Zeszyty Naukowe Wydziału Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej Nr 53

*XVIII Konferencja Naukowa*

*AKTUALNE PROBLEMY W ELEKTROENERGETYCE APE'17*

Jastrzębia Góra, 7-9 czerwca 2017

# PROBABILISTYCZNA ANALIZA NAPIĘĆ WĘZŁOWYCH W SIECI NISKIEGO NAPIĘCIA Z FOTOWOLTAICZNMI MIKROINSTALACJAMI

**Marian SOBIERAJSKI**

1. Miejsce pracy: Politechnika Wrocławska, Wydział Elektryczny, tel.: 48 71 320 44 22 e-mail: marian.sobierajski@pwr.edu.pl

**Streszczenie:** W sieci niskiego napięcia coraz częściej przyłączane są mikroinstalacje fotowoltaiczne. Wytwarzanie mocy przez ogniwa fotowoltaiczne zależy od losowych warunków pogodowych, dlatego na etapie planowania moce czynne wprowadzane do sieci przez mikroinstalacje fotowoltaiczne mogą być traktowane jako wielowymiarowa zmienna losowa o równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa. Natomiast wytwarzane moce bierne mikroinstalacji zależą od zadanego współczynnika mocy i dlatego powinny być traktowane jako wielowymiarowa funkcja losowych wytwarzanych mocy czynnych. W sieci niskiego napięcia, obok mocy wytwarzanych przez mikroinstalacje, występują pobory mocy czynnych i biernych. Na etapie planowania, moce odbierane mogą być również traktowane jako wielowymiarowa zmienna losowa o równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa. Z powyższych powodów, bilans mocy w węzłach sieci niskiego napięcia jest również funkcją wielowymiarowych zmiennych losowych.

W pracy przedstawiony zostanie probabilistyczny linearyzowany model wyznaczania losowych napięć węzłowych w sieci niskiego. Po obliczeniu wartości oczekiwanych i odchyleń standardowych można wyznaczyć prawdopodobieństwa pozostawania napięć w poszczególnych węzłach sieci w dopuszczalnych przedziałach.

**Słowa kluczowe:** sieć niskiego napięcia, mikroinstalcje fotowoltaiczne, probabilistyczna analiza

## 1. WPROWADZENIE

W sieci niskiego napięcia coraz częściej przyłączane są mikroinstalacje fotowoltaiczne (*PV*). Na Rys. 1 pokazano przykładową sieć zasilaną z *GPZ 110 kV*, w której w poszczególnych sieciach niskiego napięcia połączonych z magistralami SN występuje duża liczbą mikroinstalacji *PV*. W rezultacie moc może płynąć zarówno z *GPZ* do punktów transformatorowych *SN/nn* jak i odwrotnie. W konsekwencji moc w transformatorze w *GPZ 110kV/SN* może zmieniać kierunek, zależnie od warunków pogodowych. Dzieje się tak, ponieważ w dowolnym węźle sieci niskiego napięcia z dużą liczbą mikroinstalacji może wystąpić zarówno moc odbierana jak i generowana.

Moc wytwarzana przez ogniwa fotowoltaiczne zależy od losowych warunków pogodowych. Im dłuższy okres czasu wyprzedzający planowane warunki pracy sieci, tym większe błędy prognoz pogodowych i tym większa niepewność generacji. Pesymistyczne podejście nakazuje rozważać jako jednakowo prawdopodobne wartości między minimalną i maksymalną wartością. Zasadne wydaje się być traktowanie na etapie planowania generowanych mocy w sieci niskiego napięcia jako wielowymiarowej zmiennej losowej o równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa [1,2]. Natomiast moce bierne wytwarzane przez mikroinstalacje zależą od zadanego współczynnika mocy. Z tego powodu mogą być traktowane jako wielowymiarowa funkcja losowych wytwarzanych mocy czynnych [1,2].

W sieci niskiego napięcia, obok mocy wytwarzanych przez mikroinstalacje, występują pobory mocy czynnych i biernych. Na etapie planowania z dużym okresem wyprzedzenia, moce czynne odbierane mogą być również traktowane jako wielowymiarowe zmienne losowe o równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa, natomiast moce bierne odbierane jako funkcja wielowymiarowej zmiennej losowe. Zwykle, pobór mocy biernej nie powinien przekraczać dopuszczalnego tangensa mocy *0,4*.

## 2. DETERMINISTYCZNY ROZPŁYW MOCY

Między mocami i napięciami węzłowymi występują nieliniowe zależności wynikające z praw Ohma i Kirchhoffa. W układzie składowych prostokątnych napięć węzłowych są to zależności kwadratowe:

$$P_i = U_i^2 G_{ii} + \sum (G_{ij} K_{ij} + B_{ij} L_{ij}) \tag{1}$$

$$Q_i = -U_i^2 B_{ii} + \sum (-B_{ij} K_{ij} + G_{ij} L_{ij}) \tag{2}$$

$$K_{ij} = e_i e_j + f_i f_j \tag{3}$$

$$L_{ij} = -e_i f_j + f_i e_j \tag{4}$$

gdzie:
$P_i = P_{Gi} - P_{Li}$ – węzłowa moc czynna w węźle *i*,
$Q_i = Q_{Gi} - Q_{Li}$ – węzłowa moc i bierna w węźle *i*,
$U_i = \sqrt{e_i^2 + f_i^2}$ – nieznana wartość skuteczna napięcia w węźle *i*,
$e_i$, $f_i$ – składowa rzeczywista i urojona napięcia w węźle *i*,
$G_{ij}$, $B_{ij}$ – konduktancja i susceptancja węzłowa wzajemna,
$G_{ii}$, $B_{ii}$ – konduktancja i susceptancja węzłowa własna.

Węzłem bilansującym sieci jest sieć zewnętrzna 110 kV. Układ równań dla całej sieci może być rozwiązany iteracyjnie dla zadanych węzłowych mocy czynnych i biernych generowanych i odbieranych. Wyliczone napięcia muszą się mieścić w dopuszczalnych przedziałach. W przypadku szybkich zmian napięć powodowanych nagłym wyłączeniem mikroinstalacji zmiany napięć powinny być mniejsze od *3%* [3].

W ogólności linie napowietrzne i kablowe średniego i niskiego napięcia mogą być modelowane w postaci dwójników bez pojemności poprzecznych lub czwórników z pojemnościami poprzecznymi, zależnie od dostępności danych. W przypadku linii kablowych wskazane jest uwzględnienie pojemności kabli, co oznacza, że linie te powinny być modelowane w postaci czwórników.

W stacji *GPZ 110kV/SN* występuje transformator z regulowaną przekładnią pod obciążeniem. Również w punktach transformatorowych *SN/nn* z dużą liczbą przyłączonych mikroinstalacji można instalować transformatory z regulowaną przekładnią pod obciążeniem, np. w Niemczech. Ze względu na występowanie kilku poziomów napięć konieczne jest prowadzenie obliczeń w jednostkach względnych odniesionych do wspólnej mocy bazowej, np. *100 MVA* oraz do napięć znamionowych poszczególnych sieci. Uwzględnienie wpływu zmiany przekładni zwojowej na parametry zastępcze transformatora uzyskuje się wprowadzając do schematu zastępczego po stronie węzła początkowego idealny transformator o zmiennej przekładni *t*. Należy zauważyć, że zmiana przekładni transformatora powoduje zmianę zespolonych admitancji własnych i wzajemnych w węzłach sieci łączących się węzłami początku i końca transformatora. Fakt ten musi uwzględniony w trakcie iteracyjnego rozwiązywania układu równań węzłowych rozpływu mocy (1, 2).

Moc wytwarzana przez ogniwa fotowoltaiczne zależy od losowych warunków pogodowych. Im dłuższy okres czasu wyprzedzający planowane warunki pracy sieci, tym większe błędy prognoz pogodowych i tym większa niepewność generacji. Pesymistyczne podejście nakazuje rozważać jako jednakowo prawdopodobne wartości między minimalną i maksymalną wartością. Zasadne wydaje się być traktowanie na etapie planowania generowanych mocy w sieci niskiego napięcia jako wielowymiarowej zmiennej losowa o równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa. Natomiast moce bierne wytwarzane przez mikroinstalacje zależą od zadanego współczynnika mocy. Z tego powodu mogą być traktowane jako wielowymiarowa funkcja losowych wytwarzanych mocy czynnych.

Podobnie, na etapie planowania czynne moce odbiorów mogą być traktowane jako wielowymiarowe zmienne losowe o równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa, a moce bierne - jako funkcje tych zmiennych losowych, gdyż tangens mocy odbiorów nie powinien przekroczyć dopuszczalnej wartości 0,4.

## 3. PROBABILISTYCZNY ROZPŁYW MOCY

W dowolnym węźle badanej sieci zasilanej z *GPZ 110kV/SN* mogą wystąpić zarówno odbierane jak i generowane moce w przedziałach od minimalnej do maksymalnej wartości. W przypadku generacji mamy:

$$P_{G\,min} \le P_G \le P_{G\,max} \tag{5}$$

$$Q_G = P_G tg\varphi_G \tag{6}$$

Podobnie moce czynne odbierane wynikają z maksymalnego i minimalnego zapotrzebowania:

$$P_{L\,min} \le P_L \le P_{L\,max} \tag{7}$$

$$Q_L = P_L tg\varphi_L \tag{8}$$

Na etapie planowania można przyjąć, że każda z wartości mocy czynnej jest jednakowo prawdopodobna w przedziale od *min* do *max*, czyli moc czynna podlega prostokątnemu rozkładowi prawdopodobieństwa.

W oparciu o minimalną i maksymalną wartość mocy czynnej można wyznaczyć jej wartość oczekiwaną i wariancję. Moc generowana w węźle zależy od warunków pogodowych, ale jest niezależna od mocy pobieranej przez odbiorniki, co oznacza, że są to niezależne zmienne losowe o rozkładzie prostokątnym. W ogólnym przypadku w dowolnym węźle mamy:

- wartość oczekiwana mocy węzłowej

$$m_P = \frac{P_{G\,min} + P_{G\,max}}{2} - \frac{P_{L\,min} + P_{L\,max}}{2} \tag{9}$$

- wariancja mocy węzłowej

$$var_P = \frac{(P_{G\,max} - P_{G\,min})^2}{12} + \frac{(P_{L\,max} - P_{L\,min})^2}{12} \tag{10}$$

Cała sieć jest opisana przez podanie wektora wartości oczekiwanych i macierzy kowariancji węzłowych mocy czynnych:

- wektor wartości oczekiwanych węzłowych mocy

$$m_P = \begin{bmatrix} m_{PG1} \\ m_{PG2} \\ . \\ m_{PGn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_{PL1} \\ m_{PL2} \\ . \\ m_{PLn} \end{bmatrix} = m_{PG} - m_{PL} \tag{11}$$

- macierz kowariancji węzłowych mocy czynnych

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_P = & \begin{bmatrix} var_{PG1} & & & \\ & var_{PG2} & & \\ . & . & . & . \\ & & & var_{PGn} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} var_{PL1} & & & \\ & var_{PL2} & & \\ . & . & . & . \\ & & & var_{PLn} \end{bmatrix} = \boldsymbol{M}_{PG} + \boldsymbol{M}_{PL} \end{aligned} \tag{12}$$

Macierz kowariancji jest diagonalna, ponieważ moce węzłowe są niezależnymi zmiennymi losowymi.

Wektor wartości oczekiwanych węzłowych mocy biernych jest liniowo związany z wektorem wartości oczekiwanych węzłowych mocy czynnych, ponieważ znany jest tangens mocy generowanej i odbieranej w węźle:

$$\boldsymbol{m_Q = diag(tg\,\varphi_{PG})m_{PG} - diag(tg\,\varphi_{PL})m_{PL}} \tag{13}$$

Ogólnie wektor wartości oczekiwanych mocy węzłowych jest znany i ma postać:

$$\boldsymbol{m}_y = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_P \\ \boldsymbol{m}_Q \end{bmatrix} \tag{14}$$

W celu wyznaczenia rozkładu prawdopodobieństwa oraz wartości oczekiwanych i wariancji nieznanych napięć węzłowych konieczna jest linearyzacja równań węzłowych:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g(x)} \tag{15}$$

gdzie:

$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{Q} \end{bmatrix}$ – wektor znanych węzłowych mocy,

$\boldsymbol{P}$ – wektor węzłowych mocy czynnych,

$\boldsymbol{Q}$ – wektor węzłowych mocy biernych,

$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{f} \end{bmatrix}$ – wektor nieznanych węzłowych napięć,

$\boldsymbol{e}$ – wektor składowych rzeczywistych napięć węzłowych,

$\boldsymbol{f}$ – wektor składowych urojonych napięć węzłowych,

$\boldsymbol{g}$ – funkcja kwadratowa.

Funkcja kwadratowa może być rozwinięta w skończony szereg Taylora w otoczeniu punktu wyznaczonego przez nieznane wartości oczekiwane napięć węzłowych:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g(m_x)} + \boldsymbol{A}\Delta x + \boldsymbol{0.5}\Delta x^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{H}\Delta x \tag{16}$$

gdzie:

$\boldsymbol{m}_x = \boldsymbol{Ex}$ – wektor nieznanych wartości oczekiwanych węzłowych napięć,

$\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}_x$ – odchylenia napięć węzłowych od wartości oczekiwanych,

$\boldsymbol{A}$ – macierz Jacobiego wyznaczona w punkcie $\boldsymbol{m}_x$,

$\boldsymbol{H}$ – macierz drugich pochodnych cząstkowych.

W przypadku kilkuprocentowych odchyleń napięć węzłowych składnik nieliniowy w szeregu Taylora ma wartość pomijalnie małą:

$$0.5\ \Delta\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\ \boldsymbol{H}\ \Delta\boldsymbol{x} \approx 0 \tag{17}$$

W rezultacie mamy:

$$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{g(m_x)} = \boldsymbol{A(x-m_x)} \tag{18}$$

$$\Delta\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\ \Delta\boldsymbol{x} \tag{19}$$

gdzie:

$\Delta\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{m}_y$ – wektor odchyleń mocy węzłowych od wartości oczekiwanych,

Nieznane wartości oczekiwane węzłowych napięć mogą być wyznaczone tylko iteracyjnie według następującej formuły:

$$\boldsymbol{m}_{xnowe} = \boldsymbol{m}_x + \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{-[m_y - g(m_x)]} \tag{20}$$

Proces iteracyjny trwa do uzyskania założonej dokładności obliczeń.

Między odchyleniami mocy węzłowych i odchyleniami napięć węzłowych istnieje zależność liniowa:

$$\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\ \Delta\boldsymbol{y} \tag{21}$$

Wektor odchyleń mocy węzłowych od wartości oczekiwanych zawiera w sobie odchylenia mocy czynnych i biernych generowanych oraz odbieranych:

$$\Delta\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{diag(tg\,\varphi_{PG})} \end{bmatrix} \Delta\,\boldsymbol{y}_{PG} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{diag(tg\,\varphi_{PL})} \end{bmatrix} \Delta\,\boldsymbol{y}_{PL} \tag{22}$$

gdzie $\boldsymbol{I}$ oznacza diagonalną macierz jedynkową.

W konsekwencji losowe odchylenia węzłowych napięć zależą od losowych odchyleń węzłowych mocy czynnych generowanych i odbieranych:

$$\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{diag(tg\,\varphi_{PG})} \end{bmatrix} \Delta\,\boldsymbol{y}_{PG} - \boldsymbol{A}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{diag(tg\,\varphi_{PL})} \end{bmatrix} \Delta\,\boldsymbol{y}_{PL} = \boldsymbol{C}_{PG}\Delta\,\boldsymbol{y}_{PG} - \boldsymbol{C}_{PL}\Delta\,\boldsymbol{y}_{PL} \tag{23}$$

gdzie:

$$\boldsymbol{C}_{PG} = \boldsymbol{A}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{diag(tg\,\varphi_{PG})} \end{bmatrix} \tag{24}$$

$$\boldsymbol{C}_{PL} = \boldsymbol{A}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{diag(tg\,\varphi_{PL})} \end{bmatrix} \tag{25}$$

Wartości oczekiwane odchyleń napięć węzłowych od wartości oczekiwanych są zerowe:

$$\boldsymbol{E}\Delta\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{E(x - m_x)} = \boldsymbol{Ex} - \boldsymbol{m}_x = \boldsymbol{m}_x - \boldsymbol{m}_x = \boldsymbol{0} \tag{26}$$

Macierz kowariancji odchyleń napięć węzłowych wynika z własności liniowego przekształcenia zmiennych losowych i wynosi [4]:

$$\boldsymbol{M}_x = \boldsymbol{C}_{PG}\boldsymbol{M}_{PG}\boldsymbol{C}_{PG}^{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{C}_{PL}\boldsymbol{M}_{PL}\boldsymbol{C}_{PL}^{\boldsymbol{T}} \tag{27}$$

Rozkład prawdopodobieństwa węzłowych napięć jest zbliżony do wielowymiarowego rozkładu normalnego, ponieważ jest sumą niezależnych rozkładów prostokątnych. W praktyce inżynierskiej posługujemy się wartościami skutecznymi napięć węzłowych. Między składowymi prostokątnymi i wartością skuteczną napięcia istnieje zależność nieliniowa. Po linearyzacji wokół wartości oczekiwanych otrzymujemy:

$$m_U = \sqrt{m_e^2 + m_f^2} \tag{28}$$

$$\Delta U = \frac{m_e}{m_U}\Delta e + \frac{m_f}{m_U}\Delta f \tag{29}$$

gdzie:

$m_e = Ee$ - wartość oczekiwana składowej rzeczywistej napięcia węzłowego,

$m_f = Ef$ - wartość oczekiwana składowej urojonej napięcia węzłowego.

W zapisie macierzowym dla całej sieci mamy:

$$\boldsymbol{\Delta U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{diag(} m_e/m_U \boldsymbol{)} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{diag(} m_f / m_U \boldsymbol{)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Delta e} \\ \boldsymbol{\Delta f} \end{bmatrix} = \boldsymbol{K \Delta x} \tag{30}$$

gdzie $\boldsymbol{K}$ oznacza macierz przekształcenia odchyleń składowych prostokątnych napięć węzłowych w odchylenia wartości skutecznych tych napięć.

Macierz kowariancji wartości skutecznych napięć węzłowych w całej sieci wynosi:

$$\boldsymbol{M_U} = \boldsymbol{K\, M_x K^T} \tag{31}$$

Liniowe przekształcenie zmiennych losowych o rozkładzie normalnym daje wynikowy rozkład normalny. Pozwala to wyliczyć prawdopodobieństwa pozostawania wartości skutecznych napięć węzłowych w dopuszczalnych przedziałach w oparciu o tablice rozkładu normalnego [4]:

$$p_U = P\{U_{min} \le U \le U_{max}\} = F(\tau_{max}) - F(\tau_{min}) \tag{32}$$

gdzie F oznacza całkę Laplace'a daną wzorem:

$$F(\tau) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\tau} exp(-\tau^2/2)dz \tag{33}$$

Zmienna losowa $\tau$ jest standaryzowaną zmienna losową

$$\tau = (U - m_U)/\sigma_U \tag{34}$$

gdzie $\sigma_U = \sqrt{var_U}$ oznacza odchylenie standardowe wartości skutecznej napięcia, a $var_U$ - wariancję wartości skutecznej napięcia, równą odpowiedniemu elementowi na diagonali macierzy kowariancji $\boldsymbol{M_U}$ .

## 5. UWAGI KOŃCOWE

1. Wytwarzanie mocy przez ogniwa fotowoltaiczne zależy od losowych warunków pogodowych, dlatego na etapie planowania moce czynne wprowadzane do sieci przez mikroinstalacje fotowoltaiczne mogą być traktowane jako zmienne losowe o równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa.
2. Wytwarzane moce bierne mikroinstalacji zależą od zadanego współczynnika mocy i dlatego powinny być traktowane jako funkcje losowych wytwarzanych mocy czynnych.
3. W sieci niskiego napięcia, obok mocy wytwarzanych przez mikroinstalacje, występują pobory mocy czynnych i biernych. Na etapie planowania, moce odbierane podobnie jak wytwarzane mogą być również traktowane jako wielowymiarowa zmienna losowa o równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa.
4. W pracy przedstawiono linearyzowany model wyznaczania losowych napięć węzłowych w sieci niskiego. Po obliczeniu wartości oczekiwanych i odchyleń standardowych można wyznaczyć prawdopodobieństwa pozostawania napięć sieci w dopuszczalnych przedziałach.

## 6. BIBLIOGRAFIA


1. Sobierajski M., 1978, A method of stochastic load flow calculations, Arch. f. Elektr., No. 1, 71-75, 1978.
2. Sobierajski M., Rojewski W., The probabilistic study of voltage problems in lightly loaded medium voltage power system connected with small CHP generators, Proceedings CIRED 2003, Barcelona, 12-15 May 2003, paper 4.67, 2003.
3. Hanzelka Z., Jakość dostawy energii elektrycznej. Zaburzenia wartości skutecznej napięcia. Wydawnictwa AGH, Kraków 2013.
4. Plucińska A, Pluciński E, Rachunek prawdopodobieństwa. Statystyka matematyczna. Procesy stochastyczne, WNT, Warszawa 2000.


# PROBABILISTIC ANALYSIS OF THE NODE VOLTAGES IN LOW VOLTAGE NETWORK WITH PHOTOVOLTAIC MICROINSTALLATIONS


In low voltage networks increasingly are connected photovoltaic microinstallations. Power generation by solar cells depends on the random weather conditions, so the planned active generation can be treated as a multidimensional random variable with rectangular probability distribution. The reactive generation depends on the specified power coefficients and should therefore be treated as a multidimensional function of random active generation. In the low voltage network, in addition to active generation, are the active and reactive node loads, which also can be treated as a multidimensional random variable with a rectangular probability distribution. For the above reasons, the balance of power in the nodes of the low voltage network is a function of multidimensional random variables. The paper presents a probabilistic model for computing a random voltage at a node of the low voltage network. After computing expected values and standard deviations, the probability of remaining voltages within acceptable ranges can be calculated.



**Keywords:** low voltage network, photovoltaic microinstallations, probabilistic analysis.


.