16
Σ	**9**	…	…	**29**

Metoda podstawiania polega na przekształceniu jednego z równań (wzór 11), w ten sposób, aby uzyskać funkcję zależności (równości) jednego z parametrów w stosunku do drugiego. Następnie, tak przekształcone równanie podstawiamy do drugiego równania w miejsce parametru, który uzyskaliśmy z wcześniejszego funkcyjnego przekształcenia. Umożliwia to obliczenie pierwszego parametru poprzez wykonanie podstawowych przekształceń matematycznych np. poprzez przeniesienie niewiadomych na lewą stronę, a wiadomych danych na prawą stronę. Należy przy tym pamiętać o podstawowej zasadzie matematycznej dotyczącej zmiany znaku na przeciwny (plus na minus lub minus na plus) przy przenoszeniu zmiennej (elementu równania) na drugą stronę równania. Obliczony pierwszy parametr posłuży do obliczenia drugiego, poprzez podstawienie go do drugiego równania. Obliczone parametry umożliwią utworzenie modelu teoretycznego na podstawie wzoru 10.

Metoda przeciwnych współczynników

Wykorzystanie *metody przeciwnych współczynników* w rozwiązywaniu układu dwóch równań z dwoma niewiadomymi parametrami (wzór 11), realizujemy korzystając z KMNK oraz utworzonej tabeli pomocniczej (tabela 3).

Tabela 3. Przykładowa tabela pomocnicza do budowy cząstkowego modelu teoretycznego metodą przeciwnych współczynników, dla $t = 3, 4, 5$ i $k = 3$

	t	y_t	$y_t \cdot t$	t^2
	3	y_3	$y_3 \cdot 3$	9
	4	y_4	$y_4 \cdot 4$	16
	5	y_5	$y_5 \cdot 5$	25
$\sum$	**12**	…	…	**50**

Metoda przeciwnych współczynników polega na uzyskaniu (poprzez pomnożenie lub podzielenie obu stron jednego z równań liczbą dodatnią lub ujemną), w drugim równaniu tej samej wartości współczynnika (stojącego przy parametrze), lecz o przeciwnym znaku. Wówczas możemy wartości współczynników zsumować stronami, uzyskując duże uproszczenie w dokonanym obliczeniu pierwszego z parametrów. Drugi parametr obliczamy z pierwszego lub drugiego równania, wykorzystując już obliczoną wartość pierwszego parametru. Po obliczeniu obu parametrów, tworzymy model teoretyczny z ich udziałem na podstawie wzoru 10.

Metoda klasyczna

W metodzie klasycznej do obliczeń wykorzystujemy dwa bezpośrednie wzory na wielkości dwóch niewiadomych parametrów strukturalnych a_0 i a_1 (wzór 12 i 13), przy czym parametr a_1 stanowi iloraz kowariancji zmiennych zależnych i niezależnych do wariancji zmiennych niezależnych (wzór 12). Natomiast parametr a_0, otrzymujemy z przekształcenia wzoru ogólnego modelu teoretycznego dla wartości średnich arytmetycznych.

$$a_1 = \frac{cov(y,t)}{var(t)} = \frac{\sum(y_t - \bar{y})(t - \bar{t})}{\sum(t - \bar{t})^2} \quad (12)$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1\bar{t} \quad (13)$$

Aby wykorzystać praktyczne zalety szybkiego obliczania parametrów za pomocą tych dwóch wzorów (wzór 12 i 13), należy najpierw dokonać potrzebnych obliczeń wartości średnich arytmetycznych zmiennych zależnych i niezależnych (wzór 14 i 15) oraz skonstruować tabelę pomocniczą (tabela 4):

$$\bar{y} = \frac{\sum_{t=1}^{k} y_t}{k} \quad (14)$$

$$\bar{t} = \frac{\sum_{t=1}^{k} t}{k} \qquad (15)$$

gdzie:

$\bar{y}$ – średnia arytmetyczna części zmiennych zależnych y_t, dla przyjętej stałej wygładzania k,

$\sum_{t=1}^{k} y_t$ – suma części zmiennych zależnych y_t, dla przyjętej stałej wygładzania k,

k – stała wygładzania,

$\bar{t}$ – średnia arytmetyczna części zmiennych niezależnych t, dla przyjętej stałej wygładzania k,

$\sum_{t=1}^{k} t$ – suma części zmiennych niezależnych t, dla przyjętej stałej wygładzania k.

Tabela 4. Przykładowa tabela pomocnicza do budowy cząstkowego modelu teoretycznego metodą klasyczną, dla $t = 4, 5, 6$ i $k = 3$

	t	y_t	y_t-$\bar{y}$	t-$\bar{t}$	$(y_t$-$\bar{y})(t$-$\bar{t})$	$(t$-$\bar{t})^2$
	4	y_4	y_4-$\bar{y}$	4-$\bar{t}$	$(y_4$-$\bar{y})(4$-$\bar{t})$	$(4$-$\bar{t})^2$
	5	y_5	y_5-$\bar{y}$	5-$\bar{t}$	$(y_5$-$\bar{y})(5$-$\bar{t})$	$(5$-$\bar{t})^2$
	6	y_6	y_6-$\bar{y}$	6-$\bar{t}$	$(y_6$-$\bar{y})(6$-$\bar{t})$	$(6$-$\bar{t})^2$
$\sum$	**15**	…	…	…	…	…

Po obliczeniu obu parametrów strukturalnych a_0 i a_1, tworzymy model teoretyczny na podstawie wzoru 10.

Metoda wyznaczników

Korzystając ze znanych w matematyce zależności (wzór 16÷22) rozwiązywania układu dwóch równań z dwoma niewiadomymi, możemy za pomocą wyznaczników w prosty sposób obliczyć niewiadome x i y:

$$y = ax + b \quad (16)$$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (17)$$

$$W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2\text{-}b_1a_2 \quad (18)$$

$$W_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2\text{-}b_1c_2 \quad (19)$$

$$W_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2\text{-}c_1a_2 \quad (20)$$

$$x = \frac{W_x}{W} \quad (21)$$

$$y = \frac{W_y}{W} \quad (22)$$

Adaptując powyższe wzory matematyczne (wzór 16÷22), do rozwiązywania układu dwóch równań z dwoma niewiadomymi parametrami w metodzie trendu pełzającego, możemy utworzyć, na potrzeby tej metody, stosowne wzory (wzór 23÷29) oparte na obliczaniu wyznaczników:

$$y_t = a_0 + a_1 t \quad (23)$$

$$\begin{cases} a_0 \cdot n + a_1 \sum t = \sum y_t \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 = \sum y_t t \end{cases} \quad (24)$$

$$W = \begin{vmatrix} n & \sum t \\ \sum t & \sum t^2 \end{vmatrix} \quad (25)$$

$$W_{a_0} = \begin{vmatrix} \sum y_t & \sum t \\ \sum y_t t & \sum t^2 \end{vmatrix} \quad (26)$$

$$W_{a_1} = \begin{vmatrix} n & \sum y_t \\ \sum t & \sum y_t t \end{vmatrix} \quad (27)$$

$$a_0 = \frac{W_{a_0}}{W} \quad (28)$$

$$a_1 = \frac{W_{a_1}}{W} \quad (29)$$

Wzory 24÷27 uzupełniamy danymi empirycznymi z przygotowanej wcześniej tabeli pomocniczej (tabela 5). Obliczone na podstawie tych wzorów parametry strukturalne a_0 i a_1 posłużą do utworzenia modelu teoretycznego w oparciu o wzór 10.

Tabela 5. Przykładowa tabela pomocnicza do budowy cząstkowego modelu teoretycznego metodą wyznaczników, dla $t = 5, 6, 7$ i $k = 3$

	t	y_t	$y_t \cdot t$	t^2
	5	y_5	$y_5 \cdot 5$	25
	6	y_6	$y_6 \cdot 6$	36
	7	y_7	$y_7 \cdot 7$	49
$\sum$	**18**	⋯	⋯	**110**

Zaletą powyższej metody wyznacznikowej jest prostota obliczeń i stosowanie dowolnie częstej powtarzalności tych obliczeń przy kolejnych szacowaniach parametrów strukturalnych. Ponadto, ze względu na utworzone gotowe wzory na wyznaczniki (wzór 25÷27), nie musimy tworzyć początkowego układu dwóch równań z dwoma niewiadomymi parametrami (wzór 24), tak jak w innych metodach, a od razu możemy przystąpić do obliczeń tych parametrów i tworzenia modelu teoretycznego na podstawie wzoru 10.

Reasumując, po oszacowaniu parametrów strukturalnych a_0 i a_1 za pomocą powyższych pięciu metod, możemy utworzyć przy pomocy każdej z tych metod, kolejne przykładowe cząstkowe modele teoretyczne na podstawie wzoru 10 z jedną zmienną t:

$$\hat{y}_1 = a_0 + a_1 t$$

$$\hat{y}_2 = a_0 + a_1 t$$

$$\hat{y}_3 = a_0 + a_1 t$$

$$\hat{y}_4 = a_0 + a_1 t$$

$$\hat{y}_5 = a_0 + a_1 t$$

W następnych krokach i (iteracjach[14]), możemy utworzyć kolejne cząstkowe modele teoretyczne odpowiednio: $\hat{y}_6, \hat{y}_7, \hat{y}_8, \dots, \hat{y}_{n\text{-}k+1}$, wykorzystując do estymacji parametrów strukturalnych dowolną metodę z podanych powyżej.

Obliczanie wartości wygładzonych – wartości teoretycznych $\hat{y}_i$

Po obliczeniu wszystkich cząstkowych modeli teoretycznych $\hat{y}_i$[15] z oszacowanymi parametrami strukturalnymi a_0 i a_1, uzyskanymi dowolnymi metodami opisanymi powyżej, przystępujemy na ich podstawie do obliczenia cząstkowych wartości wygładzonych – wartości teoretycznych, dla kolejnych wartości t, które posłużyły wcześniej do tworzenia tych cząstkowych modeli teoretycznych w etapie szacowania parametrów strukturalnych (tabela 6).

Tabela 6. Przykłady obliczania wartości teoretycznych z utworzonych modeli cząstkowych dla wybranych stałych wygładzania $k = 3$ i $k = 5$

Stała wygładzania $k = 3$			
i	$\hat{y}_i = a_0 + a_1 t$	t	$\hat{y}_i(t) = a_0 + a_1 t$
1	2	3	4
1	$\hat{y}_1 = a_0 + a_1 t$	$1, 2, 3$	$\hat{y}_1(1) = a_0 + a_1 \cdot 1$ $\hat{y}_1(2) = a_0 + a_1 \cdot 2$ $\hat{y}_1(3) = a_0 + a_1 \cdot 3$
2	$\hat{y}_2 = a_0 + a_1 t$	$2, 3, 4$	$\hat{y}_2(2) = a_0 + a_1 \cdot 2$ $\hat{y}_2(3) = a_0 + a_1 \cdot 3$ $\hat{y}_2(4) = a_0 + a_1 \cdot 4$
⋮	⋮	⋮	⋮
$n\text{-}k + 1$	$\hat{y}_{n\text{-}k+1} = a_0 + a_1 t$	$n\text{-}2, n\text{-}1, n$	$\hat{y}_{n\text{-}k+1}(n\text{-}2) = a_0 + a_1 \cdot (n\text{-}2)$ $\hat{y}_{n\text{-}k+1}(n\text{-}1) = a_0 + a_1 \cdot (n\text{-}1)$ $\hat{y}_{n\text{-}k+1}(n) = a_0 + a_1 \cdot n$
Stała wygładzania $k = 5$			
i	$\hat{y}_i = a_0 + a_1 t$	t	$\hat{y}_i(t) = a_0 + a_1 t$
1	2	3	4
1	$\hat{y}_1 = a_0 + a_1 t$	$1, 2, 3, 4, 5$	$\hat{y}_1(1) = a_0 + a_1 \cdot 1$ $\hat{y}_1(2) = a_0 + a_1 \cdot 2$ $\hat{y}_1(3) = a_0 + a_1 \cdot 3$ $\hat{y}_1(4) = a_0 + a_1 \cdot 4$ $\hat{y}_1(5) = a_0 + a_1 \cdot 5$
2	$\hat{y}_2 = a_0 + a_1 t$	$2, 3, 4, 5, 6$	$\hat{y}_2(2) = a_0 + a_1 \cdot 2$

[14] i – numer kolejnego cząstkowego modelu teoretycznego w kolejnej iteracji (kroku).
[15] Do oznaczania kolejnych teoretycznych modeli cząstkowych $\hat{y}_i$ stosujemy indeks dolny i, który przyjmuje wartości od $i = 1$ do $i = n\text{-}k + 1$.

			$\hat{y}_2(3) = a_0 + a_1 \cdot 3$ $\hat{y}_2(4) = a_0 + a_1 \cdot 4$ $\hat{y}_2(5) = a_0 + a_1 \cdot 5$ $\hat{y}_2(6) = a_0 + a_1 \cdot 6$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n\text{-}k + 1$	$\hat{y}_{n\text{-}k+1} = a_0 + a_1 t$	$n\text{-}4, n\text{-}3,$ $n\text{-}2, n\text{-}1, n$	$\hat{y}_{n\text{-}k+1}(n\text{-}4) = a_0 + a_1 \cdot (n\text{-}4)$ $\hat{y}_{n\text{-}k+1}(n\text{-}3) = a_0 + a_1 \cdot (n\text{-}3)$ $\hat{y}_{n\text{-}k+1}(n\text{-}2) = a_0 + a_1 \cdot (n\text{-}2)$ $\hat{y}_{n\text{-}k+1}(n\text{-}1) = a_0 + a_1 \cdot (n\text{-}1)$ $\hat{y}_{n\text{-}k+1}(n) = a_0 + a_1 \cdot n$

Dla uporządkowanego zestawienia wartości teoretycznych dla wszystkich cząstkowych modeli teoretycznych otrzymanych w ostatniej, czwartej kolumnie tabeli 6, tworzymy zbiorczą tabelę pomocniczą (tabela 7), w której umieszczamy w odpowiednich wierszach i kolumnach stosowne wartości.

Następnie przystępujemy do realizacji kolejnego etapu, czyli obliczania średnich arytmetycznych prostych (kolumna 7) z obliczonych wartości teoretycznych, według poszczególnych wierszy utworzonej zbiorczej tabeli pomocniczej (tabela 7).

Obliczanie średnich arytmetycznych z wartości teoretycznych $\bar{\bar{y}}_t$

W zbiorczej tabeli pomocniczej (tabela 7) w kolumnie 7 wpisujemy wartości średniej arytmetycznej prostej obliczone z wartości umieszczonych w poszczególnych wierszach, czyli obliczamy wartości wygładzone analizowanego szeregu czasowego, z wcześniej uzyskanych wartości teoretycznych (tabela 6) dla poszczególnych wartości t , z cząstkowych modeli teoretycznych.

Tabela 7. Zbiorcze wartości teoretyczne i ich średnie arytmetyczne oraz obliczenia pomocnicze do wyznaczenia współczynnika wag harmonicznych

t	$\hat{y}_1(t)$	$\hat{y}_2(t)$	$\hat{y}_3(t)$	$\cdots$	$\hat{y}_{n\text{-}k+1}(t)$	$\bar{\bar{y}}_t$	$\lvert\bar{\bar{y}}_n\text{-}\bar{\bar{y}}_t\rvert$	$\frac{\lvert\bar{\bar{y}}_n\text{-}\bar{\bar{y}}_t\rvert}{n\text{-}t}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	$\hat{y}_1(1)$	–	–	$\cdots$	–	$\bar{\bar{y}}_1$	$\lvert\bar{\bar{y}}_n\text{-}\bar{\bar{y}}_1\rvert$	$\frac{\lvert\bar{\bar{y}}_n\text{-}\bar{\bar{y}}_1\rvert}{n\text{-}1}$
2	$\hat{y}_1(2)$	$\hat{y}_2(2)$	–	$\cdots$	–	$\bar{\bar{y}}_2$	$\lvert\bar{\bar{y}}_n\text{-}\bar{\bar{y}}_2\rvert$	$\frac{\lvert\bar{\bar{y}}_n\text{-}\bar{\bar{y}}_2\rvert}{n\text{-}2}$
3	$\hat{y}_1(3)$	$\hat{y}_2(3)$	$\hat{y}_3(3)$	$\cdots$	–	$\bar{\bar{y}}_3$	$\lvert\bar{\bar{y}}_n\text{-}\bar{\bar{y}}_3\rvert$	$\frac{\lvert\bar{\bar{y}}_n\text{-}\bar{\bar{y}}_3\rvert}{n\text{-}3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\hat{y}_{n\text{-}k+1}(n)$	$\bar{\bar{y}}_n$	$\lvert\bar{\bar{y}}_n\text{-}\bar{\bar{y}}_n\rvert = 0$	–
							Σ	$\sum_{t=1}^{n\text{-}1} \frac{\lvert\bar{\bar{y}}_n\text{-}\bar{\bar{y}}_t\rvert}{n\text{-}t}$

W kolumnie ósmej i dziewiątej (tabela 7), wykonujemy obliczenia pomocnicze do wyznaczenia, w dalszym etapie, współczynnika wag harmonicznych opierając się na uzyskanych wynikach wartości wygładzonych szeregu empirycznego (w kolumnie siódmej).

Sprawdzenie poziomu wygładzenia szeregu empirycznego w metodzie trendu pełzającego pierwiastkiem błędu średniokwadratowego (Root Mean Squared Error)

Po obliczeniu wartości wygładzonych analizowanego szeregu czasowego, czyli średnich arytmetycznych z wartości teoretycznych (kolumna 7 w tabeli 7), należy sprawdzić jakość tego wygładzenia poprzez porównanie wartości szeregu empirycznego z wartościami szeregu wygładzonego. Stopień tego wygładzenia, a właściwie błąd odchylenia jednych danych (empirycznych) od drugich danych (wygładzonych – teoretycznych) można obliczać za pomocą różnych miar rozproszenia (dyspersji)[16]. Według autora, najbardziej miarodajnymi są miary oparte w swej budowie na zależności funkcyjnej zastosowanej w statystycznej mierze wariancji[17] i odchylenia standardowego[18]. Do tej grupy miar, z pewnością można zaliczyć miarę błędu średniokwadratowego (*Mean Squared Error* – MSE[19]) – wzór 30 oraz pierwiastek błędu średniokwadratowego (*Root Mean Squared Error* – RMSE) – wzór 31 i 32.

$$s_*^2 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(y_t - \bar{\bar{y}}_t\right)^2 = MSE \quad (30)$$

gdzie:

s_*^2 – MSE (*Mean Squared Error*) – błąd średniokwadratowy,
n – liczba obserwacji (danych empirycznych),
y_t – wartości empiryczne zmiennej zależnej (w modelu empirycznym),
$\bar{\bar{y}}_t$ – średnie arytmetyczne wartości teoretycznych zmiennej zależnej (średnie wartości teoretyczne).

$$s_* = \sqrt{s_*^2} \quad (31)$$

$$s_* = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(y_t - \bar{\bar{y}}_t\right)^2} = RMSE \quad (32)$$

gdzie:

[16] Miary rozproszenia (dyspersji) są miarami zróżnicowania, do których należą: odchylenie standardowe, wariancja, odchylenie ćwiartkowe, odchylenie przeciętne, obszar zmienności (rozstęp) oraz współczynnik zmienności. M. Rószkiewicz, *Metody ilościowe w badaniach marketingowych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002, s. 129.

[17] Wariancja to obok rozstępu, odchylenia standardowego i współczynnika zmienności jedna z podstawowych miar rozproszenia (dyspersji). Informuje o tym, jak bardzo wartości analizowanego zbioru liczbowego rozrzucone są wokół średniej arytmetycznej. Im wyższa wartość wariancji, tym większe rozproszenie wyników. Wariancję definiuje się na ogół, jako średnią arytmetyczną sumy kwadratów odchyleń (czyli różnic) pomiędzy kolejnymi badanymi zmiennymi, a ich średnią arytmetyczną. Symbolem wariancji jest zazwyczaj mała litera s^2. Po obliczeniu wartości wariancji, nie interpretuje się jej wyniku w sposób bezpośredni, a jedynie za pośrednictwem odchylenia standardowego. J. D. Łaniec, *Elementy statystyki* …, dz. cyt., s. 113.

[18] Odchylenie standardowe najprościej można zdefiniować jako pierwiastek kwadratowy z wariancji. Najczęściej stosowanym symbolem oznaczania jest mała litera s. W przeciwieństwie do wariancji, otrzymaną z obliczeń wartość odchylenia standardowego interpretuje się. Określa ona, o ile średnio rzecz biorąc, wartości empiryczne zmiennej zależnej odchylają się od wartości teoretycznych. M. Sobczyk, *Statystyka*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996, s. 49.

[19] S. Krawczyk, *Metody ilościowe* …, dz. cyt., s. 235.

s_* – RMSE (*Root Mean Squared Error*) – pierwiastek błędu średniokwadratowego określa, *o ile średnio rzecz biorąc*, wartości empiryczne zmiennej zależnej y_t odchylają się od średnich wartości teoretycznych $\bar{\hat{y}}_t$, czyli średnich wartości wygładzonych.

Dla ułatwienia obliczenia wartości błędu średniokwadratowego, w którym we wzorze występuje znak sumy, zasadnym jest zbudowanie tabeli pomocniczej (tabela 8).

Tabela 8. Tabela pomocnicza do obliczenia wartości błędu średniokwadratowego

t	y_t	$\bar{\hat{y}}_t$	y_t-$\bar{\hat{y}}_t$	$(y_t$-$\bar{\hat{y}}_t)^2$
1	y_1	$\bar{\hat{y}}_1$	y_1-$\bar{\hat{y}}_1$	$(y_1$-$\bar{\hat{y}}_1)^2$
2	y_2	$\bar{\hat{y}}_2$	y_2-$\bar{\hat{y}}_2$	$(y_2$-$\bar{\hat{y}}_2)^2$
3	y_3	$\bar{\hat{y}}_3$	y_3-$\bar{\hat{y}}_3$	$(y_3$-$\bar{\hat{y}}_3)^2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	y_n	$\bar{\hat{y}}_n$	y_n-$\bar{\hat{y}}_n$	$(y_n$-$\bar{\hat{y}}_n)^2$
			Σ	$\sum_{t=1}^{n}(y_t$-$\bar{\hat{y}}_t)^2$

Po sprawdzeniu wartości błędu średniokwadratowego (jego pierwiastka kwadratowego) i uznaniu jego wielkości za akceptowalną dla celów praktycznych lub badawczych, można przystąpić do obliczania prognozy metodą wag harmonicznych.

Należy tutaj dodać, że określenie jakości wygładzenia szeregu czasowego, za pomocą pierwiastka błędu średniokwadratowego, wyznaczamy dla wszystkich przyjętych przez badacza stałych wygładzania k, dla których dokonano obliczeń tego wygładzenia metodą trendu pełzającego. Za najbardziej wartościowe, z punktu widzenia badacza, uważa się takie wygładzenie szeregu czasowego dla stałej wygładzania k, dla którego pierwiastek błędu średniokwadratowego jest najmniejszy. Właśnie takie wyrównanie szeregu czasowego, najlepiej nadaje się, do dokonania obliczeń predykcji metodą wag harmonicznych.

Etap drugi – predykcja metodą wag harmonicznych

Najczęściej stosowaną metodą obliczania predykcji[20] metodą wag harmonicznych, jest metoda, zgodnie z którą predykcja dla okresu prognozowanego $T > n$ jest określona wzorem 33:

$$y_T^P = \omega \cdot (T\text{-}n) + \bar{\hat{y}}_n \quad (33)$$

gdzie:

y_T^P – prognoza dla okresu T,
ω – współczynnik wag harmonicznych,
T – okres, dla którego obliczamy prognozę ($T > n$),
n – liczba obserwacji (danych empirycznych),
$\bar{\hat{y}}_n$ – średnia wartość wygładzona dla ostatniego elementu szeregu czasowego (średnia wartość teoretyczna dla $n\text{-}tego$ okresu).

[20] Pojęcie predykcja jest przez autora używana toż samo z pojęciem prognoza. Jest to przewidywanie jaką wartość przyjmie zmienna zależna przy ustalonej wartości zmiennej niezależnej. J. Podgórski, *Statystyka* …, dz. cyt., s. 305.

Najistotniejszym elementem wzoru 33, w sensie obliczeniowym, jest wyznaczenie współczynnika wag harmonicznych ω, czyli najbardziej prawdopodobnego jednookresowego przyrostu funkcji trendu. Obliczamy go według wzoru 34, który wyraża średnią arytmetyczną sumy ilorazu modułu[21] odchyleń średnich wartości wygładzonych do wagi harmonicznej. Dla ułatwienia obliczenia tego współczynnika, wykorzystujemy zbudowaną tabele pomocniczą (tabela 7, kolumny 8 i 9).

$$\omega = \frac{1}{n\text{-}1}\sum_{t=1}^{n\text{-}1}\frac{\left|\bar{\bar{y}}_n\text{-}\bar{\bar{y}}_t\right|}{n\text{-}t} \quad (34)$$

gdzie:

- ω – współczynnik wag harmonicznych,
- n – liczba obserwacji (danych empirycznych),
- t – kolejny okres obserwacji zmiennej niezależnej[22],
- $\bar{\bar{y}}_n$ – średnia wartość wygładzona dla ostatniego elementu szeregu czasowego (średnia wartość teoretyczna dla $n\text{-}tego$ okresu),
- $\bar{\bar{y}}_t$ – średnie arytmetyczne wartości teoretycznych zmiennej zależnej (średnie wartości teoretyczne),
- $\left|\bar{\bar{y}}_n\text{-}\bar{\bar{y}}_t\right|$ – moduł, czyli wartość bezwzględna, różnicy średniej wartości teoretycznej w $n\text{-}tym$ okresie i średniej wartości teoretycznej w kolejnym okresie t.

Odchylenie średnich wartości wygładzonych jest różnicą średniej wartości teoretycznej w $n\text{-}tym$ okresie i średniej wartości teoretycznej w kolejnym okresie t. Ułamek $\left(\frac{1}{n\text{-}t}\right)$, w którym mianownik jest różnicą liczby obserwacji n i kolejnych wartości zmiennej t nazywamy wagą harmoniczną i dlatego prognozowanie oparte na tym wzorze, nazywamy metodą wag harmonicznych.

Ponadto odchylenie (czyli różnica) średnich wartości wygładzonych, podane *w wartości bezwzględnej* (wzór 34 i 35) jest bardziej reprezentatywne niż obliczane bez wykorzystania modułu we wzorze, ponieważ obliczone różnice nie uzyskują wyników ujemnych i tym samym nie zakłócają (zaciemniają) wiarygodności rzeczywistych różnic pomiędzy średnią wartością wygładzoną dla $n\text{-}tej$ obserwacji a średnią wartością teoretyczną w kolejnym okresie t.

$$\omega = \frac{1}{n\text{-}1}\sum_{t=1}^{n\text{-}1}\frac{\left|\bar{\bar{y}}_n\text{-}\bar{\bar{y}}_t\right|}{n\text{-}t} = \frac{1}{n\text{-}1}\left(\frac{\left|\bar{\bar{y}}_n\text{-}\bar{\bar{y}}_1\right|}{n\text{-}1} + \frac{\left|\bar{\bar{y}}_n\text{-}\bar{\bar{y}}_2\right|}{n\text{-}2} + \cdots + \frac{\left|\bar{\bar{y}}_n\text{-}\bar{\bar{y}}_{n\text{-}2}\right|}{2} + \frac{\left|\bar{\bar{y}}_n\text{-}\bar{\bar{y}}_{n\text{-}1}\right|}{1}\right) \quad (35)$$

Powyższy wzór 35, do obliczania współczynnika wag harmonicznych ma logiczne wytłumaczenie. Po rozwinięciu znaku sumy[23] we wzorze (wzór 34 i 35), można rozwinięte wagi harmoniczne[24] zinterpretować jako kolejne przyrosty: $n\text{-}1 - okresowy$,

---

[21] Moduł – wartość bezwzględna.

[22] Zmienne niezależne w modelach matematycznych i ekonometrycznych w literaturze przedmiotu badań przez różnych autorów nazywane są także zmiennymi objaśniającymi lub egzogenicznymi. M. Mróz, *Dobór zmiennych niezależnych w modelowaniu procesów logistycznych metodą analizy grafów*, [w:] Zeszyty Naukowe Akademii Sztuki Wojennej, Nr 3 (108), Warszawa 2017, s. 129.

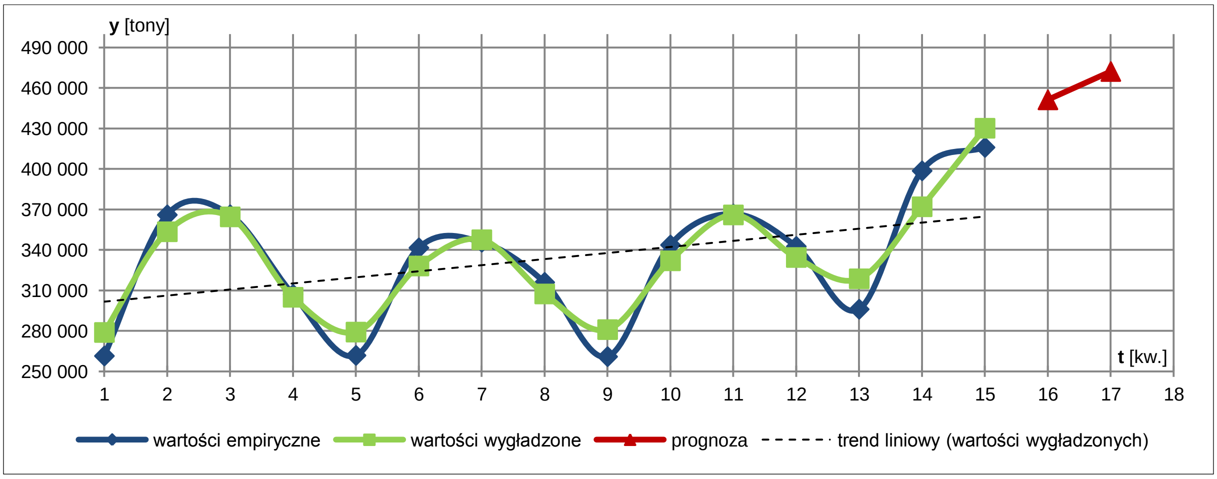
[23] Wzory posiadające w swej budowie znaki sum $\sum$, należy obliczać rozwijając wszystkie składniki tej sumy według całego zakresu sumowania, albo łatwiej, budując tabelę pomocniczą i w niej obliczać stosowne sumy, a wynik wpisywać bezpośrednio do wzoru, zastępując sumę.

[24] K. Kukuła (red.), *Wprowadzenie do ekonometrii* …, dz. cyt., s. 134.

n-2 – *okresowy*, ..., *dwuokresowy* i *jednookresowy* liczone od okresu n-*tego* w przeszłość. Według *zasady starzenia się informacji*[25], która jest bezpośrednio związana z prognozowaniem metodą wag harmonicznych, najmniej ważnym przyrostem jest przyrost n-1 – *okresowy*, a najważniejszym przyrost jednookresowy, ponieważ jest nośnikiem *najświeższych informacji*.

Po obliczeniu współczynnika wag harmonicznych przystępujemy do obliczenia prognozy na zadany okres T, według wzoru 34. Należy dodać, że prognozowanie metodą wag harmonicznych wykonuje się najczęściej dla jednego lub dwóch okresów w przód (prognoza krótkookresowa).

Reasumując, obliczoną prognozę metodą wag harmonicznych, dane empiryczne oraz wartości wygładzone szeregu czasowego metodą trendu pełzającego najlepiej jest zobrazować wykonując wykres (przykład: rysunek 1). Na podstawie podanego przykładu interpretacji graficznej można łatwiej i bardziej obrazowo dokonać analizy: jakości otrzymanego wygładzenia danych empirycznych, kierunku tendencji rozwojowej[26], czyli pokazania trendu oraz wielkości prognozy.



Rysunek 1. Wykres obrazujący przykładowe dane empiryczne, wartości wygładzone szeregu czasowego, linię trendu oraz prognozę na dwa kolejne okresy

Przytoczony przykład wykresu (rysunek 1), pokazuje niewielkie niezgodności pomiędzy krzywą obrazującą wartości empiryczne a krzywą obrazującą wartości teoretyczne, czyli wygładzone. Tym samym pokazuje duże dopasowanie obu szeregów. Analizując tendencje rozwojową można stwierdzić, że kierunek pokazanego trendu na przestrzeni piętnastu kolejnych obserwacji jest stale rosnący.

Błąd prognozy

Bez względu na to jaką stosuje się metodę prognozowania wymaganym jest, aby obliczyć błąd prognozy względny lub bezwzględny. Błędem względnym prognozy nazywamy zazwyczaj stosunek (iloraz) sumy kwadratów odchyleń wartości empirycznych

[25] Tamże, s. 131.

[26] „Tendencją rozwojową (trendem) nazywamy powolne, regularne i systematyczne zmiany określonego zjawiska, obserwowane w dostatecznie długim przedziale czasu i będące rezultatem działania przyczyn głównych". M. Sobczyk, *Statystyka*, dz. cyt., s. 293.

od prognostycznych do wartości empirycznych. Natomiast błędem bezwzględnym nazywamy różnicę pomiędzy wartością empiryczną a wartością prognostyczną.

Błąd względny predykcji, w metodzie wag harmonicznych podobnie jak w przypadku modeli wyrównania wykładniczego, najczęściej oblicza się za pomocą współczynnika Theila I^2 (wzór 36):

$$I^2 = \frac{\sum\left(y_t - \bar{\bar{y}}_t\right)^2}{\sum y_t^2} \quad (36)$$

gdzie:

I^2 – współczynnik Theila (miernik całkowitego względnego błędu prognozy),

$\left(y_t - \bar{\bar{y}}_t\right)^2$ – kwadrat odchylenia (różnicy), pomiędzy wartościami empirycznymi i średnimi wartościami teoretycznymi zmiennej prognozowanej,

y_t^2 – kwadrat wartości empirycznych zmiennej zależnej.

Współczynnik Theila (wzór 36), czyli miernik całkowitego względnego błędu prognozy, możemy zdefiniować jako iloraz sumy kwadratów różnic wartości empirycznych y_t i średnich wartości teoretycznych $\bar{\bar{y}}_t$ zmiennej prognozowanej do sumy kwadratów wartości empirycznych y_t^2. Do jego obliczenia wykorzystujemy, tak jak w poprzednich przypadkach, zbudowaną tabelę pomocniczą (tabela 9).

Tabela 9. Tabela pomocnicza do obliczenia wartości współczynnika Theila

t	y_t	$\bar{\bar{y}}_t$	$y_t - \bar{\bar{y}}_t$	$\left(y_t - \bar{\bar{y}}_t\right)^2$	y_t^2
1	y_1	$\bar{\bar{y}}_1$	$y_1 - \bar{\bar{y}}_1$	$\left(y_1 - \bar{\bar{y}}_1\right)^2$	y_1^2
2	y_2	$\bar{\bar{y}}_2$	$y_2 - \bar{\bar{y}}_2$	$\left(y_2 - \bar{\bar{y}}_2\right)^2$	y_2^2
3	y_3	$\bar{\bar{y}}_3$	$y_3 - \bar{\bar{y}}_3$	$\left(y_3 - \bar{\bar{y}}_3\right)^2$	y_3^2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	y_n	$\bar{\bar{y}}_n$	$y_n - \bar{\bar{y}}_n$	$\left(y_n - \bar{\bar{y}}_n\right)^2$	y_n^2
			Σ	$\sum_{t=1}^{n}\left(y_t - \bar{\bar{y}}_t\right)^2$	$\sum y_t^2$

Natomiast pierwiastek kwadratowy, obliczony ze współczynnika Theila I^2, definiujemy jako średni błąd prognozy I (wzór 37), czyli przeciętny względny błąd średnich wartości teoretycznych:

$$I = \sqrt{I^2} \quad (37)$$

Średni błąd prognozy I informuje, o stopniu niezgodności pomiędzy empirycznymi a teoretycznymi wartościami zmiennej prognozowanej. Potwierdzeniem dużego lub małego dopasowania są zazwyczaj dokonane obliczenia średniego błędu prognozy (wzór 37).

Dodatkowym uzupełnieniem interpretacji szacowanych błędów prognozy, czyli stawiania wniosków dotyczących jakości obliczonej prognozy, jest również współczynnik zmienności losowej V[27] (wzór 38), którego wyznaczenie należy poprzedzić obliczeniem wartości średniej arytmetycznej danych empirycznych (wzór 39):

$$V = \frac{s_*}{\bar{y}} \quad (38)$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_t}{n} \quad (39)$$

gdzie:

V – współczynnik zmienności losowej,
s_* – pierwiastek błędu średniokwadratowego,
$\bar{y}$ – średnia arytmetyczna wartości empirycznych zmiennej zależnej,
$\sum y_t$ – suma wartości empirycznych zmiennej zależnej,
n – liczba obserwacji (danych empirycznych).

Na podstawie współczynnika zmienności losowej możemy stwierdzić, jaką część średniej wartości zmiennej zależnej y_t stanowią wahania przypadkowe zmiennej prognozowanej. Akceptowalna wielkość błędu tego współczynnika określana jest indywidualnie przez każdego badacza w zależności od rodzaju prowadzonych badań i najczęściej przyjmowana jest ona w granicach do 10 %.

Podsumowanie

Metoda wag harmonicznych prognozowania procesów logistycznych, po uprzednim wygładzeniu szeregu czasowego metodą trendu pełzającego posłużyła do teoretycznej analizy tego prognozowania. Ujęcie teoretyczne problemu pozwoliło na podjęcie próby uporządkowania obszaru wiedzy związanej z prognozowaniem metodą wag harmonicznych, a w tym głównie z wygładzaniem szeregu czasowego metodą trendu pełzającego poprzez zastosowanie uporządkowanego i kompletnego algorytmu prognozowania metodą wag harmonicznych bez stosowania skrótów myślowych i odsyłania do innej literatury, a w tym do potrzebnych wzorów i definicji statystycznych.

W metodzie trendu pełzającego przedstawiono, krok po kroku, stopniowe wygładzanie poszczególnych odcinków szeregu czasowego, z wykorzystaniem do wyboru pięciu sposobów szacowania parametrów strukturalnych modelu z jedną zmienną. Ponadto, zaprezentowano także teoretyczne podejście do sposobu doboru właściwej stałej wygładzania, stosowanej w metodzie trendu pełzającego, za pomocą diagnozy błędem średniokwadratowym, a dokładniej jego pierwiastkiem kwadratowym. Oprócz tego, na potrzeby usprawnienia obliczeń, utworzono przykładowe tabele pomocnicze do uzyskania teoretycznych modeli cząstkowych, wartości wygładzonych, błędów średniokwadratowych oraz obliczania współczynnika wag harmonicznych. Do sprawdzenia jakości prognoz, wykorzystano zastosowanie szacowania błędów współczynnikiem Theila i współczynnikiem zmienności losowej.

[27] Współczynnik zmienności losowej V, w ogólnym ujęciu ekonometrycznym dla modeli z jedną zmienną t, jest to stosunek odchylenia standardowego składnika resztowego do wartości średniej arytmetycznej zmiennej niezależnej. K. Kukuła (red.), *Wprowadzenie do ekonometrii* …, dz. cyt., s. 121.

Postawiony w artykule cel badań dotyczący ukazania sposobu otrzymywania najlepszej prognozy wybranego procesu logistycznego metodą wag harmonicznych został osiągnięty poprzez zastosowanie szczegółowej analizy teoretycznej tej metody. Natomiast problem badawczy został rozwiązany poprzez znalezienie odpowiedzi na pytanie: *jak wykorzystać do prognozowania procesów logistycznych metodę wag harmonicznych, aby uzyskać jak najmniejszy błąd prognozy?* Rozwiązaniem tego problemu jest konsekwentne iteracyjne stosowanie procedur i obliczeń podanych w zaprezentowanym algorytmie prognozowania procesów logistycznych metodą wag harmonicznych, dające w rezultacie możliwość uzyskania jak najmniejszego błędu prognozy.

Hipoteza badawcza została pozytywnie zweryfikowana poprzez teoretyczne pokazanie możliwości właściwego doboru stałej wygładzania w metodzie trendu pełzającego na podstawie minimalizacji błędu średniokwadratowego, a co za tym idzie, możliwości uzyskania najmniejszego błędu prognozy w metodzie wag harmonicznych, który powinien okazać się wystarczająco niski do wykorzystania w celach praktycznych lub badawczych.

Według autora, powyższe teoretyczne rozważania, mogłyby stać się uzupełnieniem dotychczasowej wiedzy w tym obszarze, a także inspiracją do podjęcia dalszych badań w zakresie prognozowania różnych procesów logistycznych metodą wag harmonicznych, a w szczególności doskonałą platformą wyjściową do przeprowadzenia konkretnych badań na rzeczywistych danych empirycznych.

Bibliografia

1. Bendkowski J., Kramarz M., Kramarz W., *Metody i techniki ilościowe w logistyce stosowanej. Wybrane zagadnienia*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2010.
2. Duda A., *Prognozowanie w logistyce na przykładzie prognozy metodą średnich ruchomych*, [w:] Zeszyty Naukowe Akademii Sztuki Wojennej, Nr 3 (108), Warszawa 2017.
3. Krawczyk S., *Metody ilościowe w planowaniu (działalności przedsiębiorstwa)*, Wydawnictwo C. H. Beck, Warszawa 2001.
4. Kukuła K. (red.), *Wprowadzenie do ekonometrii w przykładach i zadaniach*, Wydawnictwo naukowe PWN, Warszawa 2004.
5. Łaniec J. D., *Elementy statystyki dla pedagogów*, Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko–Mazurskiego, Olsztyn 1999.
6. Maciąg A., Piertoń R., Kukla S., *Prognozowanie i symulacja w przedsiębiorstwie*, PWE, Warszawa 2013.
7. Mróz M., *Dobór zmiennych niezależnych w modelowaniu procesów logistycznych metodą analizy grafów*, [w:] Zeszyty Naukowe Akademii Sztuki Wojennej, Nr 3 (108), Warszawa 2017.
8. Podgórski J., *Statystyka dla studiów licencjackich*, PWE, Warszawa 2005.
9. Rószkiewicz M., *Metody ilościowe w badaniach marketingowych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002.
10. Sobczyk M., *Statystyka*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996.
11. Welfe A., Ekonometria, PWE, Warszawa 2003.