



Propagacja nieliniowych plastycznych fal naprężenia w półnieskończonym pręcie

EDWARD WŁODARCZYK, MARCIN SARZYŃSKI

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Mechatroniki i Lotnictwa,
00-908 Warszawa, ul. gen. S. Kaliskiego 2,
edward.wlodarczyk@wat.edu.pl, marcin.sarzyński@wat.edu.pl

Streszczenie. W pracy zaproponowano opis modelowy propagacji podłużnych nieliniowych plastycznych fal naprężenia w półnieskończonym cienkim pręcie lub alternatywnie w drucie. Materiał pręta w zakresie odkształceń plastycznych charakteryzuje się nieliniowym wzmocnieniem z malejącym modułem wzmocnienia. Czołowy koniec pręta (drułu) jest uruchomiony nagle do prędkości V_1 i następnie przemieszcza się ruchem jednostajnym. Przedstawiono ogólne analityczne rozwiązanie problemu we współrzędnych Lagrange'a (opis materialny) i Eulera (opis przestrzenny). Przeprowadzono fizyczną interpretację wyników uzyskanych za pomocą metod Lagrange'a i Eulera. Praca może być wykorzystana w charakterze wstępnej lektury, między innymi przez studentów, doktorantów i inżynierów-konstruktorów zajmujących się aktualną nieliniową dynamiką plastyczności i jej zastosowaniami.
Słowa kluczowe: dynamiczna plastyczność, kontinuum nieliniowe, podłużne plastyczne fale naprężenia
DOI: 10.5604/01.3001.0009.9303

1. Wprowadzenie

Od drugiej połowy ubiegłego wieku ciągle rośnie zainteresowanie dynamicznymi zagadnieniami teorii plastyczności i efektami rozprzestrzeniania się fal naprężenia w ośrodkach ciągłych. Już w 1953 roku problematyka ta pojawiła się w monografii poświęconej falam naprężenia [1], a następnie stała się przedmiotem rozważań zamieszczonych w wielu opracowaniach monograficznych [2-13]. Potrzeba prowadzenia takich badań wynika między innymi z zapewnienia niezawodności działania różnych części maszyn i obiektów specjalnego przeznaczenia, narażonych na dynamiczne obciążenia w warunkach ekstremalnych.

Wysiłki badaczy rozpatrujących te zagadnienia skoncentrowały się w dużej mierze na opracowaniu związków konstytutywnych w oparciu o zjawiska towarzyszące propagacji fal plastycznych w ośrodkach stałych, np. w metalach. W licznych eksperymentach przeprowadzonych przez wielu badaczy wykazano, że w niektórych metalach obciążonych udarowo stan plastyczny osiągany jest przy znacznie większym naprężeniu niż dla obciążenia statycznego. Zjawisko to zauważone zostało po raz pierwszy przez J. Hopkinsona [14] i jego syna, B. Hopkinsona [15]. Autorzy tych prac wykazali, że dynamiczna granica plastyczności dla niektórych stali jest prawie dwa razy większa od granicy statycznej.

Ważne miejsce w tych zagadnieniach zajmuje uderzeniowy test Taylora. W 1948 r. G.I. Taylor opracował jednowymiarową teorię plastycznych odkształceń płasko zakończonoego, długiego pręta po prostopadłym uderzeniu nim w nieodkształcalną przegrodę (płytkę) [16]. Pozwala ona za pomocą geometrycznych pomiarów odzyskanego po udarze odkształconego pręta oszacować w przybliżeniu dynamiczną granicę plastyczności jego materiału. Obszerną eksperymentalną ilustrację metody przedstawiono w [17].

Prezentowany aktualnie w literaturze pogląd wskazuje, że jednowymiarowa teoria Taylora charakteryzuje się pewnymi brakami w dokładnym szacowaniu dynamicznej granicy plastyczności, szczególnie w przypadku dużych prędkości uderzenia. Z tej przyczyny wielu badaczy koreluje wyniki eksperymentalne z nowoczesnymi analizami komputerowymi, które umożliwiają stosowanie skomplikowanych postaci równań konstytutywnych opisujących materiał pręta [12]. Za pomocą tych programów można aproksymować uzyskane podczas badań geometryczne wymiary próbki i dość dokładnie określić dynamiczne właściwości jej materiału. Wadą metod komputerowych jest znaczny koszt programów i to, że bardzo często wymagają one dużo czasu do ich realizacji.

Pomimo dużych możliwości współczesnych technik obliczeniowych, proste jednowymiarowe teorie inżynierskie, dające możliwość analitycznych rozwiązań, nie straciły na znaczeniu. Takie teorie dają często badaczom możliwość wglądu we wzajemne oddziaływania fizycznych parametrów badanego problemu i ich relację do wyniku analizowanego zdarzenia. Te wzajemne oddziaływania są często trudne do określenia za pomocą obliczeń komputerowych. Ponadto, proste teorie inżynierskie dostarczają również podstaw do projektowania eksperymentów i fizycznej interpretacji ich wyników.

Większość analitycznych rozwiązań zagadnień granicznych prezentujących propagację sprężysto-plastycznych fal naprężenia jest opisana liniowymi równaniami różniczkowymi, w których zakłada się, że amplituda odkształcenia jest dostatecznie mała. Natomiast zagadnienia rozprzestrzeniania się fal plastycznych ze skończonymi odkształceniami w ośrodkach nieliniowych są ekstremalnie trudne i dlatego uzyskano niewiele analitycznych rozwiązań z tego zakresu. Znane są analityczne rozwiązania propagacji podłużnych nieliniowych fal plastycznych w cienkim pręcie lub drucie

obciążonych udarowo. Problem rozwiązano w opisie materialnym (H. Kolsky [1] i X.A. Rachamatulin [9]) oraz w opisie przestrzennym (G.I. Taylor [18] i [19], H. Kolsky [1]). W niniejszej pracy dokonano analizy tych opracowań ze szczególnym zwróceniem uwagi na fizyczną interpretację uzyskanych wyników za pomocą opisów: materialnego (współrzędne Lagrange'a) i przestrzennego (współrzędne Eulera).

2. Sformułowanie problemu i założenia

Rozpatrzmy propagację podłużnych, sprężysto-plastycznych fal naprężenia w cienkim półnieskończonym pręcie lub alternatywnie w drucie. Koniec pręta (druetu) jest nagle uruchomiony w chwili $t = 0$ do prędkości V_1 i następnie przemieszcza się ruchem jednostajnym w okresie $t > 0$, powodując jego rozciąganie. Zakłada się, że związek naprężenie-odkształcenie, $\sigma - \varepsilon$, charakteryzujący materiał pręta (druetu), jest liniowy do granicy sprężystości, $\sigma = \sigma_s$, natomiast dla $\sigma > \sigma_s$ jest jednoznacznie nieliniową funkcją odkształcenia, $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, przy czym pochodna $d\sigma/d\varepsilon$ maleje wraz ze wzrostem ε . Poza tym funkcja $\sigma(\varepsilon)$ nie zależy od szybkości obciążenia. Ponadto przyjmuje się, że pole poprzecznego przekroju pręta jest dostatecznie małe i można nie uwzględniać wpływu radialnej energii kinetycznej na jego podłużny ruch.

Skupimy uwagę na małym elemencie pręta $\delta\xi$, który w chwili $t = 0$ położony jest w odległości ξ od jego końca; ξ oznacza współrzędną Lagrange'a. Wyjściowe położenie swobodnego końca pręta stanowi początek układu współrzędnych. Współrzędna ξ wzrasta wzdłuż osi pręta.

Jeżeli w chwili t przemieszczenie elementu pręta jest u , to zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona mamy:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial \xi}, \quad (1)$$

gdzie ρ_0 jest gęstością materiału nieodkształconego pręta, natomiast σ oznacza nominalne (inżynierskie) naprężenie, które jest określone za pomocą wypadkowej siły działającej na pręt podzielonej przez początkowe pole jego poprzecznego przekroju.

Zgodnie z założeniem, naprężenie σ jest jednoznacznie funkcją odkształcenia ε podczas obciążania pręta, zatem równanie (1) można zapisać w postaci:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi}, \quad (2)$$

gdzie ε jest względnym wydłużeniem elementu pręta $\delta\xi$, tj. $\varepsilon = \lim_{\delta\xi_0 \rightarrow 0} (d\xi - d\xi_0)/d\xi_0 = \partial u / \partial \xi$. Tak jest zdefiniowane odkształcenie nominalne — inżynierskie, przy czym nie zakłada się tutaj, że ε jest koniecznie małą wielkością. Z kolei pochodna $d\sigma/d\varepsilon$ jest modułem odkształcenia sprężystego lub wzmocnienia plastycznego, który oznaczamy

literą S . Ponieważ $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ jest z założenia jednoznaczna funkcją ε podczas obciążenia pręta, stąd wynika również jednoznaczność funkcji $S(\varepsilon)$. Po uwzględnieniu tego faktu równanie podłużnego ruchu pręta we współrzędnych Lagrange'a ξ, t przyjmuje ostateczny kształt:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = S \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \quad S = S(\varepsilon), \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial \xi}. \quad (3)$$

Warunki brzegowe są następujące:

$$u = V_1 t \text{ dla } \xi = 0 \text{ i } t > 0, \quad V_1 = \text{const}, \quad (4a)$$

$$u = 0 \text{ dla } \xi = \infty \text{ i } t > 0. \quad (4b)$$

Zagadnienie polega na rozwiązaniu równania (3) z warunkami (4a) i (4b) oraz znaną funkcją $S(du/d\xi) = S(\varepsilon)$.

3. Rozwiązanie problemu we współrzędnych Lagrange'a — opis materialny

Okazuje się, że istnieją dwa rozwiązania sformułowanego wyżej zagadnienia. Bezpośrednie sprawdzenie dowodzi, że funkcja

$$u = V_1 t + \varepsilon_1 \xi \quad (5)$$

spełnia równanie (3) i warunek brzegowy (4a), przy czym to rozwiązanie określa stałe odkształcenie w pręcie, ε_1 , zatem nie spełnia warunku (4b).

Drugie rozwiązanie można określić, jeżeli przyjąć, że

$$\frac{S(\varepsilon)}{\rho_0} = \left(\frac{\xi}{t} \right)^2. \quad (6)$$

Z postaci wyrażenia (6) bezpośrednio wynika, że nominalne odkształcenie ε jest funkcją zmiennej, $\beta = \xi/t$, tj. $\varepsilon = f(\beta)$. Wówczas przemieszczenie u można wyrazić za pomocą funkcji $f(\varepsilon)$ w następujący sposób:

$$u(\xi, t) = \int_{\infty}^{\xi} \frac{du}{d\xi_1} d\xi_1 = \int_{\infty}^{\xi} f(\beta_1) d\xi_1 = t \int_{\infty}^{\beta} f(\beta_1) d\beta_1, \quad d\xi_1 = t d\beta_1. \quad (7)$$

Granice całek wynikają z faktu, że $(du/d\xi) > 0$ (rozciąganie), a przemieszczenie $u < 0$ (przeciwne do osi 0ξ).

Po dwukrotnym różniczkowaniu wyrażenia (7) względem czasu otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \int_{-\infty}^{\beta} f(\beta_1) d\beta_1 + t \left[-\frac{\xi}{t^2} \int_{-\infty}^{\beta} f'(\beta_1) d\beta_1 - \frac{\xi}{t^2} f(\beta) \right] = \int_{-\infty}^{\beta} f(\beta_1) d\beta_1 - 2\frac{\xi}{t} f(\beta), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -2\frac{\xi}{t^2} f(\beta) + 2\frac{\xi}{t^2} f(\beta) + 2\frac{\xi}{t^3} f'(\beta) = 2\frac{\beta^2}{t} f'(\beta), \quad f'(\beta) = \frac{df}{d\beta}, \end{aligned} \quad (8)$$

i analogicznie:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{2}{t} f'(\beta). \quad (9)$$

Po podstawieniu wartości drugich pochodnych (8) i (9) do równania (3) mamy:

$$2\rho_0 \frac{\beta^2}{t} f'(\beta) = 2\frac{S}{t} f'(\beta). \quad (10)$$

Równania (3) i (10) będą spełnione, jeśli:

$$f'(\beta) = 0 \quad (11a)$$

lub

$$\rho_0 \beta^2 = S. \quad (11b)$$

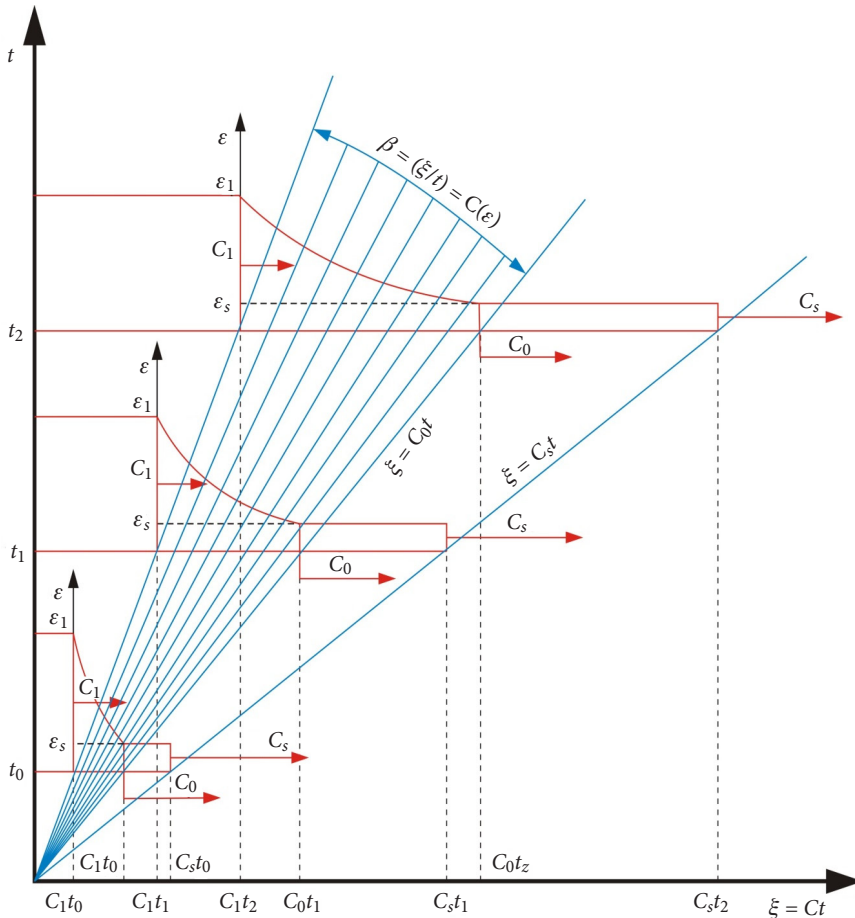
Równanie (11a) spełnia rozwiązanie (5), bowiem $(\partial^2 u / \partial t^2) = (2\beta^2 / t) f'(\beta) = 0$, czyli $f'(\beta) = 0$, natomiast wyrażenie (11b) odpowiada rozwiązaniu, w którym $(\xi/t) = (S/\rho_0)^{1/2}$ (6).

Dla pełnego przedstawienia postaci rozwiązania problemu wzdłuż pręta należy wyróżnić w nim cztery obszary czasowo-przestrzenne, a mianowicie:

- a) $0 \leq \xi \leq C_1 t$. W tym przedziale odkształcenie ma stałą wartość ε_1 określoną przez prędkość V_1 , natomiast C_1 jest prędkością propagacji tylnego frontu fali plastycznej z maksymalnym odkształceniem ε_1 .
- b) $C_1 t \leq \xi \leq C_0 t$. W tym zakresie zmiany współrzędnej ξ ma miejsce związek $(\xi/t)^2 = S/\rho_0$ i propaguje się w tym odcinku pręta nieliniowa centrowana fala plastyczna ze zmienną w sposób ciągły prędkością C w przedziale $C_1 \leq C \leq C_0$, przy czym C_0 jest prędkością propagacji przedniego frontu fali plastycznej. Wartości plastycznych odkształceń elementów pręta rozprzestrzeniają się w nim według pęku rodziny prostych określonych równaniem $(\xi/t) = C(\varepsilon) = \beta(\varepsilon)$ na płaszczyźnie $\xi 0t$ (rys. 1). Odkształcenie reprezentujące daną prostą w pęku przemieszcza się w pręcie z upływem czasu wzdłuż tej prostej $\xi = f(\varepsilon)t$ bez zmiany wartości. Na rysunku 1 pokazane są również profile rozkładu odkształceń wzdłuż pręta zawarte między frontem fali

sprężystej, $\xi = C_s t$, przednim, $\xi = C_0 t$, i tylnym, $\xi = C_1 t$, frontem fali plastycznej dla wybranych chwil czasu: t_0, t_1, t_2 ($t_0 < t_1 < t_2$).

- c) $C_0 t \leq \xi \leq C_s t$, gdzie C_s jest prędkością propagacji fali sprężystej. Obszar ten jest wynikiem nierówności prędkości frontów fal: sprężystej C_s i plastycznej C_0 . Ponieważ $C_s > C_0$, zatem między tymi frontami powstaje obszar stałego odkształcenia sprężystego ε_s . W przypadku gdy $C_s = C_0$, przedział c) znika. Front fali sprężystej jest silną nieciągłością spowodowaną warunkiem brzegowym, na której odkształcenie zmienia się w sposób skokowy od 0 do ε_s , a moduł S jest równy modułowi Younga E i $C_s = (E/\rho_0)^{\frac{1}{2}}$.
- d) $C_s t \leq \xi \leq \infty$, $\varepsilon = 0$ — obszar niezaburzony.



Rys. 1. Rodzina pęku prostych na płaszczyźnie $\xi 0t$ dla nagłego obciążenia końca pręta i malejącego modułu wzmocnienia oraz profile rozkładu odkształcenia ε wzdłuż pręta w wybranych chwilach czasu: t_0, t_1 i t_2 , przy czym $t_0 < t_1 < t_2$ i $C_1 < C_0 < C_s$

Na zakończenie rozwiązania problemu w opisie materialnym należy określić jeszcze zależność prędkości propagacji frontu tylnej części fali plastycznej C_1 od prędkości przemieszczania się czołowego końca pręta V_1 . Z warunku (4a) i wyrażenia (7) wynika, że czołowy koniec pręta przemieszcza się jednostajnie z prędkością V_1 , a mianowicie:

$$u(0, t) = V_1 t = t \int_{-\infty}^0 f(\beta) d\beta. \quad (12)$$

Z wyrażenia (12) otrzymuje się:

$$V_1 = \int_{-\infty}^0 f(\beta) d\beta = - \int_0^{\infty} f(\beta) d\beta = - \int_0^{\infty} \varepsilon(\beta) d\beta. \quad (13)$$

Z wykresów zamieszczonych na rysunku 1 wynika, że pole pod krzywą $\varepsilon = \varepsilon(\xi/t)$ można określić za pomocą następującej całki:

$$V_1 = - \int_0^{\varepsilon_1} \beta d\varepsilon = - \int_0^{\varepsilon_1} [S(\varepsilon)/\rho_0]^{\frac{1}{2}} d\varepsilon. \quad (14)$$

Znak „-” wynika z faktu, że czołowy koniec pręta przemieszcza się w kierunku przeciwnym do zwrotu osi 0ξ .

Zgodnie z założeniem moduł S jest znaną funkcją odkształcenia ε , zatem całka (14) określa związek prędkości V_1 z maksymalnym odkształceniem ε_1 rozprzestrzeniającym się w pręcie wraz z tylnym frontem fali plastycznej, którego prędkość określa wzór:

$$C_1 = [S(\varepsilon_1)/\rho_0]^{\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

Z kolei związek konstytutywny $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ determinuje rozkład naprężenia w pręcie, który ma postać:

$$\sigma = \sigma \left[f \left(\frac{\xi}{t} \right) \right]. \quad (16)$$

W rozkładzie tym występuje maksymalne odkształcenie $\varepsilon_{1\max}$, przy którym pręt pęka. Tej wartości odkształcenia odpowiada maksymalna graniczna prędkość przemieszczania końca pręta $V_{1\max}$, przy której pręt jest niszczone.

4. Rozwiązanie problemu we współrzędnych Eulera — opis przestrzenny

W metodzie Lagrange'a równania ruchu i ciągłości wyprowadza się dla małego fragmentu pręta $\delta\xi$, który przemieszcza się w przestrzeni i zmienia swoją długość oraz pole poprzecznego przekroju podczas rozciągania pręta. Przy podejściu Eulera rozpatruje się ustalony obszar przestrzeni, a równania ruchu i ciągłości otrzymuje się dla elementu pręta δx , przemieszczającego się przez ten obszar w określonym przedziale czasu.

Współrzedną Eulera oznaczamy literą x . Reprezentuje ją odległość od początkowego położenia końca pręta, która rośnie od zera wzdłuż jego osi. Równanie ruchu elementu pręta zawartego pomiędzy x i $x + \delta x$ otrzymuje się z przyrównania różnicy sił działających na końce elementu pręta znajdującego się w tym obszarze w chwili t do iloczynu jego masy przez przyspieszenie. Niech nominalne naprężenie w przekroju x wynosi σ , wówczas w przekroju $x + \delta x$ mamy:

$$\sigma + \frac{\partial\sigma}{\partial x}\delta x$$

i wypadkowa siła działająca na element δx wynosi:

$$A_0 \left(\sigma - \sigma - \frac{\partial\sigma}{\partial x}\delta x \right) = -A_0 \frac{\partial\sigma}{\partial x}\delta x, \quad (17)$$

gdzie A_0 oznacza pole poprzecznego przekroju nieodkształconego pręta. Kierunek działania wypadkowej siły jest przeciwny do osi $0x$ i dlatego jest znak „-” w prawej stronie równania (17). Jeśli element pręta w chwili $t = 0$ ograniczony jest płaszczyznami x i $x + \delta x$, to w chwili t osiągną one współrzędne x^* i $x^* + \delta x^*$. Ponieważ $x^* = x + u$, więc $\delta x^* = \delta x + (\partial u/\partial x)\delta x = (1 + \varepsilon)\delta x$. Następnie, z prawa zachowania masy wynika, że:

$$\rho_0 A_0 \delta x = \rho^* A^* \delta x^* = \rho^* A^* (1 + \varepsilon)\delta x \quad (18a)$$

lub

$$\rho^* A^* = \frac{\rho_0 A_0}{1 + \varepsilon}, \quad (18b)$$

gdzie iloczyn $\rho^* A^*$ określa masę jednostki długości pręta w chwili t , a ε jest odkształceniem nominalnym. Niech aktualna prędkość elementu δx^* w chwili t wynosi V , wówczas jego środek przemieści się w okresie δt o odcinek $V\delta t$ i prędkość elementu w chwili $t + \delta t$ wynosi:

$$V + \frac{\partial V}{\partial x}V\delta t + \frac{\partial V}{\partial t}\delta t,$$

zatem jego przyspieszenie można określić za pomocą wyrażenia:

$$a = -\frac{\Delta V}{\delta t} = -\left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x}\right). \quad (19)$$

Po podstawieniu wyrażen (17), (18b) i (19) do drugiej zasady dynamiki Newtona otrzymuje się końcową postać równania ruchu elementu pręta we współrzędnych Eulera, a mianowicie

$$\frac{\rho_0 A_0}{1 + \varepsilon} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x}\right) \delta x = A_0 \frac{\partial \sigma}{\partial x} \delta x$$

lub

$$\frac{\rho_0}{1 + \varepsilon} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}. \quad (20)$$

Jeśli przez M oznaczymy liniową masę (gęstość — masa na jednostkę długości) pręta w dowolnej chwili t , to zgodnie z prawem zachowania masy mamy (18b):

$$M = \rho^* A^* = \frac{\rho_0 A_0}{1 + \varepsilon}. \quad (21)$$

Zmianę masy liniowej M w elemencie przestrzeni δx^* w okresie δt można określić za pomocą różnicy mas: wchodzącej i opuszczającej element przestrzeni δx^* w czasie δt , a mianowicie:

$$\frac{\partial M}{\partial t} \delta t \delta x^* = VM \delta t - \left(V + \frac{\partial V}{\partial x} \delta x^*\right) \left(M + \frac{\partial M}{\partial x} \delta x^*\right) \delta t.$$

Z tej zależności, po pominięciu małej wyższego rzędu $\left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial M}{\partial x} \delta x^2 \approx 0\right)$, otrzymuje się:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -M \frac{\partial V}{\partial x} - V \frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} (MV). \quad (22)$$

Podstawienie wyrażenia (21) do zależności (22) daje ostateczną postać równania ciągłości (zachowania masy) we współrzędnych Eulera, x , t , a mianowicie:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = (1 + \varepsilon) \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (23)$$

Równania (20) i (23) są podobne do równań opisujących rozprzestrzenienie się płaskiej fali o skończonej amplitudzie w idealnej cieczy ściśliwej, które mają postać:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial V}{\partial x}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (25)$$

Gdzie p i ρ odpowiednio oznaczają ciśnienie i bieżącą gęstość cieczy.

Równania (24) i (25) można przekształcić do postaci (20) i (23) za pomocą podstawień:

$$\varepsilon = \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \quad \text{i} \quad \sigma = -p. \quad (26)$$

Rzeczywiście z relacji (26) wynika, że:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= -\frac{\rho_0}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t}, & \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} &= -\frac{\rho_0}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x}, \\ 1 + \varepsilon &= \frac{\rho_0}{\rho}, & \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial x}. \end{aligned}$$

Po podstawieniu tych wyrażeń do równań (20) i (23) otrzymuje się zależności (24) i (25). Z podobieństwa równań wynika wniosek, że w obydwóch przypadkach można stosować te same metody całkowania.

W dalszym ciągu rozważań założymy, że prędkość cząstek pręta jest funkcją tylko odkształcenia, tj.

$$V = f(\varepsilon). \quad (27)$$

Wówczas równanie (20) można zapisać w postaci:

$$\frac{\rho_0}{1 + \varepsilon} \frac{df}{d\varepsilon} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \quad (28)$$

a z (23) otrzymuje się:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{df}{d\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} (1 + \varepsilon). \quad (29)$$

Po podstawieniu wyrażenia (29) do równania (28) mamy:

$$\left(\frac{df}{d\varepsilon}\right)^2 = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$$

lub

$$\frac{df}{d\varepsilon} = -\left(\frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} = -\left[\frac{S(\varepsilon)}{\rho_0}\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (30)$$

W celu określenia prędkości V scałkujemy wyrażenie (30) wzdłuż osi pręta od jego nieruchomego końca, gdzie $\varepsilon = 0$, do rozważanego przekroju z aktualnym odkształceniem ε . Wówczas mamy:

$$V = -\int_0^\varepsilon \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} d\varepsilon = -\int_0^\varepsilon \left(\frac{S(\varepsilon)}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}} d\varepsilon. \quad (31)$$

Wyrażenie (31) potwierdza wynik wiążący prędkość końca pręta z maksymalnym odkształceniem otrzymany metodą Lagrange'a (14).

Z zależności (27) wynika, że

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{df}{d\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}. \quad (32)$$

Po podstawieniu (32) i wartości pochodnej $df/d\varepsilon$ określonej wzorem (30) do równania (23) otrzymuje się:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \left[V + (1 + \varepsilon) \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0 \quad (33a)$$

lub

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (c + V) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0, \quad (33b)$$

gdzie

$$c = (1 + \varepsilon) \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (34)$$

jest prędkością rozprzestrzenienia się fali przemieszczenia w pręcie. Dla krzywej $(dx/dt) = c + V$ równanie (33b) redukuje się do postaci

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = d\varepsilon = 0 \rightarrow \varepsilon = \text{const.}$$

Zatem dla cząstek pręta przemieszczających się w przestrzeni z prędkością $c + V$ odkształcenie ε , a tym samym naprężenie σ i prędkość V są stałe.

Praca realizowana w ramach działalności statutowej Wojskowej Akademii Technicznej.

Artykuł wpłynął do redakcji 20.10.2016 r. Zweryfikowaną wersję po recenzjach otrzymano 28.03.2017 r.

LITERATURA

- [1] KOLSKY H., *Stress waves in solids*, Clarendon Press, Oxford, 1953.
- [2] CRISTESCU N., *Dynamic plasticity*, North-Holand, Amsterdam, 1967.
- [3] KINSLOW R., *High-velocity impact phenomena*, Academic Press, New York, 1970.
- [4] HENRYCH J., *The dynamics of explosion and its use*, Academia, Praga, 1979.
- [5] ZUKAS J.A., *Impact dynamics*, Wiley-Interscience, New York, 1962.
- [6] NOWACKI K., *Zagadnienia falowe w teorii plastyczności*, PWN, Warszawa, 1974.
- [7] PERZYNA P., *Teoria lepkoplastyczności*, PWN, Warszawa, 1966.
- [8] KALISKI S., DŻYGADŁO Z., SOLARZ L., WŁODARCZYK E., *Drgania i fale*, PWN, Warszawa, 1966.
- [9] RACHNATULIN CH.A., DEMIANOV JU.A., *Procnost pri intensivnykh kratkovremiennykh nagruzkach*, Fiz. Mat. Lit., Moskwa, 1961.
- [10] SAPIRO G.S., *Problemy dynamiki upругo-plasticeskich sred.*, Mechanika, t. 5, J. Ju. Islinskij, G.G. Cernyj (red.), Mir, Moskwa, 1975.
- [11] LINDHOLM U.S. (ed.), *Mechanical behavior of materials under dynamic loads*, Springer, New York, 1968.
- [12] JACH K., MORKA A., MROCZKOWSKI M., PANOWICZ R., SARZYŃSKI A., STĘPNIOWSKI W., ŚWIERCZYŃSKI R., TYL J., *Komputerowe modelowanie dynamicznych oddziaływań ciał metodą punktów swobodnych*, PWN, Warszawa, 2001.
- [13] KALISKI S., RYMARZ CZ., SOBCZYK S., WŁODARCZYK E., *Waves*, Elsevier, Amsterdam, Oxford, New York, Tokyo, 1992.
- [14] HOPKINSON J., *On the rupture of iron wire by blow*, Proc. Man Lit. Phil., 11, 40, 1872, oraz *Further experiments on the rupture of iron wire*, Proc. Man Lit. Phil., 11, 15, 1872.
- [15] HOPKINSON B., *The effects of momentary stress in metals*, Proc. Roy. Soc. A, 74, 498, 1905.
- [16] TAYLOR G.I., *The use of flat-ended projectile for determining dynamic yield stress, I. Theoretical considerations*, Proc. Roy. Soc., Load. A, 1948.
- [17] WHIFFIN A.C., *The use of flat-ended projectile for determining dynamic yield stress, II. Tests on various metallic materials*, Proc. Roy. Soc., Load. A, 1948.
- [18] TAYLOR G.I., *Propagation of earth waves from an explosion* [in:] G.K. Batchelor (ed.), G.I. Taylor scientific papers, vol. 1: *Mechanics of Solids* (Cambridge Univ. Press), 1958a, pp. 456-463, (2.6).
- [19] Taylor G.I., *The plastic wave in wire extended by an impact load* [in:] G.K. Batchelor (ed.), G.I. Taylor scientific papers, vol. 1: *Mechanics of Solids* (Cambridge Univ. Press), 1958a, pp. 467-479, (2.6).

E. WŁODARCZYK, M. SARZYŃSKI

Propagation of the nonlinear plastic stress waves in semi-infinite bar

Abstract. This paper presents the propagation longitudinal nonlinear plastic stress in thin semi-infinite rod or in wire. The rod is characterized by a nonlinear strain hardening model within the scope a plastic strain. The modulus of strain hardening is a decreasing function of the strain. The frontal bar end is suddenly launching to the velocity V , and subsequently moves with this one. General solution of this boundary value problem of the Lagrangian coordinate (material description) and of the Eulerian one (spatial description) has been presented. There has been carried out the physical interpretation of the obtained results by means of Lagrangian and Eulerian methods. The results of this paper may be utilized in scientific researches and in engineering practice.

Keywords: dynamic plasticity, nonlinear continuum mechanics, longitudinal elastic-plastic stress waves

DOI: 10.5604/01.3001.0009.9303

