

## WYZNACZANIE SPRĘŻYSTEGO MOMENTU KRYTYCZNEGO NA ZWICHRZENIE BELKI DWUTEOWEJ

### Streszczenie

Zginana belka może utracić stateczność ogólną lub miejscową środka bądź pasa ściskanego w zależności od rodzaju i sposobu obciążenia, kształtu i cech geometrycznych przekroju poprzecznego, długości, warunków podparcia czy też pośrednich więzów sprężystych.

Przy ocenie nośności przekroju belki, należy wyznaczyć moment krytyczny zwichrzenia tj. utraty płaskiej postaci zginania ze skręceniem względem osi wzdłużnej. Tylko dla przypadku obciążenia stałym momentem gnącym znane jest rozwiązanie analityczne w postaci zamkniętej [1]. Inne przebiegi momentów gnących są uwzględniane we wzorze analitycznym poprzez współczynnik  $C_1$  [4].

W pracy przedstawiono rozwiązanie analityczne, zamieszczone w normie [4] ENV 1993-1-1: Eurocode 3 do wyznaczania momentu krytycznego zwichrzenia oraz metodą elementów skończonych z zastosowaniem elementu belkowego na zwichrzenie i powierzchniowego powłokowego. Dla obciążenia siłą skupioną zamieszczono porównanie wyników momentu krytycznego zwichrzenia z obliczeń z wartością wyznaczoną doświadczalnie. Zestawiono również wyniki obliczeń z zamieszczonych metod obliczeń.

W literaturze krajowej znane są opracowania z wynikami badań doświadczalnych, wykonanymi przez m.in. prof. J. Żmuda [2].

### WSTĘP

Przekroje, dla których momenty bezwładności znacznie się różnią  $J_y \gg J_z$  oraz mają relatywnie małą sztywność na skręcanie, przy obciążeniu w płaszczyźnie większej sztywności giętej ulegają wygięciu względem osi słabszej, jest to utrata płaskiej postaci zginania, której towarzyszy skręcenie względem osi wzdłużnej, taką deformację nazywamy zwichrzeniem.

W obliczeniach stanu granicznego elementu zginanego wyznacza się współczynnik  $\chi_{LT}$  redukcyjny dla nośności przekroju na zginanie, do obliczenia którego potrzebna jest wartość momentu krytycznego zwichrzenia  $M_{cr}$ . W artykule przedstawiono różne obliczeniowe metody wyznaczania momentu krytycznego zwichrzenia poprzez normowy wzór, obliczenia programami metody MES i wynik uzyskany z doświadczenia.

Przedstawiono wyniki obliczeń parametrów zwichrzenia ze wzoru [4, 8], programów LTBeam [7] oraz Robot [9], dla trzech przypadków obciążeń: siła skupiona, obciążenie ciągle na długości belki oraz jednoczesne działanie skupionego i ciągłego obciążenia.

### 1. DOŚWIADCZALNE WYZNACZENIE OBCIĄŻENIA KRYTYCZNEGO ZWICHRZENIA

Stanowisko do badań siły krytycznej zwichrzenia przedstawia rys.1 [3]. Obciążenie  $Q$  wykonywała maszyna, mierzone były przemieszczenia pionowe na podstawie, których wyznaczony był kąt skręcenia  $\varphi$  przekroju względem osi wzdłużnej. Następnie, za pomocą metody Southwella wyznaczono wartości  $Q_{cr} = 9,2327 \text{ kN}$

$$M_{cr} = \frac{1}{4} Q_{cr} L = \frac{1}{4} 9,2327 \cdot 2,2 = 5,08 \text{ kNm}$$



Rys.1. Stanowisko badawcze zwichrzenia dwuteownika I80 wykonanie stanowiska: dr inż. K. Dziewiecki, mgr inż. Z. Mazur: U T-H w Radomiu

### 2. WYZNACZENIE MOMENTU ZWICHRZENIA WEDŁUG NORMY ENV 1993-1-1. EUROKODE 3.

Sprężysty moment krytyczny jest obliczany według formuły wyprowadzonej z teorii zwichrzenia [4]

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{(kL)^2} \left\{ \sqrt{\left( \frac{k}{k_w} \right)^2 \frac{I_\omega}{I_z} + \frac{(kL)^2 GI_T}{\pi^2 EI_z} + (C_2 z_g)^2} - (C_2 z_g) \right\}$$

- $C_1$  - współczynnik równoważności rozkładu stałego momentu gnącego względem rzeczywistego rozkładu momentu gnącego,
- $C_2$  - współczynnik określający wpływ współrzędnej przyłożenia siły skupionej względem środka ścinania,
- $z_g$  - odległość między punktem przyłożenia siły a środkiem ścinania,

$k$  i  $k_w$  - współczynniki długości efektywnej, dla podparcia widelkowego wartości są jednostkowe.

Podstawiając do wzoru dane liczbowe dwuteownika zwykłego 180, dla obciążenia siłą skupioną  $Q$  (rys.1) otrzymamy

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{(kL)^2} \left\{ \sqrt{\left( \frac{k}{k_w} \right)^2 \frac{I_\omega}{I_z} + \frac{(kL)^2 GI_T}{\pi^2 EI_z} + (C_2 z_g)^2} - (C_2 z_g) \right\}$$

$$= 1,348 \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 6,29 \cdot 10^4}{2200^2}$$

$$\left\{ \sqrt{\frac{84 \cdot 10^6}{6,29 \cdot 10^4} + \frac{2200^2 \cdot 0,81 \cdot 10^5 \cdot 0,93 \cdot 10^4}{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 6,29 \cdot 10^4} + (0,63 \cdot 40)^2} - (0,63 \cdot 40) \right\} =$$

$$= 5,359 kNm$$

Siła krytyczna zwichrzenia

$$Q_{cr} = \frac{4M_{cr}}{L} = \frac{4 \cdot 5359007,566}{2200} = 9,7437 kN$$

Natomiast, w przypadku obciążenia ciągłego  $q$ , otrzymamy

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{(kL)^2} \left\{ \sqrt{\left( \frac{k}{k_w} \right)^2 \frac{I_\omega}{I_z} + \frac{(kL)^2 GI_T}{\pi^2 EI_z} + (C_2 z_g)^2} - (C_2 z_g) \right\}$$

$$= 1,127 \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 6,29 \cdot 10^4}{2200^2}$$

$$\left\{ \sqrt{\frac{84 \cdot 10^6}{6,29 \cdot 10^4} + \frac{2200^2 \cdot 0,81 \cdot 10^5 \cdot 0,93 \cdot 10^4}{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 6,29 \cdot 10^4} + (0,454 \cdot 40)^2} - (0,454 \cdot 40) \right\} =$$

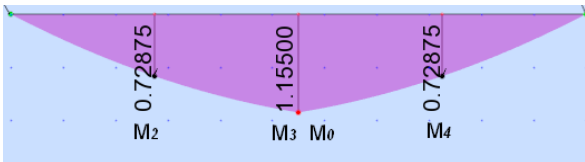
$$= 4,487 kNm$$

Obciążenie ciągle krytyczne zwichrzenia

$$q_{cr} = \frac{8M_{cr}}{L^2} = \frac{8 \cdot 4487}{2200^2} = 7,4165 kN/m$$

Następnie, rozpatrzo równoczesne działanie obciążenia skupionego  $P$  i ciągłego  $q$ .

W celu wyznaczenia wartości współczynnika równoważności momentów  $C_1$  należy z wykresu momentów gnących wyznaczyć wartości  $M_i$  i podstawić do wzoru [6]



Rys.2. Wykres momentu gnącego

$$C_1 = \sqrt{\frac{21M_0^2}{M_0^2 + 6M_2^2 + 8M_3^2 + 6M_4^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{21 \cdot 1,155^2}{1,155^2 + 6 \cdot 0,72875^2 + 8 \cdot 1,155^2 + 6 \cdot 0,72875^2}} = 1,2346$$

$$C_2 = \frac{2L}{M_0 \pi^2} \left[ Q \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right] = \frac{2 \cdot 2,2}{1,155 \pi^2} \left[ 1,0 \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \right] = 0,386$$

$$M_{cr} = 1,2346 \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 6,29 \cdot 10^4}{2200^2}$$

$$\left\{ \sqrt{\frac{84 \cdot 10^6}{6,29 \cdot 10^4} + \frac{2200^2 \cdot 0,81 \cdot 10^5 \cdot 0,93 \cdot 10^4}{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 6,29 \cdot 10^4} + (0,386 \cdot 40)^2} - (0,386 \cdot 40) \right\} =$$

$$= 5,202 kNm$$

W tym przypadku obciążeniowym, zasadniczym problemem jest określenie wartości  $C_2$ , w literaturze można znaleźć różne wzory na wartość  $C_2$ , należy wówczas zwrócić uwagę, że są to opracowania na podstawie badań autorów i odnoszą się do zakresu tych badań i mogą nie być poprawnymi do ogólnego zastosowania.

### 3. NUMERYCZNE WYZNACZANIE MOMENTU KRYTYCZNEGO ZWICHRZENIA

Zastosowano: program LTBeam [7] i program Autodesk Robot Structural Analysis [9].

#### 3.1. Obliczenia programem LTBeam

LTBeam jest darmowym programem służącym do wyznaczania wartości momentu krytycznego metodą elementów skończonych, przy zastosowaniu elementu belkowego o 7 stopniach swobody w każdym węźle. Dodatkowy stopień swobody w stosunku do standardowych (6 st. swobody) modeli belkowych wynika z uwzględnienia deplanacji przekrojów.

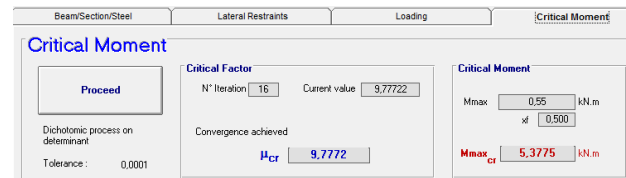
Program umożliwia m.in. uwzględnienie podatności podpór, dowolnego rozkładu momentu zginającego, dodatkowych podpór pośrednich, czy miejsca przyłożenia obciążenia. Wynik uzyskuje się rozwiązując zagadnienie uogólnionego problemu własnego związane z utratą stateczności.

Z obliczeń programem LTBeam [7] (zalecanego w ENV 1993-1-1: Eurocode 3) otrzymano wartość momentu krytycznego

$$M_{cr} = 5,3775 kNm$$

oraz siły krytycznej

$$Q_{cr} = \frac{4M_{cr}}{L} = \frac{4 \cdot 5,3775}{2,2} = 9,7772 kN$$



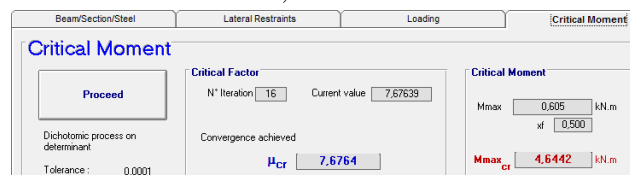
Rys.3. Wyniki obliczeń z programu LTBeam

W przypadku obciążenia ciągłego  $q$  belki, otrzymamy z LTBeam

$$M_{cr} = 4,6442 kNm$$

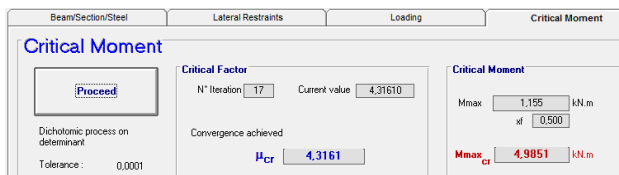
oraz obciążenie ciągle o wartości krytycznej

$$q_{cr} = \frac{8M_{cr}}{L^2} = \frac{8 \cdot 4,6442}{2,2^2} = 7,6764 kN/m$$



Rys.4. Wyniki obliczeń z programu LTBeam

W przypadku obciążenia skupionego  $P$  i ciągłego  $q$ , otrzymamy z LTBeam



Rys.5. Wyniki obliczeń z programu LTBeam

Poszczególne momenty krytyczne wynoszą

$$M_{cr}^Q = 4,3161 \cdot \frac{1}{4} \cdot Q \cdot L = 4,3161 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1,0 \cdot 2,2 = 2,3739 \text{ kNm}$$

$$M_{cr}^q = 4,3161 \cdot \frac{1}{8} \cdot q \cdot L^2 = 4,3161 \cdot \frac{1}{8} \cdot 1,0 \cdot 2,2^2 = 2,6112 \text{ kNm}$$

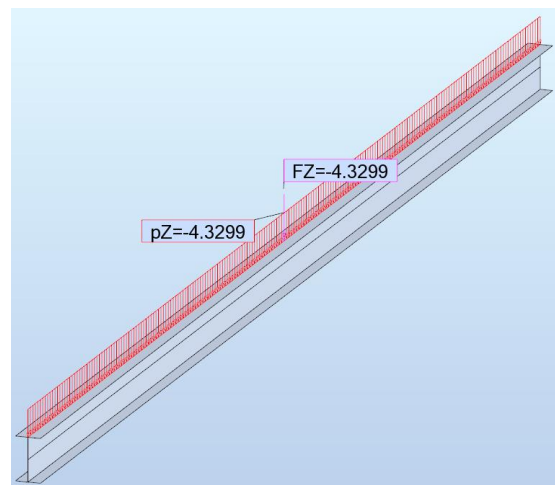
Łączne działające obciążenia, dają wartość momentu krytycznego

$$M_{cr} = M_{cr}^Q + M_{cr}^q = 2,3739 + 2,6112 = 4,9851 \text{ kNm}$$

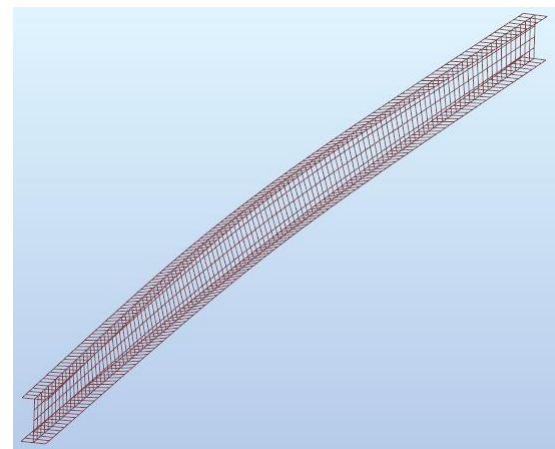
### 3.2. Obliczenia za pomocą programu Autodesk Robot Structural Analysis

Program ten jest zaawansowanym narzędziem służącym do analiz statycznych, stateczności, dynamiki i innych, korzystającym z metody elementów skończonych. Program dedykowany jest do obliczeń konstrukcji budowlanych, ponieważ posiada moduł obliczeń normowych, możliwe jest sprzężenie z innymi programami do wykonania rysunków budowlanych firmy Autodesk.

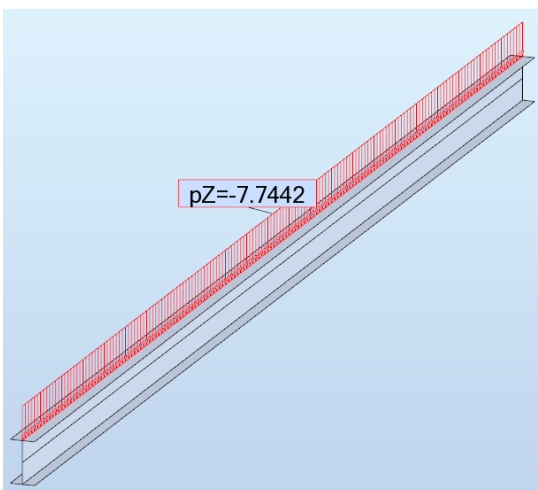
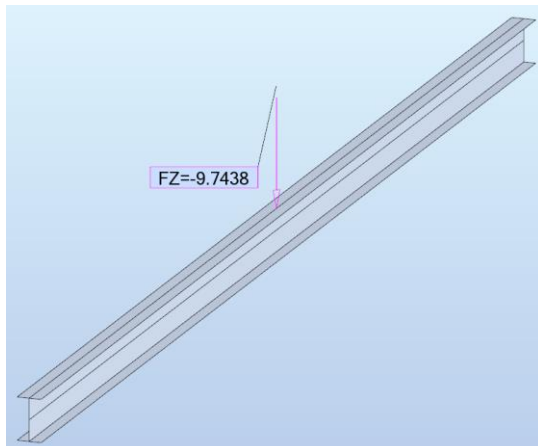
Modelując zginaną belkę za pomocą elementów powłokowych (rys.6), uzyskano rozwiązanie utraty stateczności ogólnej zwanej zwichrzeniem belki.



Rys.6 Modele obliczeniowe belki z obciążeniami



Rys.7 Postać zwichrzenia belki



Wyznaczona z programu wartość siły krytycznej dla obciążenia skupionego

$$Q_{cr} = 9,7438 \text{ kN}$$

oraz wartość momentu krytycznego

$$M_{cr} = \frac{1}{4} Q_{cr} L = \frac{1}{4} 9,7438 \cdot 2,2 = 5,359 \text{ kNm}$$

W przypadku obciążenia ciągłego  $q$ , otrzymamy

$$q_{cr} = 7,7442 \text{ kN/m}$$

oraz wartość momentu krytycznego

$$M_{cr} = \frac{1}{8} q_{cr} L^2 = \frac{1}{8} 7,7442 \cdot 2,2^2 = 4,685 \text{ kNm}$$

W przypadku obciążenia skupionego  $P$  i ciągłego  $q$

$$(Q + q)_{cr} = 4,3299 (Q + q)$$

Poszczególne momenty krytyczne wynoszą

$$M_{cr}^Q = 4,3299 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1,0 \cdot 2,2 = 2,3814 \text{ kNm}$$

$$M_{cr}^q = 4,3299 \cdot \frac{1}{8} \cdot 1,0 \cdot 2,2^2 = 2,6196 \text{ kNm}$$

Łączne działające obciążenia, dają wartość momentu krytycznego

$$M_{cr} = M_{cr}^Q + M_{cr}^q = 2,3814 + 2,6196 = 5,001 \text{ kNm}$$

## PODSUMOWANIE

W przedstawionych wynikach widoczna jest bardzo dobra zgodność wartości  $M_{cr}$  z obliczeń wzorem normy ENV [4] oraz z programów metody elementów skończonych Autodesk Robot Structural Analysis i LTBeam.

Wyniki otrzymane z programów numerycznych LTBeam i Robot są praktycznie identyczne. Zatem można przeprowadzić takie obliczenia zwłaszcza w sytuacjach bardziej złożonego obciążenia, czy innych warunków podparcia belki.

**Tab. 1.** Zestawienie wyników obliczeń

	ENV1993-1-1	LTBeam	Robot
$Q_{cr}[kN]$	9,7437	9,7772	9,7438
$M_{cr}[kNm]$	5,359	5,3775	5,359
$q_{cr}[kN/m]$	7,4165	7,6764	7,7442
$M_{cr}[kNm]$	4,487	4,6442	4,685
$(Q + q)_{cr}$			
$M_{cr}[kNm]$	5,202	4,9851	5,001

Natomiast, niezgodność wyników teoretycznych obliczeń z wynikami doświadczenia, wynosząca około 5%, może być spowodowana: imperfekcjami geometrycznymi belki, sposobem przyłożenia obciążenia poprzez łącznik, którego kierunek ukośny wprowadza dodatkową składową poziomą obciążenia, a ta działa destabilizująco powodując pomniejszenie odporności belki na zwichrzenie, a tym samym zmniejszając wartości  $Q_{cr}$  i  $M_{cr}$ .

## BIBLIOGRAFIA

1. Timoshenko S.P., Gere J.M.: *Teoria stateczności sprężystej*, Arkady, Warszawa 1963.
2. Żmuda J.: *Problemy niestateczności w projektowaniu dźwigarów stalowych*, Studia i Monografie, nr 156, Wydaw. Politechniki Opolskiej, Opole 2004.
3. Stachura S.: *Analityczne i doświadczalne wyznaczenie nośności krytycznej na zwichrzenie belki dwuteowej*, Technika Transportu Szynowego, 12/2015r, str. 2889-2892
4. Norma ENV 1993-1-1: Eurocode 3 – Design of steel structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings, CEN, Brussels 1992.
5. Norma PN-EN 1993-1-1: Eurokod 3 – Projektowanie konstrukcji stalowych – Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków, PKN, Warszawa 2006.
6. Bijak R.: *Zwichrzenie belek dwuteowych podpartych widelkowo z uwzględnieniem ciągłego usztywnienia na skręcanie*, Budownictwo i Architektura 12(2) (2013) str.181-188
7. LTBeam, CTICM (Centre Technique Industriel de la Construction M'etallique-France)
8. Załącznik SN003a-PL-EU
9. Autodesk Robot Structural Analysis

## DETERMINATION OF THE LATERAL BUCKLING MOMENT OF I-SHAPED BEAM

### Abstract

An analytic solution that served for formulation of the formulas contained in PN-90/B-03200 and PN-EN 1993-1-1: 2006 standards for determination of the lateral buckling moment is presented in the paper. The values of that moment were verified by getting a solution with use of Finite Element Method and by experimental measurements. A laboratory stand for testing lateral buckling of I-shaped beam 80 is shown. The results from measurements served for determination of the lateral buckling moment and the obtained value was compared to the results from the formulas and from the FEM program calculations.

Autor:

**Dr inż. Sławomir Stachura**

Uniwersytet Technologiczno-Humanistyczny w Radomiu