

Andrzej BUZE
Andrzej MOKROSIŃSKI
Wojciech PSZCZÓŁKOWSKI

APROKSYMACJA CHARAKTERYSTYK RDZENI MAGNETYCZNYCH

STRESZCZENIE *Względnie proste odwzorowanie matematyczne charakterystyk materiałów magnetycznych bywa przydatne w niektórych obliczeniach projektowych i symulacyjnych. W artykule omówiono podjęte próby uzyskania wzorów określających statyczne i dynamiczne charakterystyki magnesowania, stratności oraz przenikalności magnetycznej rdzeni zwijanych. Została do tego wykorzystana obszerna baza wyników badań eksperymentalnych systematycznie prowadzonych w specjalistycznym laboratorium Zakładu Trakcji Elektrycznej.*

Słowa kluczowe: *badania właściwości magnetycznych, rdzenie zwijane*

1. WSTĘP

W Instytucie Elektrotechniki prowadzone są prace badawcze i projektowe nad przekształtnikami mocy. W zakres tych prac wchodzi m.in. transformatory i dławiki stosowane w przekształtnikach. Do niektórych obliczeń projektowych i symulacyjnych przydatne jest względnie proste odwzorowanie matematyczne charakterystyk rdzeni użytych do budowy powyższych elementów elektromag-

dr inż. Andrzej BUZE, mgr inż. Andrzej MOKROSIŃSKI
mgr inż. Wojciech PSZCZÓŁKOWSKI

e-mail: a.buze@iel.waw.pl

Instytut Elektrotechniki, Zakład Trakcji Elektrycznej

PRACE INSTYTUTU ELEKTROTECHNIKI, zeszyt 261, 2013

netycznych. Zagadnienie to weszło w zakres projektu badawczego w Zakładzie Trakcji Elektrycznej Instytutu Elektrotechniki (ZTE IEL).

Eksperymentalnym i obliczeniowym programem badań objęto poniższe charakterystyki materiałów magnetycznych:

- statyczną charakterystykę magnesowania: $B_o = f(H_o)$;
- dynamiczne charakterystyki magnesowania: $H = f(B_m, f)$, $H_m = f(B_m, f)$;
- charakterystyki względnej przenikalności magnetycznej: $\mu' = f(B_m, f)$;
- charakterystyki stratności: $\Delta p = f(B_m, f)$.

Część eksperymetalną pracy stanowią badania wykonane w laboratorium ZTE IEL na specjalnym stanowisku badawczym, wyposażonym w źródła zasilania o stosownej mocy. Źródła mają w szerokim zakresie regulowane napięcie i częstotliwość, przy praktycznie sinusoidalnym lub prostokątnym napięciu. Część obliczeniowa zaowocowała opracowanym w ZTE programem komputerowym archiwizacji i przetwarzania wyników pomiarów właściwości magnetycznych rdzeni zwijanych. W programie dokonywana jest jednocześnie aproksymacja pomierzonych charakterystyk zależnościami matematycznymi.

Przykładowe wyniki badań i obliczeń, które są przytoczone poniżej, odnoszą się do rdzeni z taśmy amorficznej, względnie z blachy zimnowalcowanej.

2. METODA POMIARÓW

Podane poniżej przykładowe wyniki pomiarów pochodzą z badań rdzeni zwijanych. Każdy badany rdzeń miał nawinięte dwa uzwojenia: prądowe (wzbudzenia) i napięciowe.

Badania przeprowadzono, zasilając uzwojenie wzbudzenia napięciem prostokątnym, bowiem tego rodzaju napięcie występuje najczęściej w przypadku transformatorów i dławików przekształtników mocy. Jako źródło napięcia stosowano falownik o regulowanej częstotliwości. Pomiary były wykonywane przy stałej częstotliwości f i zmiennym przepływie wzbudzenia. Charakterystyki właściwości magnetycznych otrzymano na podstawie pomiarów średniej wartości napięcia uzwojenia napięciowego E_{sr} , wartości skutecznej I , maksymalnej I_m prądu uzwojenia oraz mocy P wydzielanej w rdzeniu.

Do pomiarów był stosowany analizator mocy NORMA 4000.

Uwzględniając liczbę zwojów i wymiary rdzenia, określano amplitudę indukcji magnetycznej B_m jako proporcjonalną do E_{sr} , zaś wartość skuteczną H i amplitudę H_m natężenia pola magnetycznego w proporcji do I bądź I_m prądu

uzwojenia wzbudzenia. Stratność rdzenia p stanowi moc P podzielona przez masę rdzenia. Przenikalność magnetyczna została obliczona na podstawie ilorazu B_m do H_m .

3. CHARAKTERYSTYKA MAGNESOWANIA

Charakterystyka magnesowania materiałów magnetycznych $B = f(H)$ nie ma swojego równania. Jest to przyczyną wielu utrudnień w procesie projektowania elementów obwodów urządzeń elektromagnetycznych, co skutkuje koniecznością stosowania przybliżeń i niejednokrotnie powtarzania procesu rachunkowego.

Spośród wielu wzorów przybliżonych, stosowanych do aproksymacji krzywych magnesowania, najczęściej proponowane są następujące:

$$B = \frac{H}{\alpha + \beta \cdot H} \quad (1)$$

$$H = \sinh(\beta \cdot B) \quad (2)$$

$$B = \sum_{i=1}^n B_i \cdot e^{\alpha_i \cdot H} \quad (3)$$

$$B = \operatorname{tgh}(\alpha \cdot H) \cdot B_o \quad (4)$$

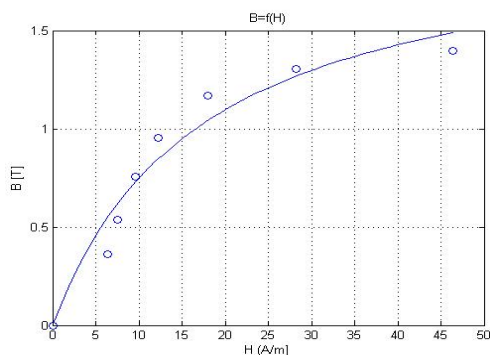
$$H = \alpha_1 \cdot B + \alpha_3 \cdot B^3 + \alpha_5 \cdot B^5 + \dots \quad (5)$$

$$B = \alpha \cdot \operatorname{arctg}(\beta \cdot H) \quad (6)$$

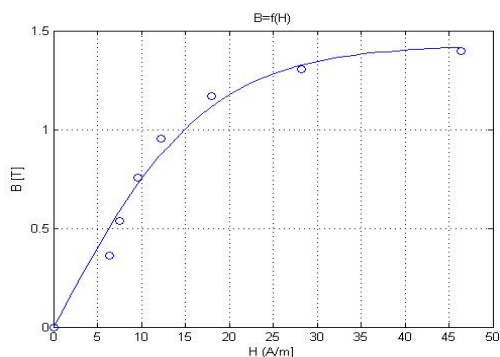
W obliczeniach konwencjonalnych maszyn elektrycznych zasilanych ze źródeł o częstotliwościach przemysłowych, wykorzystywany jest przeważnie fragment charakterystyki magnesowania w obszarze od ok. 0,8 T do 2 T. Nowoczesne materiały magnetyczne miękkie o niskiej stratności ulegają nasyceniu przy indukcji ok. 1,5 T lub 1,2 T.

Na rysunku 1 jest przedstawiona charakterystyka magnesowania rdzenia amorficznego przy częstotliwości $f = 500$ Hz, aproksymowana zależnością (1). Lepsze odwzorowanie (według rysunku 2) uzyskano natomiast, stosując wzór (4). Zależności $H_m = f(B_m)$ otrzymane przy aproksymacji wielomianem drugiego stopnia charakterystyk magnesowania rdzenia z blachy zimnowal-

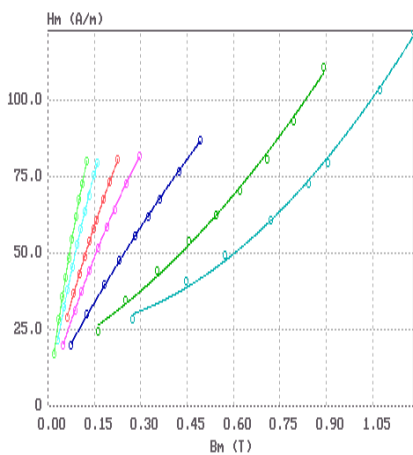
cowanej są podane na rysunku 3. Największą dokładność odwzorowania dają w tym przypadku funkcje sklejane (rys. 4).



Rys. 1. Charakterystyka magnesowania rdzenia amorficznego przy $f = 500$ Hz aproksymowana zależnością: $B = H / (\alpha + \beta H)$; gdzie $\alpha = 0,4626$; $\beta = 0,4892$

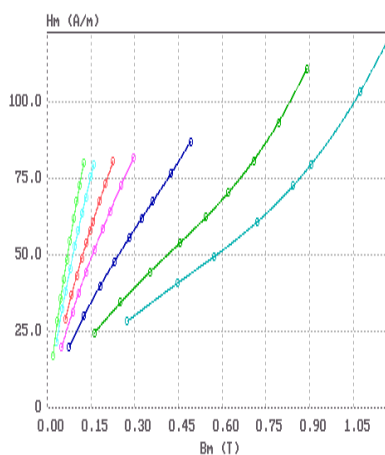


Rys. 2. Charakterystyka magnesowania rdzenia amorficznego przy $f = 500$ Hz aproksymowana zależnością: $B = B_o \cdot \operatorname{tgh}(\alpha H)$; gdzie $B_o = 1,4284$; $\alpha = 0,0582$



$f = 0,6$ (kHz)	$H_m = 24,9 + 0,108 B_m + 68,6 B_m^2$
$f = 1,0$	$H_m = 16,0 + 55,5 B_m + 54,3 B_m^2$
$f = 2,0$	$H_m = 6,52 + 189 B_m + -56,2 B_m^2$
$f = 3,5$	$H_m = 4,39 + 329 B_m + -234 B_m^2$
$f = 5,0$	$H_m = 5,24 + 405 B_m + -323 B_m^2$
$f = 7,5$	$H_m = 4,11 + 574 B_m + -641 B_m^2$
$f = 10,0$	$H_m = 3,39 + 737 B_m + -1018 B_m^2$

Rys. 3. Charakterystyka magnesowania rdzenia M140-30N aproksymowana wielomianem 2-go stopnia



$f = 0,6$ (kHz)	$H_m =$ funkcja sklejana
$f = 1,0$	$H_m =$ funkcja sklejana
$f = 2,0$	$H_m =$ funkcja sklejana
$f = 3,5$	$H_m =$ funkcja sklejana
$f = 5,0$	$H_m =$ funkcja sklejana
$f = 7,5$	$H_m =$ funkcja sklejana
$f = 10,0$	$H_m =$ funkcja sklejana

Rys. 4. Charakterystyka magnesowania rdzenia M140-30N aproksymowana funkcją sklejaną

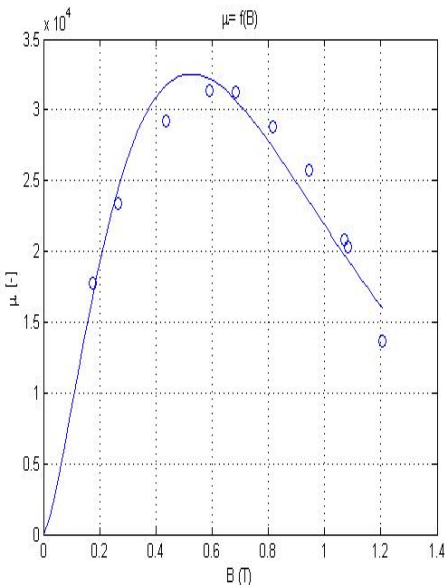
Próby stworzenia funkcji dwóch zmiennych $B_m = f(H, f)$ nie dały satysfakcjonujących rezultatów.

4. WZGLĘDNA PRZENIKALNOŚĆ MAGNETYCZNA

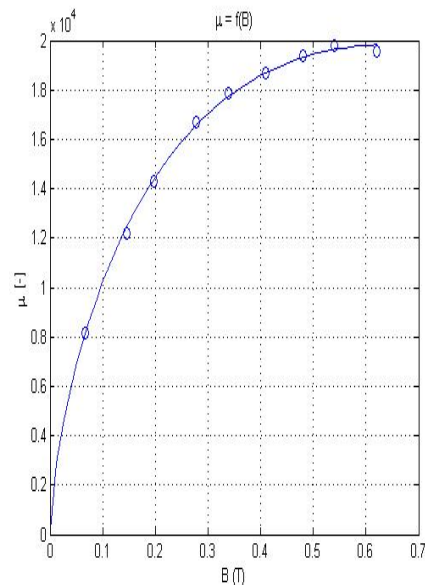
Zależność $\mu' = f(B)$ aproksymowana jest wieloma funkcjami wykładniczymi. W zastosowaniu do rdzenia amorficznego został przyjęty wzór w postaci:

$$\mu' = A \cdot B^\alpha \cdot e^{(\beta \cdot B)} \quad (7)$$

Otrzymane zależności przy częstotliwości 1 kHz oraz 3,5 kHz są przedstawione na rysunkach 5 i 6.



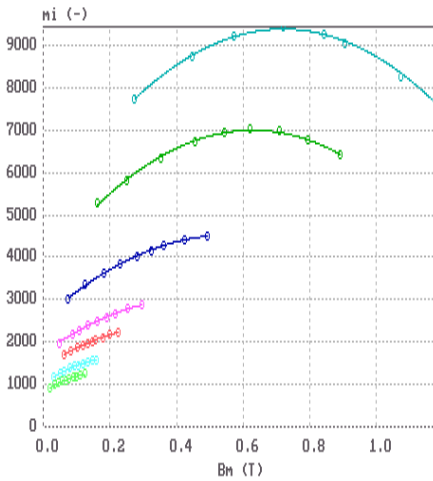
Rys. 5. Przenikalność magnetyczna rdzenia amorficznego przy $f = 1$ kHz aproksymowana zależnością: $\mu' = A \cdot B^\alpha \cdot e^{(\beta \cdot B)}$; gdzie: $A = 4,0315e5$; $\alpha = 1,5305$; $\beta = -2,9157$



Rys. 6. Przenikalność magnetyczna rdzenia amorficznego przy $f = 3,5$ kHz aproksymowana zależnością: $\mu' = A \cdot B^\alpha \cdot e^{(\beta \cdot B)}$; gdzie: $A = 4,9823e4$; $\alpha = 0,6451$; $\beta = -0,988$

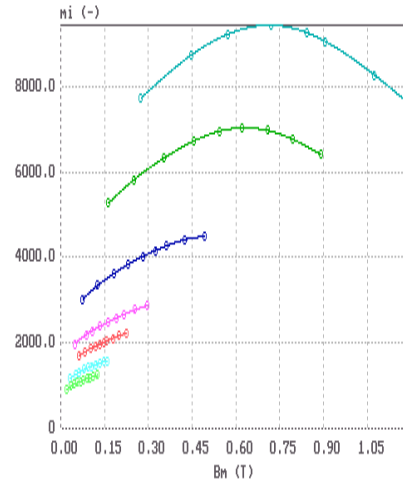
Większa dokładność odwzorowania drugiej z powyższych charakterystyk ma związek z mniejszym zakresem indukcji oraz jego umiejscowieniem w przedziale poza nasyceniem charakterystyki magnesowania.

Wyniki aproksymacji charakterystyki względnej przenikalności magnetycznej rdzenia z blachy zimnowalcowanej wielomianem drugiego stopnia, jak również funkcjami sklejanymi, stanowią wykresy na rysunkach 7 i 8.



$f = 0.6$ (kHz)	$\mu_i = 5083 + 11959 B_m + -8307.7 B_m^2$
$f = 1.0$	$\mu_i = 3780 + 10254 B_m + -8164.6 B_m^2$
$f = 2.0$	$\mu_i = 2540 + 7115 B_m + -6360.9 B_m^2$
$f = 3.5$	$\mu_i = 1735 + 5745 B_m + -6377.2 B_m^2$
$f = 5.0$	$\mu_i = 1416 + 5123 B_m + -6679.8 B_m^2$
$f = 7.5$	$\mu_i = 1025 + 5315 B_m + -11072.6 B_m^2$
$f = 10$	$\mu_i = 814 + 5435 B_m + -16136.2 B_m^2$

Rys. 7. Przenikalność magnetyczna rdzenia M140-30N w funkcji indukcji aproksymowana wielomianem drugiego stopnia

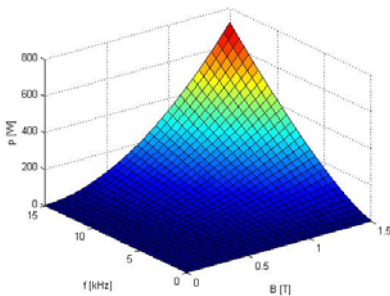


$f = 0.6$ (kHz)	$\mu_i =$ funkcja sklejana
$f = 1.0$	$\mu_i =$ funkcja sklejana
$f = 2.0$	$\mu_i =$ funkcja sklejana
$f = 3.5$	$\mu_i =$ funkcja sklejana
$f = 5.0$	$\mu_i =$ funkcja sklejana
$f = 7.5$	$\mu_i =$ funkcja sklejana
$f = 10.0$	$\mu_i =$ funkcja sklejana

Rys. 8. Przenikalność magnetyczna rdzenia M140-30N w funkcji indukcji aproksymowana funkcją sklejaną

Próby stworzenia funkcji dwóch zmiennych: $\mu' = f(B, f)$ nie dały oczekiwanych dokładności w całym przedziale analizowanych częstotliwości.

5. STRATNOŚĆ



Rys. 9. Straty rdzenia amorficznego aproksymowane zależnością $p = A f^\alpha B^\beta$; $A = 8,5238$; $\alpha = 1,3481$; $\beta = 1,9279$

Stratność jest jednym z podstawowych parametrów rdzeni ferromagnetycznych. W przypadku elementów magnetycznych przekształtników, może mieć ona największe znaczenie przy wymiarowaniu transformatora lub dławika. Stratność jako funkcja dwóch zmiennych ma postać:

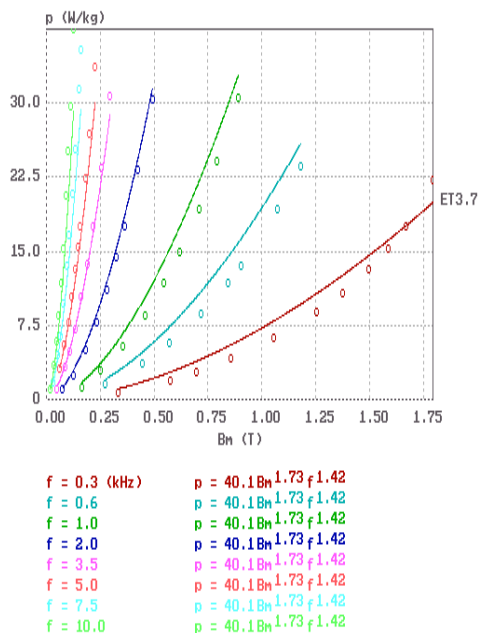
$$\Delta p = A f^\alpha B_m^\beta \quad (8)$$

Jej graficzną formę, odnosząc się do rdzenia amorficznego, przedstawia rysunek 9.

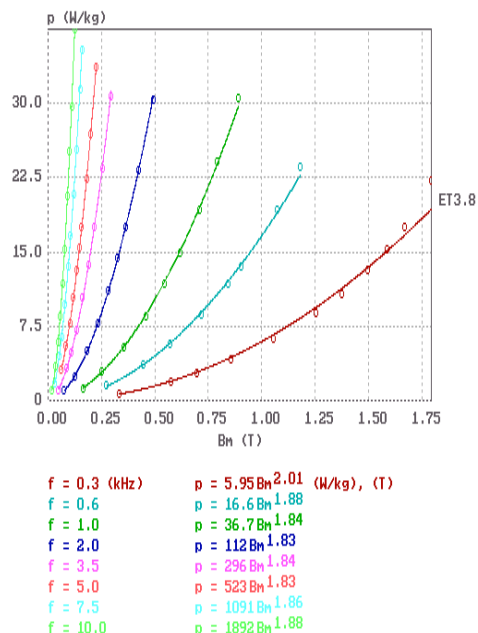
Wyrażając straty w badanym rdzeniu z blachy zimnowalcowanej według zależności (8), zostały przyjęte współczynniki:

$$A = 40,1; \quad \alpha = 1,42; \quad \beta = 1,73$$

Wyznaczona na tej podstawie rodzina funkcji $\Delta p = f(B_m)$ przy $f = 0,3 \div 10$ kHz, figuruje na rysunku 10. Aproksymacja stratności funkcją dwóch zmiennych dała znacznie lepsze wyniki w zakresie wyższych częstotliwości, w porównaniu z niższymi.



Rys. 10. Stratność rdzenia M140-30N w funkcji indukcji aproksymowana funkcją uogólnioną postaci: $p(B, f) = \alpha \cdot B_m^\beta \cdot f^\gamma$



Rys. 11. Stratność rdzenia M140-30N w funkcji indukcji aproksymowana funkcją potęgową postaci: $p(B) = \alpha \cdot B^\beta$

Wyrażnie większą zgodność zależności zmierzonych z aproksymowanymi można uzyskać jeśli stratność wyrazić rodzinami funkcji:

$$\Delta p = A B_m^\beta \tag{9}$$

dla $f = \text{const}$

lub

$$\Delta p = C f^\gamma \quad (10)$$

dla $B_m = \text{const}$

W ogólnym przypadku $A = f(f)$, $\beta = f(f)$ oraz $C = f(B_m)$, $\gamma = f(B_m)$.

Wykresy rodziny funkcji (9) dla rdzenia z blachy zimnowalcowanej są pokazane na rysunku 11. W zakresie częstotliwości od 0,3 kHz do 10 kHz współczynnik A przyjmuje wartości 5,95÷1092, zaś wykładnik potęgi β od 2,01 do 1,83.

W obszarze nasycenia charakterystyki magnesowania odwzorowanie staje się mniej dokładne, gdyż przy $f = \text{const}$, β rośnie wraz ze wzrostem indukcji B_m .

W przypadku zależności (10) wyznaczonych dla rdzenia amorficznego w zakresie $f = 0,3 \div 15$ kHz i $B_m = 0,15 \div 1,2$ T, wartości stosownych współczynników wynoszą: $C = 0,2485 \div 4,2832$; $\gamma = 1,3246 \div 1,8806$.

6. SYSTEM ARCHIWIZACJI I PRZETWARZANIA WYNIKÓW

Cennym efektem wykonanej w ZTE pracy badawczej jest opracowanie programu archiwizacji wyników pomiarów rdzeni i próbek materiałów, ich przetwarzanie, poszukiwanie form analitycznych dla zależności opisujących charakterystyki:

$$\Delta p = f(B_m, f); \quad B_m = f(H_{sk}, f); \quad B_m = f(H_m, f); \quad \mu' = f(B_m, f)$$

oraz dobór funkcji aproksymujących i interpolacja.

Opracowane zostały dwa programy obliczeń realizujące to zadanie:

- program wykorzystujący pakiet MATLABA,
- program wykorzystujący pakiet systemu TURBO PASCALA.

Wyniki pomiarów podane są w formie tabelarycznej dla kilku częstotliwości napięcia źródła zasilania w przedziale np. od 20 Hz do 15000 Hz.

W katalogu *Archiwum* utworzono zbiory źródłowe z rozszerzeniem *pom*, zawierające wyniki badań próbek wraz z niezbędnymi parametrami rdzenia i uzwojenia. Zestawienie wszystkich zbiorów źródłowych jest udostępnione w postaci menu na ekranie. Na podstawie wyżej wymienionych danych program

wyznacza charakterystyki $F(B_m)$ i zapisuje je w zbiorach o rozszerzeniu *ob1*. Powstaje również uporządkowana rosnąco wersja zbioru źródłowego z rozszerzeniem *sor*. Zbiory *sor* i *ob1* są dostępne z poziomu programu. Aby uzyskać żadaną krzywą lub ich rodzinę należy wybrać rodzaj funkcji aproksymującej:

- potęgowa:

$$p, H, H_m, \mu'(B) = \alpha \cdot B^\beta \quad (11)$$

- wielomian drugiego stopnia:

$$p, H, H_m, \mu'(B) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot B + \alpha_2 \cdot B^2 \quad (12)$$

- uogólnioną:

$$p(B, f) = \alpha \cdot B^\beta \cdot f^\gamma \quad (13)$$

- potęgowo-wykładniczą:

$$\mu'(B) = \alpha \cdot B^\beta \cdot e^{\gamma \cdot B} \quad (14)$$

- sklejaną (zbiór wielomianów 3-go stopnia).

Przy aproksymacji funkcją sklejaną obszar analizy jest ograniczony punktami pomiarowymi. Dla pozostałych funkcji można, w razie potrzeby, dowolnie go poszerzać poza granice wyznaczone ostatnim – dla danej krzywej lub rodziny krzywych – punktem pomiarowym. Obszar analizy wpływa na liczbę punktów stanowiących później podstawę do aproksymacji funkcją typu $F(f)$. Rodzaje funkcji aproksymującej wyszczególnione powyżej obowiązują przy charakterystykach $F(B)$, jak również $F(f)$.

Wzory funkcji aproksymujących z wyjątkiem funkcji sklejanej są otrzymywane metodą najmniejszych kwadratów i obliczane analitycznie.

7. WNIOSKI

1. W ZTE został opracowany program komputerowy do archiwizacji i przetwarzania wyników pomiarów właściwości magnetycznych. Jest on przeznac-

czony do gromadzenia wyników badań rdzeni lub próbek materiałów ferromagnetycznych na potrzeby prac projektowych i badawczych dotyczących transformatorów i dławików stosowanych w przekształtnikach mocy. Program umożliwia sprawny odczyt parametrów H , H_m , μ' , Δp przy zadanych wartościach indukcji magnetycznych i częstotliwości. Jednocześnie dokonywana jest aproksymacja charakterystyk właściwości magnetycznych zależnościami matematycznymi.

2. Wystarczająco dokładne odwzorowanie charakterystyk magnesowania uzyskuje się poniżej stanu nasycenia. W tym obszarze pracują zazwyczaj elementy elektromagnetyczne przekształtników mocy. Dobre rezultaty uzyskuje się wówczas stosując wielomian drugiego stopnia. Przykłady odwzorowań charakterystyk właściwości magnetycznych rdzeni z blachy zimnowalcowanej oraz taśmy amorficznej są podane powyżej w formie wykresów. Stratność udaje się nawet aproksymować funkcją uogólnioną.

3. W całym zakresie stosowania materiałów do 2 T i powyżej, najlepszy efekt ze względu na dokładność odwzorowania daje funkcja sklejana, choć niedogodnością jest ograniczenie obszaru analizy (niemożność ekstrapolowania krzywej) oraz brak prostego wzoru opisującego krzywą analitycznie. Na podstawie dotychczas przeprowadzonych obliczeń można wnioskować, że funkcja sklejana jest najbardziej pożądana przy odwzorowaniach $\mu'(B)$ oraz $H(B)$, ponieważ w tym przypadku aproksymacja funkcjami analitycznymi jest najmniej zadowalająca.

LITERATURA

1. Mrozek B., Mrozek Z.: MATLAB 5.x SIMULINK 2.x, Warszawa, 1998.
2. Cholewicki T.: Analiza obwodów elektrycznych, WNT, Warszawa, 1962.
3. Dąbrowski M.: Pola i obwody magnetyczne maszyn elektrycznych, WNT, Warszawa, 1971.
4. Dąbrowski M.: Analiza obwodów magnetycznych. Straty mocy w obwodach, PWN, 1981.
5. Soiński M.: Materiały magnetyczne w technice, Biblioteka COSiW SEP.
6. Lejtes Ł.W.: Elektromagnitnye rasčety transformatorow i reaktorow, Energija, Moskwa, 1981.
7. Buze A., Zieliński A.: Właściwości magnetyczne rdzeni zwijanych przy sinusoidalnym i prostokątnym napięciu wzbudzenia, VIII Sympozjum Pomiarów magnetycznych, 2006.

APPROXIMATION OF CHARACTERISTICS
OF MAGNETIC CORES

Andrzej BUZE
Andrzej MOKROSIŃSKI
Wojciech PSZCZÓŁKOWSKI

ABSTRACT *A relatively simple mathematical projection of characteristics of magnetic materials is useful in some simulation design computations. The paper discusses trials mode to obtain formulae determining static and dynamic characteristics of magnetising, lossiness and magnetic permeability of wound up cores. A comprehensive basis of experimental investigation results was used therefore, conducted at the specialized laboratory of the Department of Electric Traction.*

Keywords: *magnetic characteristics test, wound up cores*

