

## Rozszerzony potencjał plastyczny Druckera-Pragera do modelowania gruntów i betonu

### Streszczenie

W artykule został przedstawiony potencjał plastyczny adekwatny do modelowania konstytutywnego wybranych typów gruntów i betonu. Propozycja jest oparta na gładkiej modyfikacji obrotowej powierzchni złożonej z dwóch stożków warunku Druckera-Pragera. Ponadto kształt przekroju dewiatorowego uwzględnia różnice zachowania się materiałów na południkach ściskania i rozciągania. Podano możliwe zakresy wartości parametrów materiałowych oraz ich wpływ na kształt powierzchni plastyczności. Przedyskutowano różniczkowalność zaproponowanej funkcji oraz pokazano szkic dowodu jej wypukłości. Znalaziono analityczne formuły opisujące parametry materiałowe potencjału (warunku plastyczności), opierając się na wartościach granic plastyczności uzyskiwanych w typowych testach doświadczalnych.

### WSTĘP

Zachowanie się materiałów konstrukcyjnych i podłoża gruntowego jest istotnym czynnikiem brany pod uwagę w procesie projektowania konstrukcji. Całościowy opis własności mechanicznych ośrodka materialnego zwykle wymaga uwzględnienia efektów sprężystych, plastycznych i lepkich [4,6,15,18]. Aby sformułować zagadnienie procesu uplastycznienia materiału stosuje się skalarną funkcję stanu naprężenia określającą powierzchnie plastyczności.

Potencjał plastyczny, w zależności od kontekstu, służy do zdefiniowania warunku plastyczności lub prawa płynięcia (w tym przypadku nazywamy go funkcją płynięcia). Dla materiałów izotropowych jest on izotropową funkcją tensora naprężenia (czyli jego trzech niezmienników). Przyjmuje się, że potencjał plastyczny jest funkcją wypukłą i gładką [8], co jest zgodne z wynikami doświadczeń dla gruntów i betonu. Jednocześnie wypukłość jest cechą dogodną z punktu widzenia obliczeń – gwarantuje istnienie sformułowania dualnego oraz monotoniczność prawa płynięcia. W przypadku plastyczności niestowarzyszonej definiuje się dwie funkcje – osobno dla warunku plastyczności oraz prawa płynięcia. W tym wypadku wymaga się, aby obie były wypukłe [4,18]. Należy zaznaczyć, że ani wypukłość ani gładkość potencjału nie są cechami koniecznymi do sformułowania zagadnienia plastyczności. Aczkolwiek gładkość istotnie upraszcza formułowanie algorytmów metody elementów skończonych, która jest obecnie standardowym sposobem analizy zachowania konstrukcji [3,5].

Celem niniejszego artykułu jest zaproponowanie takiego warunku plastyczności (potencjału plastycznego), który odzwierciedla charakterystyczną cechę zachowania się części gruntów oraz betonu, tj. znacząco inne własności przy ściskaniu i rozciąganiu [6,7,14,18]. Przekłada się to na przybliżony do trójkątnego przekrój dewiatorowy powierzchni plastyczności i zależność od pierwszego niezmiennika tensora naprężenia [12,14,15]. Nachylenie południków w takich materiałach maleje przy zwiększaniu hydrostatycznego ściskania, por. np. [2]. Przedstawiony potencjał, będący rozszerzeniem potencjału Druckera-Pragera, spełnia wymienione warunki, jednocześnie cechuje się dość prostą postacią, w związku z czym możliwe jest analityczne uzyskanie wyrażenia na stałe materiałowe. Pokazano także, że proponowana funkcja jest gładka oraz wypukła, przy czym do dowodu wykorzystano odpowiednią przestrzeń niezmienników tensora naprężenia.

### 1. DEFINICJA POTENCJAŁU PLASTYCZNEGO

#### 1.1. Potencjał Druckera-Pragera

Jednym z najprostszych potencjałów plastyczności dla gruntów jest potencjał Druckera-Pragera, postaci:

$$f_{DP}(r, \theta, \xi) = f_{DP}(r, \xi) = \xi + \alpha r - \tilde{\beta}, \quad (1)$$

gdzie:

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}, \quad r = \sqrt{\text{tr} \boldsymbol{s}^2} \geq 0, \quad (2)$$

$$\theta = \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{\sqrt{6} \text{tr} \boldsymbol{s}^3}{\sqrt{\text{tr}^3 \boldsymbol{s}^2}} \right) \in \left\langle 0, \frac{\pi}{3} \right\rangle$$

są niezmiennikami tensora naprężenia, przy czym  $\boldsymbol{s}$  jest dewiatorem tensora naprężenia, a  $\alpha$  i  $\tilde{\beta}$  są parametrami materiałowymi. Wartości parametrów materiałowych wyznacza się na podstawie wyników dwóch wybranych testów doświadczalnych.

W przestrzeni naprężeń głównych (także w przestrzeni niezmienników (2)) powierzchnia plastyczności  $f_{DP}(r, \xi) = 0$  jest stożkiem, jej przekroje dewiatorowe – okręgami, a południkowe – prostymi, por. rys. 1. Funkcja (1) może być użyta do zgrubnych obliczeń, nie oddaje jednak prawidłowo pożądanego kształtu powierzchni plastyczności. Dodatkowo, potencjał nie jest funkcją gładką – w wierzchołku  $r = 0$  gradient nie jest określony.

W przypadku, gdy powierzchnia (albo warunek) plastyczności  $f_{DP}(r, \xi) = 0$  przechodzi przez punkty reprezentujące testy jednoosiowego ściskania i rozciągania stałe materiałowe przybierają następujące wartości:

$$\alpha_1 = \frac{\sigma_c + \sigma_T}{\sqrt{2}(\sigma_c - \sigma_T)}, \quad \tilde{\beta}_1 = \frac{2\sigma_c \sigma_T}{\sqrt{3}(\sigma_c - \sigma_T)}, \quad (3)$$

gdzie  $\sigma_c$  jest granicą plastyczności przy jednoosiowym ściskaniu, natomiast  $\sigma_T$  – granicą plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu. Gdy testami wybranymi do kalibracji stałych są test jednoosiowego ściskania oraz test dwuosowego równomiernego ściskania, otrzymuje się:

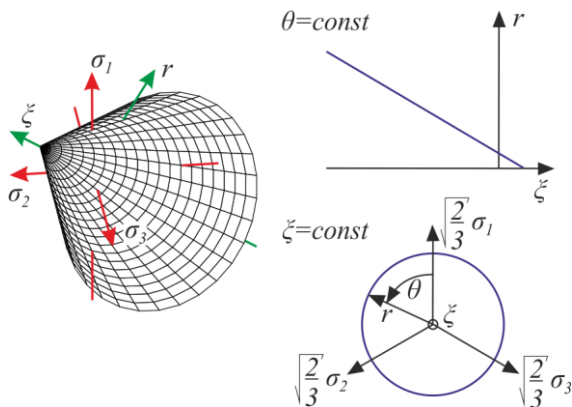
$$\alpha_2 = \frac{2\sigma_{BC} - \sigma_c}{\sqrt{2}(\sigma_{BC} - \sigma_c)}, \quad \tilde{\beta}_2 = \frac{\sigma_{BC} \sigma_c}{\sqrt{3}(\sigma_{BC} - \sigma_c)}, \quad (4)$$

przy czym  $\sigma_{BC}$  jest granicą plastyczności przy dwuosiowym równomiernym ściskaniu.

Kalibracja warunku plastyczności (1) wg (3) poprawnie charakteryzuje wyężenie materiału przy umiarkowanych wartościach ciśnienia hydrostatycznego, zaś kalibracja wg (4) dobrze odzwierciedla zachowanie materiału przy jego dużych wartościach. Aby połączyć dobre cechy obu opisów, definiuje się zmodyfikowany warunek Druckera-Pragera złożony z dwóch płatów stożkowych zgodnych z kalibracją (3) i (4):

$$f_{DP2}(r, \xi) = \begin{cases} \xi + \alpha_1 r - \tilde{\beta}_1 = 0 & \text{dla } 0 \leq r \leq r_p, \\ \xi + \alpha_2 r - \tilde{\beta}_2 = 0 & \text{dla } r > r_p, \end{cases} \quad (5)$$

gdzie  $r_p$  jest współrzędną połączenia stożków odpowiadającą wspólnemu testowi ściskania. Powierzchnia (5) również nie jest funkcją gładką w wierzchołku  $r = 0$  i na połączeniu płatów  $r = r_p$ .



Rys. 1. Powierzchnia plastyczności Druckera-Pragera – widok trójwymiarowy w przestrzeni naprężeń głównych  $\sigma_i$ , przekroje południkowy oraz dewiatorowy.

### 1.2. Potencjał plastyczny

Aby skorygować wady potencjałów (1) i (5) skonstruowano nową funkcję w oparciu o dwa stożki Druckera-Pragera o różnych nachyleniach. W tym celu zdefiniowano obwiednię, por. rys. 2:

$$f_{DPM}(r, \xi) = \begin{cases} \xi + \alpha_1 r - \beta_1 = 0 & \text{dla } 0 \leq r \leq r_0, \\ \xi + \alpha_2 r - \beta_2 = 0 & \text{dla } r > r_0, \end{cases} \quad (6)$$

gdzie:

$$0 < \alpha_1 \leq \alpha_2, \quad \beta_1 \leq \beta_2, \quad r_0 = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_2 - \alpha_1}. \quad (7)$$

Na tej podstawie zaproponowano potencjał  $f_0(r, \xi)$ , por. [16], którego warstwa zerowa jest wpisana w powierzchnię (6):

$$f_0(r, \xi) = \xi - F_0(r) \quad (8)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} F_0(r) &= \frac{1}{2} [f_{10}(r) + f_{20}(r) - P_0(r)], \\ f_{10}(r) &= \beta_1 - \alpha_1 \sqrt{A^2 + r^2}, \\ f_{20}(r) &= \beta_2 - \alpha_2 \sqrt{A^2 + r^2}, \\ P_0(r) &= \sqrt{B^2 + [f_{10}(r) - f_{20}(r)]^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

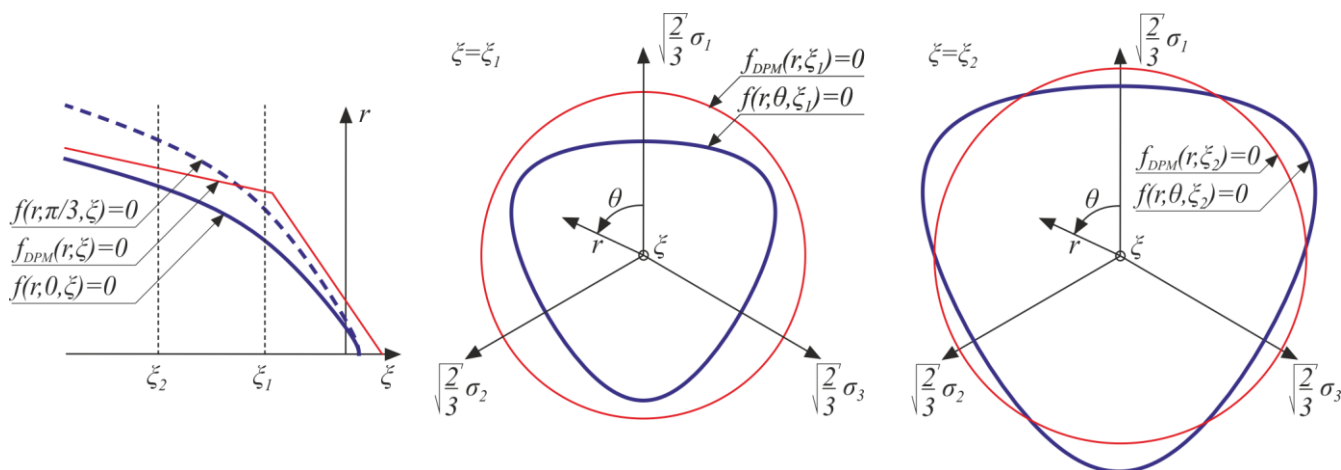
$A$  i  $B$  są dodatkowymi parametrami materiałowymi. Modyfikacji ulegną też parametry  $\tilde{\beta}_1 \rightarrow \beta_1$ ,  $\tilde{\beta}_2 \rightarrow \beta_2$ .

Zmodyfikowana powierzchnia plastyczności odwzorowuje zmiany nachylenia południków ze zmianą naprężenia hydrostatycznego. Prawidłowy potencjał plastyczny opisywanych materiałów powinien uwzględniać jednak wpływ wszystkich trzech niezmienników tensora naprężenia (2). Aby dopasować przekrój dewiatorowy do wyników doświadczeń zastosowano funkcję  $g(\theta)$  [14,15], zależną jedynie od trzeciego niezmiennika. Proponowany potencjał plastyczny ma postać:

$$f(r, \theta, \xi) = \xi - F(r, \theta), \quad (10)$$

gdzie obecnie:

$$\begin{aligned} F(r, \theta) &= \frac{f_{1N}(r, \theta) + f_{2N}(r, \theta) - P(r, \theta)}{2}, \\ f_{1N}(r, \theta) &= \beta_1 - \alpha_1 \sqrt{A^2 + \left(\frac{r}{g(\theta)}\right)^2}, \\ f_{2N}(r, \theta) &= \beta_2 - \alpha_2 \sqrt{A^2 + \left(\frac{r}{g(\theta)}\right)^2}, \\ g(\theta) &= \frac{a}{\cos\left[\frac{1}{3} \arccos(b \cos 3\theta)\right]}, \end{aligned} \quad (11)$$



Rys. 2. Przekroje południkowe i dewiatorowe przez powierzchnię plastyczności dla proponowanego potencjału i jego obwiedni.

$$P(r, \theta) = \sqrt{B^2 + [f_{1N}(r, \theta) - f_{2N}(r, \theta)]^2} \quad (11)$$

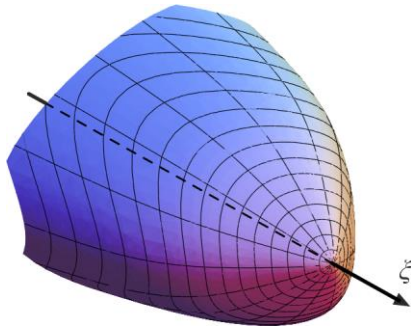
Wprowadzono nowe parametry materiałowe  $a$  oraz  $b$ , przy czym:

$$a > 0, \quad -1 \leq b \leq 1. \quad (12)$$

Widok powierzchni plastyczności wg funkcji (10), tj.:

$$f(r, \theta, \xi) = 0 \quad (13)$$

przedstawiono na rys. 3.

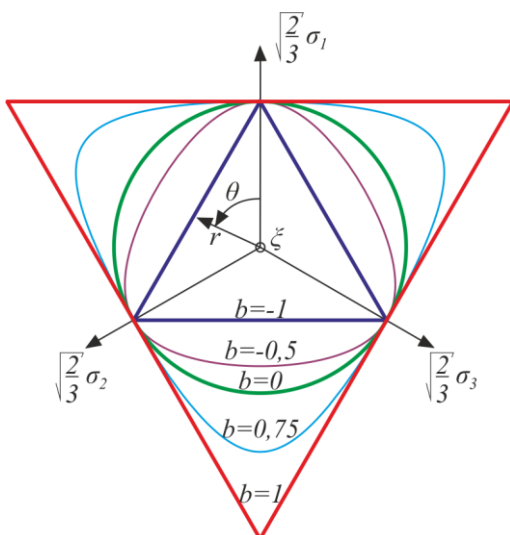


Rys. 3. Widok powierzchni plastyczności (13) w przestrzeni niezmienników tensora naprężenia.

Południki (krzywe przy  $\theta = const$ ) powierzchni plastyczności (13) są podobne do południków powierzchni obrotowej  $f_0(r, \xi) = 0$  według (8), por. rys. 2. Asymptoty ukośne południków proponowanej powierzchni plastyczności dla  $r \rightarrow +\infty$  mają postać:

$$\xi(r, \theta) = -\frac{\alpha_2}{g(\theta)} r + \beta_2. \quad (14)$$

Przekrój dewiatorowy powierzchni (13) przedstawiono na rys. 4, gdzie uzgodniono wartości dla południka rozciągania. Zależnie od wartości parametrów, może on dostosowywać swój kształt do charakterystyki materiału. W skrajnych przypadkach jest kołem ( $b = 0$ ) lub trójkątem ( $|b| = 1$ ), por. [14,15].



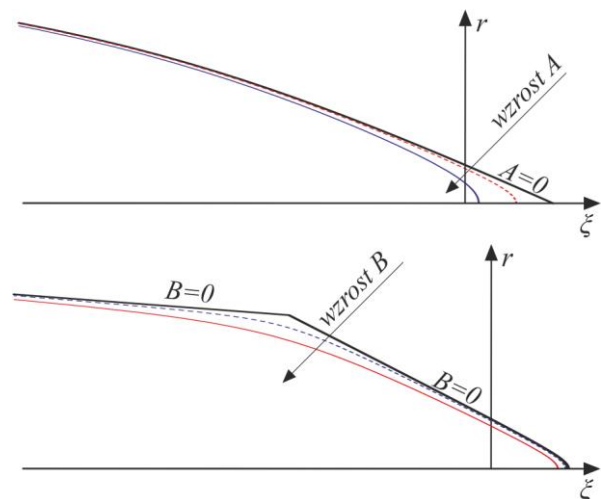
Rys. 4. Przekrój dewiatorowy powierzchni plastyczności w zależności od parametru  $b$ .

Parametry  $\alpha_1$  oraz  $\alpha_2$  odpowiadają za nachylenie południków, a ich wartości przyjęto jak dla warunku Druckera-Pragera, por. wzory (3) oraz (4).  $\beta_2$  określa asymptotę ukośną południka poten-

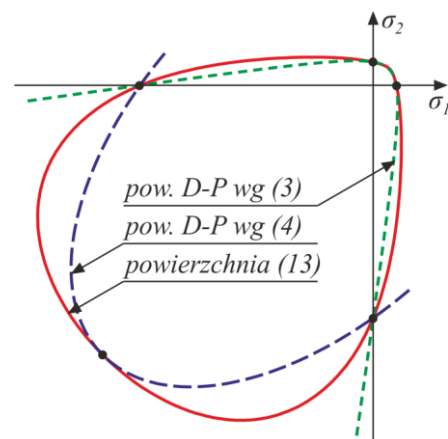
cjału (14), zaś  $\beta_1$  określa graniczne położenie wierzchołka powierzchni plastyczności. Parametr  $A$  wpływa głównie na promień krzywizny wierzchołka – przy  $A = 0$  wierzchołek powierzchni plastyczności jest taki, jak w warunku Druckera-Pragera, por. rys. 5. Wraz ze wzrostem wartości parametru, promień krzywizny w wierzchołku powierzchni plastyczności wzrasta, a jego odcięta na osi  $\xi$  maleje. Natomiast parametr  $B$  określa sposób połączenia w pobliżu krawędzi przecięcia się stożków (6). Jak widać na rys. 5, gdy  $B = 0$  dwie powierzchnie tworzące powierzchnię plastyczności odpowiadającą potencjałowi (10) połączone są w sposób nieładki, natomiast przy zwiększaniu parametru rośnie promień krzywizny połączenia.

W przypadku, gdy  $b = 0$  oraz  $\alpha_1 = \alpha_2$  i  $\beta_1 = \beta_2$  potencjał (10) redukuje się do potencjału plastycznego używanego w modelu Concrete Damaged Plasticity [1]. Po dalszym uproszczeniu  $A = B = 0$  otrzymuje się potencjał Druckera-Pragera wg (1).

Na rys. 6 przedstawiono przekrój powierzchni plastyczności w przypadku płaskiego stanu naprężenia. Pokazano także przekroje powierzchni Druckera-Pragera, skalibrowane według wzorów (3) oraz (4). Pokazany przekrój pokazuje wyraźnie możliwe do osiągnięcia duże rozbieżności przy zachowaniu podczas ściskania i rozciągania, obserwowane w gruntach i betonie [11,12,17].



Rys. 5. Wpływ zmiany parametrów  $A$  oraz  $B$  na kształt południka powierzchni plastyczności.



Rys. 6. Płaski stan naprężenia – przekrój przez powierzchnie plastyczności  $\sigma_3 = 0$ .

## 2. RÓŻNICZKOWALNOŚĆ I WYPUKŁOŚĆ POTENCJAŁU

### 2.1. Różniczkowalność

Gradient rozpatrywanego potencjału ma następującą reprezentację w bazie układu współrzędnych walcowych  $(r, \theta, \xi)$ , wg (2):

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} \rightarrow \begin{bmatrix} f_{,r} \\ \frac{1}{r} f_{,\theta} \\ f_{,\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f_3 r}{gQP} \\ \frac{f_3 g'r}{g^2QP} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

gdzie dla zwięzłości pominięto argumenty funkcji oraz wprowadzono oznaczenia:

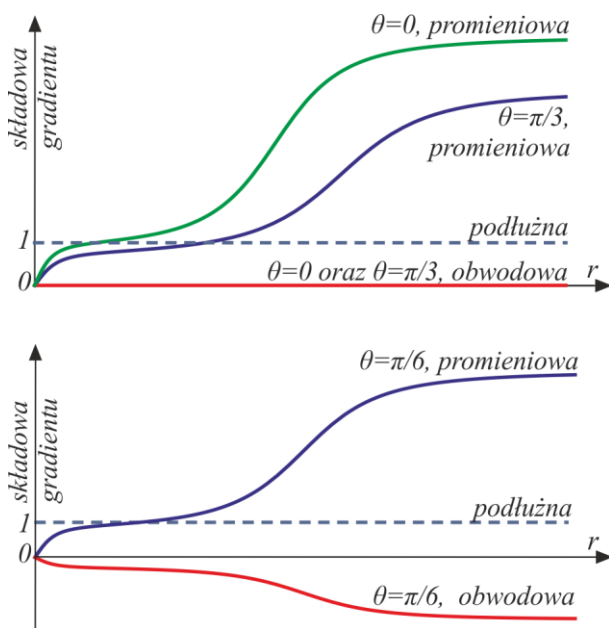
$$f_3 = \alpha_1 f_{2N} + \alpha_2 f_{1N} - (\alpha_1 + \alpha_2) F, \quad (16)$$

$$Q = \sqrt{(Ag)^2 + r^2}.$$

Jeśli  $|b| \neq 1$ ,  $A \neq 0$  oraz  $B \neq 0$ , to gradient jest określony we wszystkich punktach  $r \neq 0$ , a dla  $r = 0$  jego dwie pierwsze składowe są zerowe – powierzchnia plastyczności jest gładka.

W przypadku, gdy  $A = 0$  nie da się jednoznacznie określić gradientu w wierzchołku potencjału, natomiast jeśli  $B = 0$ , to jest on nieokreślony w punkcie przecięcia się asymptot  $r_0$ .  $|b| = 1$  pociąga za sobą brak różniczkowalności funkcji na południkach ściskania ( $\theta = \pi/3$ ) lub rozciągania ( $\theta = 0$ ).

Zmianę składowych gradientu (15) w układzie cylindrycznym w zależności od normy dewiatora  $r$  dla wybranych południków przedstawiono na rys 7. Jeśli prawo płynięcia jest stowarzyszone z warunkiem plastyczności (13), wyniki obliczeń numerycznych będą przypominać wyniki uzyskane dla warunku Lublinerera, jednak w przeciwieństwie do funkcji Lublinerera, proponowany potencjał (10) jest gładki, nastęrcza więc mniej trudności obliczeniowych.



Rys. 7. Składowe gradientu (15) w zależności  $r$  od dla różnych południków.

### 2.2. Wypukłość

Aby udowodnić wypukłość potencjału (10) wystarczy pokazać, że wszystkie minory główne tensora krzywizny powierzchni o reprezentacji:

$$\kappa \rightarrow \begin{bmatrix} f_{,rr} & \left(\frac{1}{r} f_{,\theta}\right)_{,r} & f_{,r\xi} \\ \left(\frac{1}{r} f_{,\theta}\right)_{,r} & \frac{1}{r^2} f_{,\theta\theta} + \frac{1}{r} f_{,r} & \frac{1}{r} f_{,r\theta} \\ f_{,r\xi} & \frac{1}{r} f_{,r\theta} & f_{,\xi\xi} \end{bmatrix} \quad (17)$$

w bazie układu cylindrycznego  $(r, \theta, \xi)$  są nieujemne [9]. Niezerowe minory główne (17) mają postacie:

$$D_1 = f_{,rr} = \frac{A^2 g f_3}{PQ^2} + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^2 B^2 r^2}{2g^2 P^3 Q},$$

$$D_2 = \frac{1}{r^2} f_{,\theta\theta} + \frac{1}{r} f_{,r} =$$

$$= \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^2 B^2 r^2 (g')^2}{2g^4 P^3 Q^2} + \frac{f_3 [f_4 Q^2 + (g')^2 r^2]}{g^3 P Q^3}, \quad (18)$$

$$D_3 = f_{,rr} \left[ \frac{1}{r^2} f_{,\theta\theta} + \frac{1}{r} f_{,r} \right] - \left[ \left( \frac{1}{r} f_{,\theta} \right)_{,r} \right]^2 = \frac{D_1 f_3 f_4}{g^2 P Q},$$

$$\text{gdzie: } f_4 = g^2 - g g'' + 2(g')^2.$$

Ponieważ  $P$ ,  $Q$  oraz  $g$  są nieujemne w całej dziedzinie, aby minory główne (18) były nieujemne wystarczy udowodnić, że  $f_3 \geq 0$  i  $f_4 \geq 0$ .

Funkcję  $f_3$  można sprowadzić do postaci:

$$f_3 = (\alpha_2 - \alpha_1)(f_{2N} - f_{1N} + P) + \alpha_1 P, \quad (19)$$

co jest nieujemne na mocy (11) i nierówności (7), natomiast funkcję  $f_4$  można zastąpić następującym wyrażeniem:

$$f_4 = \frac{2(1-b^2) g^3 \sin(2T)(1-\cos(2T))}{a \left( \sqrt{1-(b \cos 3\theta)^2} \right)^3}, \quad (20)$$

$$T = \frac{1}{3} \arccos(b \cos 3\theta) \in \left( 0, \frac{\pi}{3} \right).$$

Badane wyrażenie (20) jest nieujemne, ponieważ wszystkie czynniki są nieujemne.

Z przedstawionych zależności wynika, że:

$$D_1 \geq 0 \wedge D_2 \geq 0 \wedge D_3 \geq 0 \quad (21)$$

dla całego badanego zakresu  $r$  i  $\theta$ , a więc potencjał (10) jest wypukłą funkcją tensora naprężenia.

Należy zaznaczyć, że w przypadkach granicznych wartości parametrów  $|b| = 1$ ,  $B = 0$  lub  $A = 0$  należy lokalnie zbadać wypukłość w miejscach, w których funkcja nie jest różniczkowalna, por. [9,13].

## 3. DOBÓR PARAMETRÓW MATERIAŁOWYCH

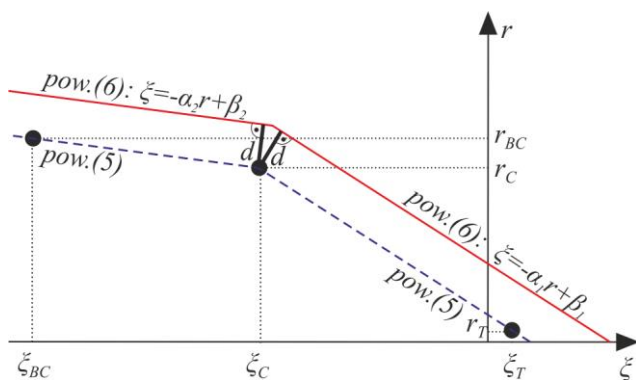
Przedstawiony potencjał zawiera osiem parametrów:  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $a$  oraz  $b$ . Ich wartości określono tak, aby powierzchnia (13) zawierała punkty reprezentujące moment upla-



stycznienia w testach jednoosiowego ściskania i rozciągania, a także w teście dwuosiowego równomiernego ściskania.

Parametry  $\alpha_1$  oraz  $\alpha_2$  określają kąt rozwarcia dwóch stożków Druckera-Pragera, będących obwiednią powierzchni określonej na podstawie potencjału (8), a ich wartości wyznaczono zgodnie z (3) oraz (4). Aby wyznaczyć parametry  $\beta_1$  i  $\beta_2$  wprowadzono dodatkowy parametr geometryczny  $d$ . Szukane wartości są tak dobrane, aby mierzone w przekroju południkowym odległości  $d$  między południkami powierzchni (6) a punktem przecięcia południków powierzchni (5) były sobie równe, por. rys. 8. Stąd:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\sqrt{2}\alpha_1 - 1}{\sqrt{3}}\sigma_C + d\sqrt{1 + \alpha_1^2}, \\ \beta_2 &= \frac{\sqrt{2}\alpha_2 - 1}{\sqrt{3}}\sigma_C + d\sqrt{1 + \alpha_2^2}. \end{aligned} \quad (22)$$



**Rys. 8.** Dobór parametrów  $\beta_1$  i  $\beta_2$ , gdzie  $\xi_{BC} = -2\sigma_{BC}/\sqrt{3}$ ,  $r_{BC} = \sqrt{2/3}\sigma_{BC}$ ,  $\xi_C = -\sigma_C/\sqrt{3}$ ,  $r_C = \sqrt{2/3}\sigma_C$ ,  $\xi_T = \sigma_T/\sqrt{3}$ ,  $r_T = \sqrt{2/3}\sigma_T$ .

Parametry  $A$  i  $B$  dobrano tak, aby przy założeniu, że  $g(0) = 1$  powierzchnia plastyczności związana z proponowanym potencjałem (10) przechodziła przez punkty reprezentujące testy jednoosiowego rozciągania i dwuosiowego równomiernego ściskania, tj.:

$$\begin{aligned} f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_T, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_T\right) &= 0, \\ f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_{BC}, 0, -\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T\right) &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Warunki (23) prowadzą do równania dwukwadratowego na parametr  $A$  postaci:

$$\begin{aligned} c_1^2 A^4 + 2\left\{\frac{2}{3}c_1^2 c_3 c_4 - c_2 a_3^2\right\} A^2 + \\ + \left(\frac{2}{3}c_3^2 - a_3^2\right)\left(\frac{2}{3}c_4^2 - a_3^2\right) &= 0, \end{aligned} \quad (24)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_1\left(\frac{2\sigma_{BC}}{\sqrt{3}} + \beta_2\right) + \alpha_2\left(\frac{2\sigma_{BC}}{\sqrt{3}} + \beta_1\right), \\ a_2 &= \alpha_1\left(\beta_2 - \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}\right) + \alpha_2\left(\beta_1 - \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}\right), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} a_3 &= \left(\frac{2\sigma_{BC}}{\sqrt{3}} + \beta_2\right)\left(\frac{2\sigma_{BC}}{\sqrt{3}} + \beta_1\right) + \\ &- \left(\beta_1 - \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}\right)\left(\beta_2 - \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{3}\alpha_1\alpha_2(\sigma_{BC}^2 - \sigma_T^2), \end{aligned}$$

$$c_1 = a_1^2 - a_2^2, \quad c_2 = a_1^2 + a_2^2,$$

$$c_3 = a_1\sigma_{BC} + a_2\sigma_T, \quad c_4 = a_1\sigma_{BC} - a_2\sigma_T.$$

Szukane wartości parametrów to:

$$A = \frac{1}{c_1} \sqrt{c_2 a_3^2 - \frac{2}{\sqrt{3}} a_1 a_2 a_3 c_6 - \frac{2}{3} c_1 c_3 c_4}, \quad \text{gdzie:}$$

$$c_5 = \sigma_{BC}^2 - \sigma_T^2, \quad c_6 = \sqrt{3a_3^2 - 2c_1 c_5}, \quad B = 2\sqrt{d_1 d_2} \quad (26)$$

$$\text{oraz: } d_1 = \frac{2\sigma_{BC}}{\sqrt{3}} + \beta_1 - \alpha_1 \sqrt{A^2 + \frac{2}{3}\sigma_{BC}^2},$$

$$d_2 = \frac{2\sigma_{BC}}{\sqrt{3}} + \beta_2 - \alpha_2 \sqrt{A^2 + \frac{2}{3}\sigma_{BC}^2}.$$

Funkcję opisującą przekrój dewiatorowy dobrano w taki sposób, aby:

$$g(0) = 1, \quad g\left(\frac{\pi}{3}\right) = k_C, \quad (27)$$

przy czym  $k_C$  jest współczynnikiem kształtu przekroju dewiatorowego [1, 10] i przyjęto go tak, żeby:

$$f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_C, \frac{\pi}{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_C\right) = 0. \quad (28)$$

Rozwiązanie (28) prowadzi do równania dwukwadratowego, którego pierwiastkami są:

$$k_C = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sigma_C}{\sqrt{t_{1,2}^2 - A^2}}, \quad \text{gdzie:}$$

$$t_{1,2} = \frac{\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \frac{\sigma_C}{\sqrt{3}}(\alpha_1 + \alpha_2) \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha_1\alpha_2}, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \left[\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \frac{\sigma_C}{\sqrt{3}}(\alpha_1 + \alpha_2)\right]^2 + \\ &+ \alpha_1\alpha_2 \left[B^2 - 4\left(\frac{\sigma_C}{\sqrt{3}} + \beta_1\right)\left(\frac{\sigma_C}{\sqrt{3}} + \beta_2\right)\right]. \end{aligned}$$

Należy wybrać pierwiastek (29) spełniający (28). Na tej podstawie wyznacza się stałe:

$$a = \frac{\sqrt{3}k_C}{2\sqrt{k_C^2 - k_C + 1}}, \quad b = \frac{3\sqrt{3}k_C(1 - k_C)}{2\sqrt{(k_C^2 - k_C + 1)^3}}. \quad (30)$$

Należy podkreślić, że stałe można znaleźć analitycznie, ale szybsze jest rozwiązanie numeryczne. Wzory (3), (4), (22), (26) oraz (30) są przydatne, jeśli rozpatruje się wzmocnienie materiału i wartości parametrów materiałowych należy wyznaczać osobno w każdym kroku analizy.

## PODSUMOWANIE

W artykule zaproponowano potencjał plastyczny oraz warunek plastyczności, będący rozszerzeniem funkcji Druckera-Pragera, często stosowanej w mechanice gruntu i betonu. Warunek plastyczności jednoznacznie separuje stany bezpieczne i niebezpieczne

materiału poprzez definicję jednej powierzchni, która zależy od trzech niezmienników stanu naprężenia. Przyjęta funkcja umożliwia oddanie zachowania się dość dużej klasy materiałów, dla których obserwuje się istotne różnice odpowiedzi przy ściskaniu i rozciąganiu. Przedstawiony potencjał jest wypukły i różniczkowalny w całej swojej dziedzinie, z wyjątkiem szczególnych (granicznych) przypadków doboru parametrów. Jest to pożądana cecha ze względu na możliwość przeprowadzenia obliczeń analitycznych dla prostych przypadków obciążenia, jak również z uwagi na dogodną implementację w algorytmach metody elementów skończonych. Zaletą potencjału (10) jest jego względna prostota oraz klarowna interpretacja parametrów materiałowych. Przyjęta funkcja pozwala na znalezienie zamkniętych formuł opisujących te parametry na bazie klasycznych testów doświadczalnych.

## BIBLIOGRAFIA

1. ABAQUS: *Theory Manual. Version 6.3.* Hibbit, Karlson & Sorensen Inc., 2002.
2. Ansari F., Qingbin L., *High-strength concrete subjected to triaxial compression.* ACI Materials Journal, Vol. 95, No. 6, 747–755, 1988.
3. de Borst R., *Computational strategies for strongly curved and non-smooth yield criteria with applications to localisation of deformation.* Computational plasticity: Models, software and applications, eds. D.R.J. Owen, E. Hinton and E. Onate, Pineridge Press, Swansea, 237-261, 1989.
4. Chen W.F., Saleeb A.F., *Constitutive equations for engineering materials, Vol. II: Plasticity and modelling.* Elsevier, Amsterdam 1994.
5. Crisfield M.A., *Non-linear finite element analysis of solids and structures.* Vol. I and II, Wiley, Chichester 1991 and 1997.
6. Desai C.S., Siriwardane H.J., *Constitutive laws for engineering materials.* Prentice-Hall, 1984.
7. Godycki-Ćwirko T., *Mechanika Betonu.* Arkady, Warszawa 1982.
8. Jemiolo S., Szwed A., *O zastosowaniu funkcji wypukłych w teorii wyciężenia materiałów izotropowych. Propozycja warunków plastyczności metali.* Prace Naukowe, Budownictwo, z.133, 5-51, Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa 1999.
9. Kanno J., *Nonsmooth Mechanics and Convex Optimization.* CRC Press, 2011.
10. Kamińska I., Szwed A., *O kalibracji parametrów modelu konstytutywnego betonu i badaniach doświadczalnych temu służących.* Beton i konstrukcje z betonu - badania, monografia pod redakcją naukową E. Szmigiery, P. Łukowskiego i S. Jemiolo, 93-110, Seria Monografie Zakładu Konstrukcji Betonowych i Zakładu Materiałów Budowlanych, Warszawa 2015.
11. Kupfer H.B., Gerstle K.H., *Behavior of concrete under biaxial stresses.* Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 99, No. 4, 853–866, 1973.
12. Lade V., Musante H., *Three-dimensional behavior of remolded clay,* Journal of the Geotechnical Engineering Division, Vol. 104, No. 2, 193–209, 1978.
13. Piccolroaz A., Bigoni D., *Yield criteria for quasibrittle and frictional materials: A generalization to surfaces with corners.* International Journal of Solids and Structures, Vol. 46, 3587-3596, 2009.
14. Podgórski J., *Ogólny warunek stanu granicznego dla materiałów izotropowych.* Prace IPPT PAN, nr 17, 1983.
15. Szwed A., *Hipotezy wyciężeniowe i relacje konstytutywne materiałów z uwzględnieniem efektów degradacji.* Rozprawa Doktorska, Wydział Inżynierii Lądowej Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2000.
16. Szwed A., Kamińska I., *Modification of Concrete Damaged Plasticity model. Part I: Modified plastic potential.* MATEC Web of Conferences, Vol. 117, 00160, XXVI R-S-P Seminar, Theoretical Foundations of Civil Engineering, 2017.
17. Tasuji M.E., Slate F.O., Nilson A.H., *Stress-strain response and fracture of concrete in biaxial loading.* ACI Journal, Vol. 75, No. 7, 306–312, 1978.
18. Wojewódzki W., Jemiolo S., Lewiński P.M., Szwed A., *O relacjach konstytutywnych modelujących własności mechaniczne betonu.* Oficyna Wydawnicza PW, Prace Naukowe, Budownictwo z. 128, Warszawa 1995.

## Extended drucker-prager potential for modeling soil and concrete

### Abstract

*In the paper a new plastic potential for soil and concrete is proposed, which reflects basic features that yield surface for the mentioned material exhibits. The introduced function is based on smoothed two Drucker-Prager cones with modified deviatoric section. An influence of eight material parameters on the shape of the yield surface is shown. Closed formulas for values of those parameters are derived. Differentiability of the presented potential is discussed and draft of proof of convexity of the potential is shown.*

Autorzy:

dr inż. **Aleksander Szwed** – Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, a.szwed@il.pw.edu.pl

mgr inż. **Inez Kamińska** – Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, ikam@il.pw.edu.pl