

Przemysław Jaszak\*

## Modelowanie gumy za pomocą metody elementów skończonych

W artykule przedstawiono sposób modelowania stanu naprężenia i odkształcenia elementów wykonanych z gumy. Do modelowania wykorzystano metodę elementów skończonych (MES). Dokonano przeglądu najbardziej znanych modeli fenomenologicznych opisujących gęstość energii odkształcenia materiału hiperelastycznego. Przedstawiono rodzaje testów eksperymentalnych, które muszą zostać wykonane, aby poprawnie modelować materiał gumy. Na podstawie otrzymanych wyników eksperymentalnych dokonano weryfikacji przyjętych w procesie symulacji modeli materiałów. Podano przykład symulacji komputerowej, którą wykorzystano w procesie optymalizacji konstrukcji kompensatora gumowo-metalowego.

**Słowa kluczowe:** guma, metoda elementów skończonych, kompensator, hipersprężystość.

## Modelling of the rubber in Finite Element Method

Paper presents the modelling of the strain and stress state of the elements made of rubber. In modelling used Finite Element Method (FEM). Overview of the most popular phenomenological model of the strain energy density in hyperelastic material was presented. The test procedure which have to be carry out to define material model were explained and discussed. Verified and valid the numerical outcome was based on the experimental results. The useful example of the numerical simulation of the rubber component was shown based on design way of the rubber bellow.

**Keywords:** rubber, finite element method, compensator, hyperelasticity.

### 1. Wprowadzenie

Obecnie metoda elementów skończonych (MES) stanowi podstawowe narzędzie w rękach inżyniera konstruktora bądź analityka prowadzącego symulację stanu wyężenia konstrukcji mechanicznych. Do przeprowadzenia symulacji z wykorzystaniem (MES) wystarczy wykonać kilka podstawowych kroków, a mianowicie: zbudować model geometryczny (przy użyciu technik CAD), dokonać podziału geometrii na elementy skończone, zdefiniować model materiału (z którego wykonano element), wprowadzić tzw. warunki brzegowe w postaci utwierdzenia i obciążenia analizowanego modelu. W przypadku części wykonanych z metalu, w zakresie

odkształceń czysto sprężystych, do utworzenia modelu przestrzennego stanu naprężenia (Rys. 1) – jako modelu materiału – wystarczy wprowadzić dwie wielkości: moduł Younga  $E$  oraz liczbę Poissona  $\nu$ .

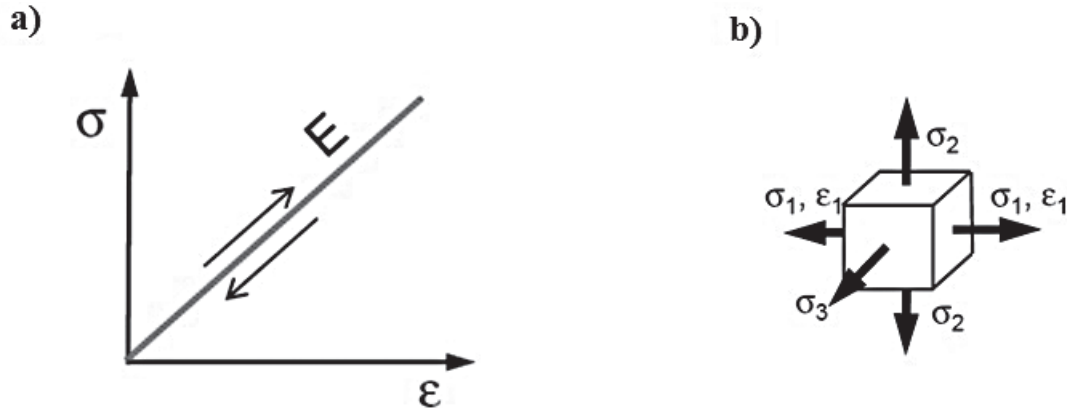
Dla takiego stanu, odkształcenie w danym kierunku osi może zostać obliczone z zależności:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]\end{aligned}\quad (1)$$

\*Politechnika Wrocławska,  
Wydział Mechaniczno-Energetyczny,  
Zakład Podstaw Konstrukcji i Maszyn  
Przepływowych  
e-mail: przemyslaw.jaszak@pwr.edu.pl,  
tel. 71/ 320 48 25

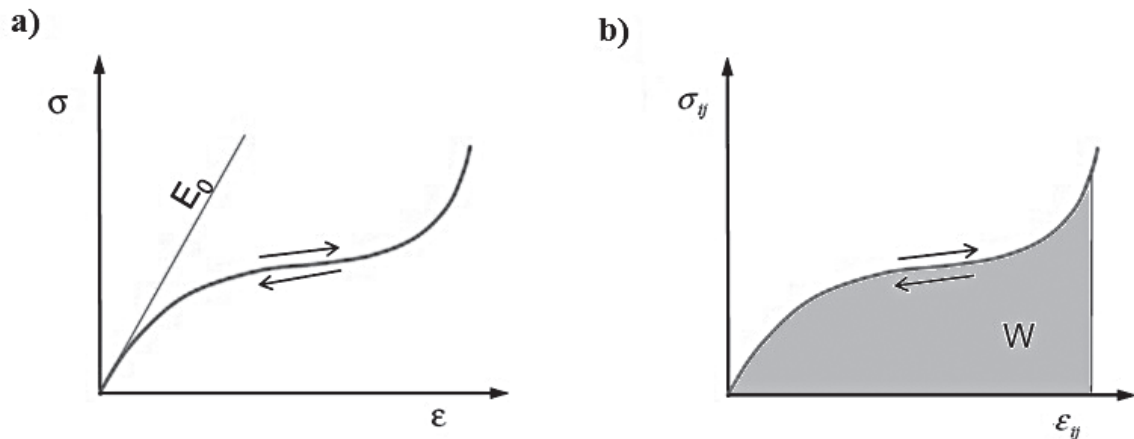
**Dr inż. Przemysław Jaszak** ur. w 21.06.1983 r. w Wałbrzychu. Absolwent Wydziału Mechaniczno-Energetycznego Politechniki Wrocławskiej. Od 2014 roku adiunkt naukowo-dydaktyczny w zakładzie Podstaw Konstrukcji i Maszyn Przepływowych Politechniki Wrocławskiej. Naukowo specjalizuje się w dziedzinie techniki uszczelniania maszyn i urządzeń. Zainteresowania zawodowe to głównie liniowe i nieliniowe zagadnienia metody elementów skończonych w konstruowaniu i analizie maszyn.





Rys. 1. Wieloosiowy stan naprężenia w elemencie odkształcanym w zakresie sprężystym: a) charakterystyka naprężenie-odkształcenie w zakresie czysto sprężystym; b) element poddany trójosiowemu stanowi odkształcenia/naprężenia [4]

Fig. 1. Multiaxial state of stress in element under linear stretch: a) uniaxial characteristic in linear strain; b) element subjected to triaxial strain/stress [4]



Rys. 2. Charakterystyki naprężenie-odkształcenie typowych materiałów hipersprężystych: a) charakterystyka odkształcenia nieliniowego materiału hipersprężystego; b) pole powierzchni pod krzywą reprezentujące ilość energii zgromadzonej w materiale hipersprężystym [4]

Fig. 2. Typical the stress and strain characteristic of the hyperelastic material: a) characteristic of nonlinear hyperelastic material; b) area under curve determines the amount of energy stored in hyperelastic material [4]

Guma w zakresie odkształceń powyżej 5% jest materiałem o nieliniowym przebiegu relacji naprężenie-odkształcenie (Rys. 2a). Z tego względu zdefiniowanie takiego materiału jest bardziej złożone.

Do zdefiniowania materiału gumy wykorzystuje się modele konstytutywne oparte na tzw. wielomianie opisującym gęstość energii odkształcenia  $W$ , zgromadzonej w objętości materiału. Wielkość tej energii opisuje pole powierzchni pod wykresem krzywej (Rys. 2b). Relacja naprężenie-odkształcenie jest otrzymywana z zależności (2).

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (2)$$

W ciągu kilkudziesięciu lat powstało wiele propozycji wielomianu opisującego gęstość energii odkształ-

cenia gumy [1]. Większość tych modeli bazuje na tzw. niezmiennikach odkształcenia (3) lub współczynnikach rozciągania (4).

$$W = \left( \bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3 \right) \quad (3)$$

$$W = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (4)$$

gdzie:

$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$  - pierwszy niezmiennik odkształcenia,  
 $I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2$  - drugi niezmiennik odkształcenia,  
 $I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1 + \left( \frac{\Delta V}{V} \right)$  - trzeci niezmiennik odkształcenia,  
 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  współczynniki rozciągania dla trzech kierunków osi kartezjańskiego układu współrzędnych.

Dla jednego kierunku osi współczynnik rozciągania jest wyrażony jako:

$$\lambda = \frac{l_1}{l_0} = \frac{l_1 - l_0 + l_0}{l_0} = \varepsilon + 1 \quad (5)$$

gdzie:  $l_0$  – początkowa długość rozciąganej próbki,  $l_1$  – długość próbki pod zadaniem obciążeniem.

Fenomenologiczny model energii odkształcenia hipersprężystych materiałów nieściśliwych z reguły przyjmuje postać wielomianu  $N$ -rzędu:

$$W = \sum_{i+j=N} C_{ij} (\bar{I}_1 + 3)^i (\bar{I}_2 - 3)^j \quad (6)$$

gdzie:  $C_{ij}$  – stała materiałowa.

Do najbardziej znanych należą modele: Neo-Hookean, Mooneya–Rivlina czy Arruda–Boyce. Należy też podkreślić, że wybór właściwego modelu zależy przede wszystkim od zakresu, w którym przewiduje się przeprowadzenie symulacji odkształcenia. W przypadku niewielkich odkształceń, tj. do 10%, najlepszym odwzorowaniem właściwości materiału jest model Neo-Hookean (zapropozowany przez Rivlina):

$$W = C_{10} (\bar{I}_1 - 3) \quad (7)$$

Przy większych zakresach odkształcenia (od 10% do 300%) lepsze przybliżenie zapewnia model zaproponowany przez Mooneya i Rivlina:

$$W = C_{10} (\bar{I}_1 - 3) + C_{01} (\bar{I}_2 - 3) \quad (8)$$

Bardzo duże odkształcenia, dochodzące do 700%, z dobrą dokładnością można odwzorować przy zastosowaniu modelu zaproponowanego przez Yeoha:

$$W = C_{10} (\bar{I}_1 - 3) + C_{20} (\bar{I}_1 - 3)^2 + C_{30} (\bar{I}_1 - 3)^3 \quad (9)$$

Ponadto wybór właściwego modelu zależy od gatunku i rodzaju kauczuku (Tabela 1).

**Tabela 1.** Rodzaje gumy i modele dające ich najlepsze odwzorowanie w symulacji [4]

**Table 1.** Different types of the rubber and the best material model of their simulation [4]

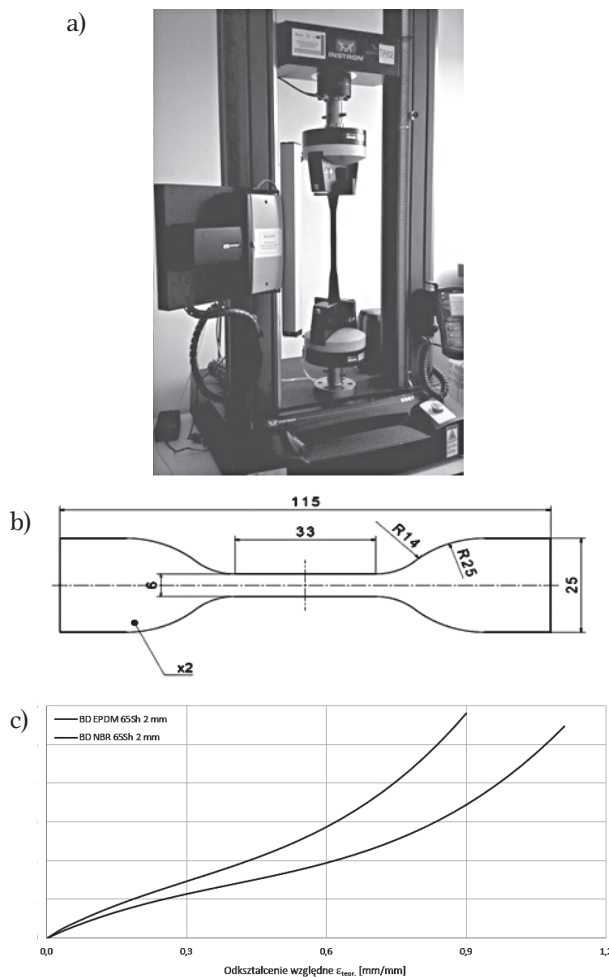
Rodzaj kauczuku	Symbol	Model
Nitrylowy	NBR	Neo-Hookean
Chloroprenowy	CR	Arruda–Boyce
Naturalny	NBR	Yeoha
Etylenowo-propylenowo-dienowy	EPDM	Mooneya–Rivlina

Sam wybór modelu materiału nie gwarantuje jeszcze pełnego sukcesu w dokładnym odwzorowaniu odkształcenia gumy. Kolejnym niezbędnym krokiem jest właściwe zdefiniowanie stałych wielomianów (6–9). W niektórych źródłach [4], można znaleźć zależność tych współczynników od takich wielkości fizycznych jak

moduł Younga czy twardość Shore’a. Niemniej jednak najbardziej miarodajną metodą na określenie tych stałych jest przeprowadzenie testów eksperymentalnych, polegających m.in. na jednoosiowym oraz dwuosiowym rozciąganiu gumowych próbek. W przypadku materiałów charakteryzujących się ściślnością dodatkowym testem jest przeprowadzenie ściskania hydrostatycznego.

## 2. Metody badań gumy

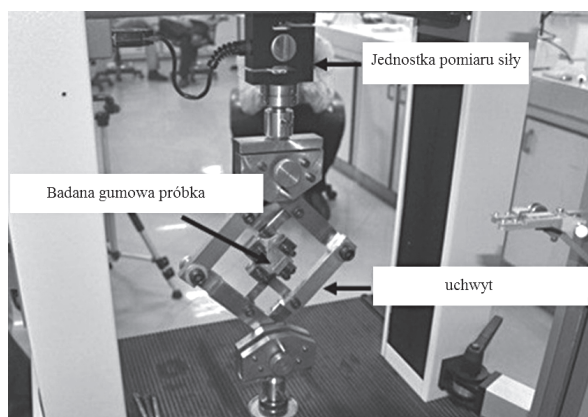
Podstawowym testem laboratoryjnym w badaniach gumy jest próba jednoosiowego rozciągania. Próbę tę wykonuje się zgodnie z obowiązującą normą [12], która ściśle precyzuje warunki prowadzenia badań i określa wymiary próbek. Na Rysunku 3 przedstawiono maszynę wytrzymałościową oraz kształt i wymiary próbki. W wyniku przeprowadzonych badań i obliczeń analitycznych otrzymuje się krzywą rozciągania jak na Rys. 3c.



**Rys. 3.** Próba jednoosiowego rozciągania gumy: a) maszyna wytrzymałościowa Instron model 5967; b) wymiary próbki wiósełkowej; c) typowa charakterystyka jednoosiowego rozciągania gumy EPDM i NBR

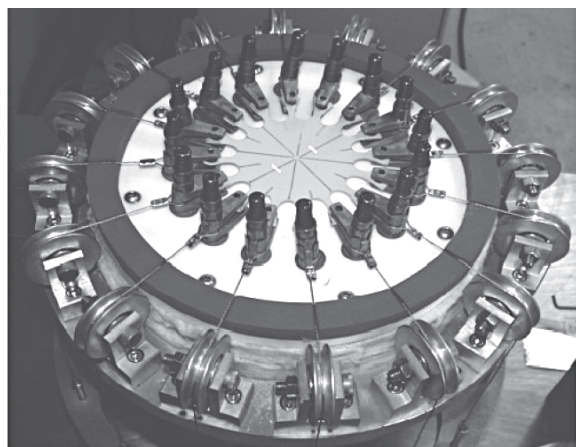
**Fig. 3.** Uniaxial test of rubber: a) test rig Instron model 5967; b) sample dimension; c) typical characteristic of the uniaxial curve of EPDM and NBR rubber

Próba dwuosioowego rozciągania daje bardziej praktyczny i szerszy obraz zachowania się gumy pod obciążeniem, zwłaszcza wielokierunkowym. W większości przypadków, elementy wykonane z gumy, takie jak: membrany, elastyczne powłoki, mieszki osłonowe czy uszczelnienia, pracują w wieloosiowym stanie naprężenia/odkształcenia. W przypadku przeprowadzenia testu realizującego wieloosiowe odkształcenie pojawia się pewna nieścisłość, ponieważ – jak dotąd – nie sprecyzowano żadnej normy, która określałaby, w jaki sposób należy prowadzić badania i jaki przyjąć kształt próbek. W związku z powyższym, w ostatnich latach zaproponowano kilka rozwiązań przeprowadzenia tego testu [2, 3, 7, 10]. Jedną z metod polega na użyciu specjalnego uchwytu zamontowanego w szczękach maszyny do jednoosiowego rozciągania. W miarę przesuwania się szczęk maszyny rozciąganie próbki przebiega w dwóch kierunkach (Rys. 4).



Rys. 4. Dwuosioowe rozciąganie gumowej próbki [10]  
Fig. 4. Biaxial stretch of the rubber

Powstały także bardziej złożone konstrukcje maszyn do przeprowadzania tego rodzaju badań (Rys. 5).



Rys. 5. Maszyna do dwuosioowego rozciągania gumy [7]  
Fig. 5. Test rig used to determination of the biaxial characteristic of the rubber [7]

Próbka w kształcie rozety jest chwyтана w kilku punktach na obwodzie. Przesuwający się w górę bęben maszyny powoduje rozciąganie rozety. Na każdej ze stalowych linek chwytaków są zamocowane czujniki rejestrujące siłę, natomiast pomiaru odkształcenia można dokonywać różnymi technikami, np. ekstensometryczną lub optyczną.

Pewnego rodzaju alternatywą próby dwuosioowego rozciągania jest metoda BIM (Bubble Inflation Method) [6], zmodyfikowana przez autora niniejszego artykułu w stosunku do zaproponowanych wcześniej sposobów jej realizacji. Idea pomiaru polega na tzw. nadmuchiwanie „bańki”. Próbka w postaci gumowego krążka umieszczona między dwoma metalowymi kołnierzami połączonymi śrubami, tworzy z nimi szczelną komorę (Rys. 6). Procedura badań polega na podawaniu do komory gazu o odpowiednim ciśnieniu (Rys. 6a). Na skutek wzrostu ciśnienia w komorze gumowy krążek zaczyna się stopniowo odkształcać, tworząc bańkę (Rys. 6b). Dzięki rejestracji obrazu za pomocą kamery, w dowolnej chwili można otrzymać niezbędne dane, takie jak promień bańki oraz jej wysokość od bazy pomiarowej (Rys. 7). Zgodnie z założeniem napompowana membrana/bańka jest poddana dwuosioowemu naprężeniu. Dla takiego założenia słuszne jest spełnienie warunku [6]:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\frac{1}{\varepsilon_z} = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{t}{t_0}\right) = \ln\left(1 + \left(\frac{h}{a}\right)^2\right) \quad (10)$$

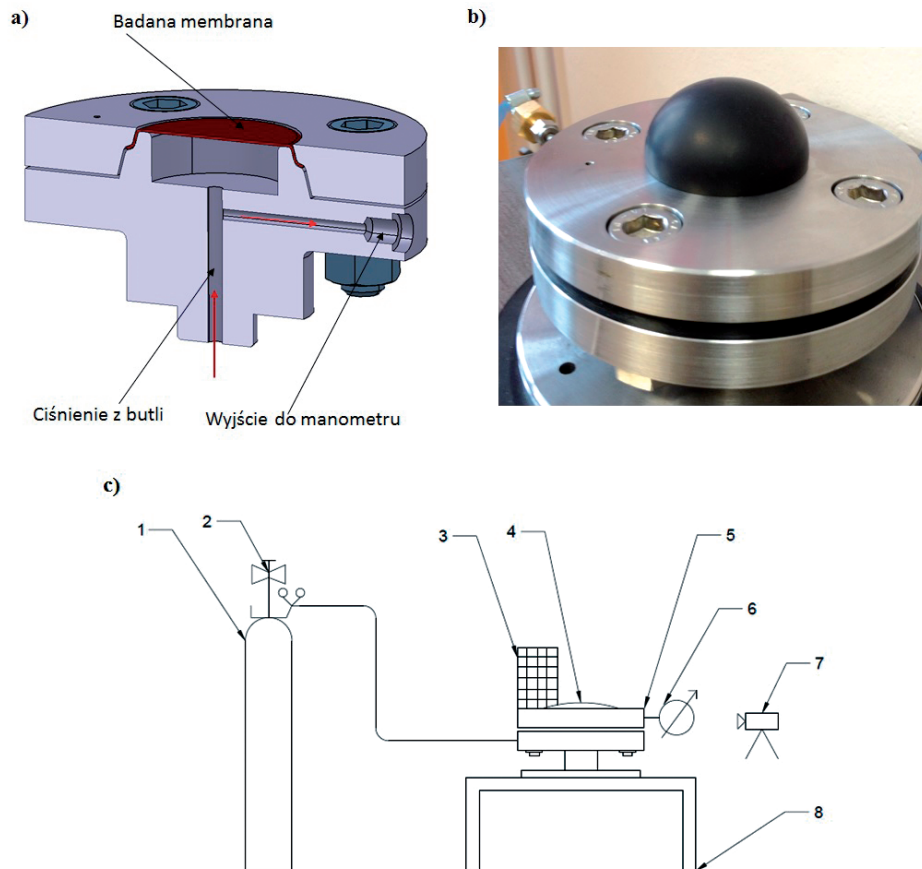
gdzie:  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  – odkształcenia dla trzech kierunków osi kartezjańskiego układu współrzędnych,  $t_0$  – początkowa grubość próbki,  $t$  – grubość próbki pod obciążeniem,  $h$  – wysokość bańki od podstawy kołnierza,  $a$  – promień otworu w kołnierzu.

Ponadto, korzystając ze wzorów na naprężenie w cienkościennych powłokach, można określić naprężenie obwodowe rozciągniętej „bańki” (Rys. 8):

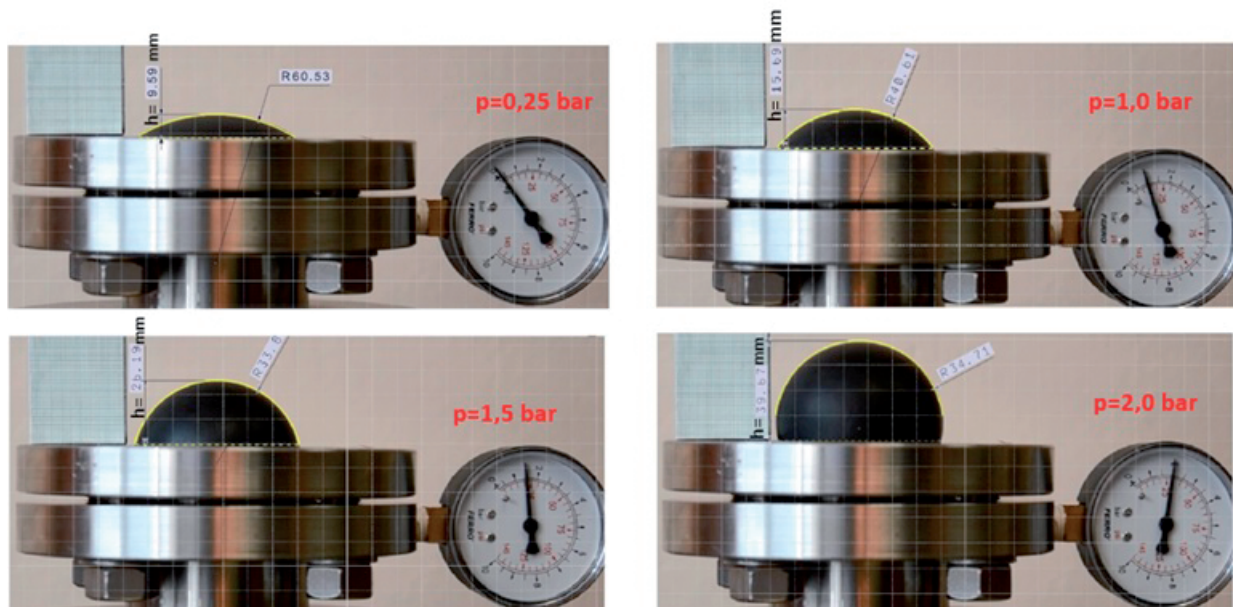
$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{pR}{2t_0} \quad (11)$$

Następnie z zależności (10) i (11) wyznacza się krzywą naprężenia w funkcji odkształcenia w próbie dwuosioowego rozciągania gumowej próbki.

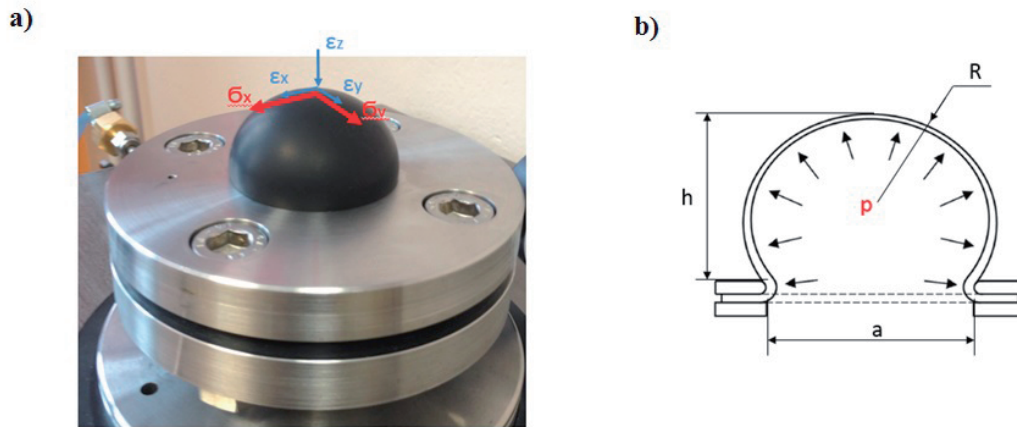
Uzupełnieniem współczynników obliczeniowych równania wielomianu mogą być charakterystyki otrzymane z testów realizujących czyste ścinanie lub ściskanie hydrostatyczne gumy. Wybór właściwego testu zależy przede wszystkim od przewidywanego stanu obciążenia, jakiemu będzie poddany analizowany element.



Rys. 6. Stanowisko do badań dwuosiowego rozciągania gumy metodą BIM: a) model złącza kołnierzewego; b) widok napompowanej membrany; c) schemat stanowiska badawczego: 1 – butla z gazem, 2 – zawór regulacyjny, 3 – podziałka milimetrowa, 4 – gumowa próbka, 5 – połączenie kołnierzowe, 6 – manometr, 7 – kamera, 8 – stolik  
 Fig. 6. Test rig to biaxial stretch of rubber by means of BIM method: a) flange joint; b) view of inflated diaphragm; c) scheme of the test rig: 1 – reservoir, 2 – regulating valve, 3 – milimetric scale, 4 – rubber sample, 5 – flange joint; 6 – manometer, 7 – camera, 8 – table



Rys. 7. Rejestracja obrazu pompowanej bańki w kolejnych krokach wzrostu ciśnienia  
 Fig. 7. The picture registration of the inflated bubble on the subsequence increasing of the pressure

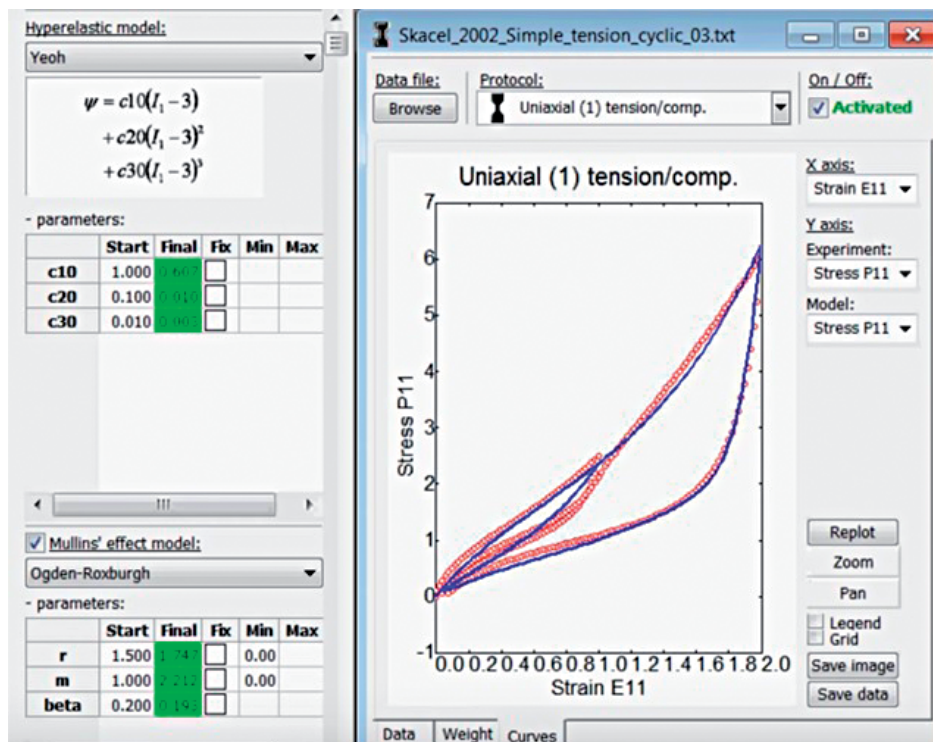


Rys. 8. Rozkład naprężenia i odkształcenia w membranie wskutek wzrostu ciśnienia  
 Fig. 8. Stress and strain distribution in the diaphragm due to pressure increase

### 3. Wyznaczanie stałych materiałowych

Mając do dyspozycji różnego rodzaju charakterystyki mechaniczne gumy, do określenia współczynników obliczeniowych korzysta się z tzw. metody dopasowania krzywej. Metoda ta polega na dopasowaniu krzywej regresji do punktów uzyskanych z pomiarów. Procesu tego można dokonywać metodą prób i błędów, wprowadzając intuicyjnie wartości współczynników danego modelu fenomenologicznego lub skorzystać z odpowiedniego na-

rzędzia. Jednym z nich jest darmowe oprogramowanie Hyperfit [13]. Po wprowadzeniu danych z eksperymentu i wyborze właściwego modelu, program automatycznie dopasowuje krzywą regresji i wyznacza współczynniki obliczeniowe wielomianu. Można także odwzorować model materiału z uwzględnieniem efektu tłumienia tarcie wewnętrzne – pętli histerezy (Rys. 9). Niekiedy krzywe rozciągania, szczególnie przy bardzo dużym zakresie odkształcenia, mają wiele punktów przegięcia, dlatego też, aby uzyskać właściwe dopasowanie, należy wybrać modele wielomianów o wyższych rzędach.

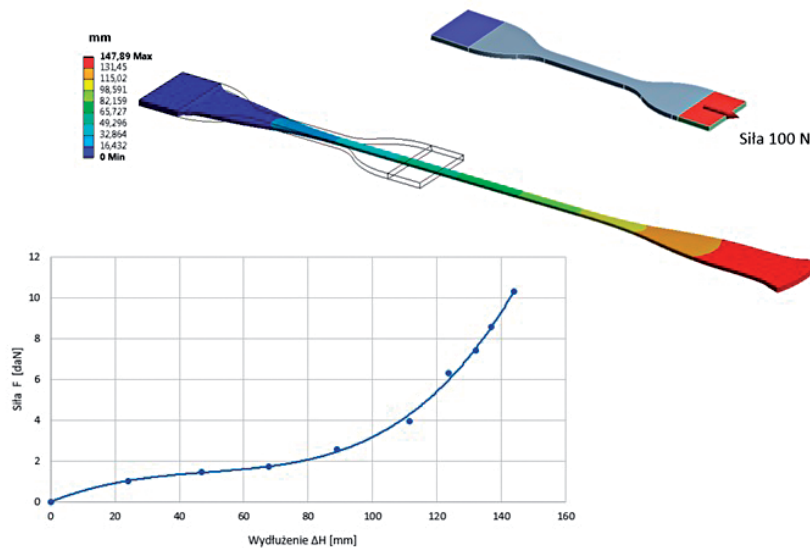


Rys. 9. Okno programu Hyperfit [13]  
 Fig. 9. Window of the Hyperfit software [13]

#### 4. Weryfikacja danych eksperymentalnych

Po kompletnym sprecyzowaniu danego modelu materiału gumy, ostatnim krokiem jest sprawdzenie, czy dany model oraz wyznaczone stałe zostały dobrane prawidłowo. Najlepszym potwierdzeniem jest porównanie zachowania się materiału rzeczywiste-

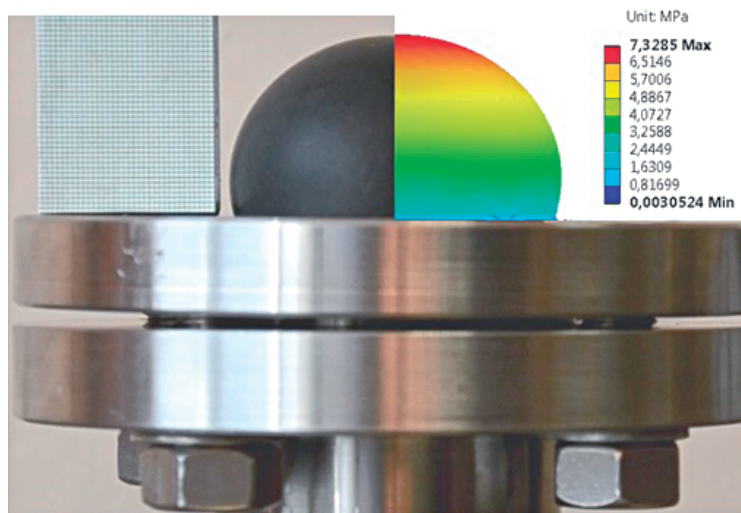
go z przeprowadzoną symulacją. Definiując ten sam poziom obciążenia, można porównać, czy odkształcenia mieszczą się w tym samym zakresie. Ogólnie przyjmuje się, że wyniki uzyskane na drodze symulacji są prawidłowe, jeżeli błąd nie przekracza 5% w stosunku do przeprowadzonego eksperymentu [8]. Na Rysunku 10 porównano symulację jednoosiowego rozciągania próbki wióslowej z wynikami eksperymentalnymi.



**Rys. 10.** Porównanie wyników symulacji jednoosiowego rozciągania gumowej próbki z danymi eksperymentalnymi  
**Fig. 10.** The comparison of the numerical result of uniaxial stretch of rubber in respect to experimental data

Jak widać, przy obciążeniu próbki siłą 100 N jej przemieszczenie wyniosło 147,89 mm. Analizując charakterystykę rozciągania próbki, można stwierdzić, że przy tym samym obciążeniu przemieszczenie jest zbliżone do rezultatów otrzymanych w symulacji.

Na Rysunku 11 przedstawiono porównanie wyników symulacji rozciągania dwuosiowego z wynikami testu. Jak widać, nałożenie profilu odkształcenia bańki uzyskanego na drodze symulacji oddaje bardzo dokładnie symetrię profilu obrazu zarejestrowanego przez kamerę podczas eksperymentu.



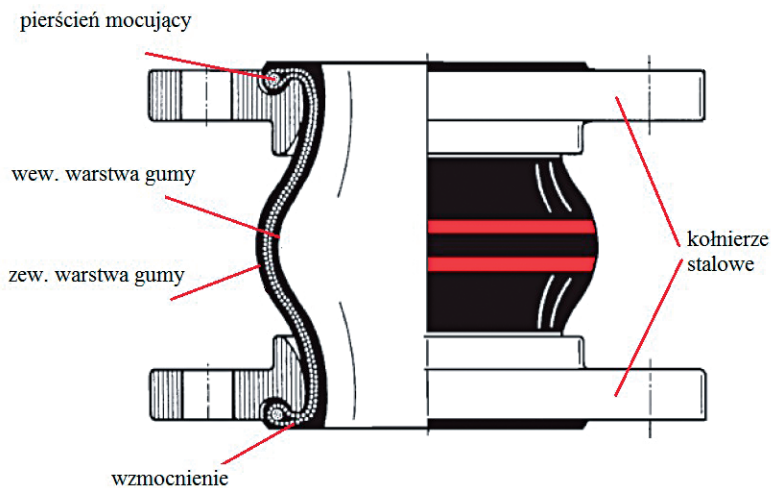
**Rys. 11.** Porównanie symulacji dwuosiowego rozciągania elastycznej membrany z wynikami otrzymanymi eksperymentalnie

**Fig. 11.** The comparison of the numerical results of biaxial stretch of rubber diaphragm in respect to experimental result

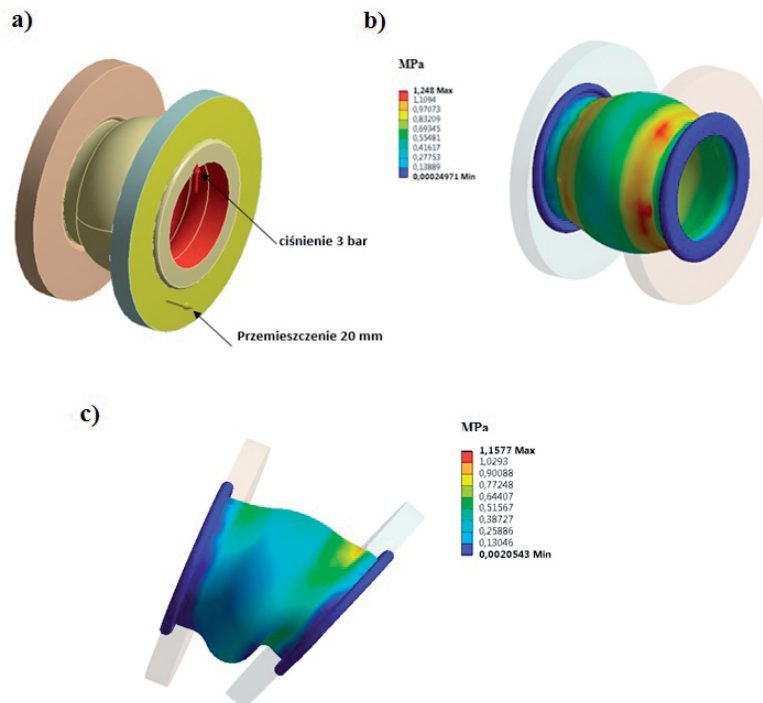
## 5. MES w projektowaniu kompensatora gumowo-metalowego

Guma jako element konstrukcyjny ma wiele zalet, takich jak: dobre tłumienie drgań, bardzo dobre właściwości uszczelniające, odznacza się wysokim poziomem elastyczności, dzięki czemu znajduje zastosowanie w różnym rodzaju osłonach przegubów

czy amortyzatorach itp. Poniżej przedstawiono proces modelowania stanu naprężenia i odkształcenia kompensatora gumowo-metalowego. Kompensator taki jest elementem instalacji rurociągowej, która odpowiada za kompensację przemieszczeń rurociągu wynikających z odkształceń cieplnych. Ponadto redukuje siły osiowe, a także tłumia drgania. Konstrukcję typowego kompensatora gumowo-metalowego przedstawiono na Rys. 12.



Rys. 12. Schemat budowy kompensatora gumowo-metalowego  
Fig. 12. Scheme of the metal-rubber bellow



Rys. 13. Symulacja stanu odkształcenia i naprężenia w kompensatorze gumowo-metalowym: a) warunki brzegowe; b) naprężenie w membranie wskutek ciśnienia i rozciągania kompensatora; c) naprężenie w membranie wskutek ciśnienia i przemieszczenia kąтового kompensatora

Fig. 13. The numerical simulation of the bellow under different load case: a) boundary condition; b) stress distribution in bellow's diaphragm due to internal pressure and longitudinal deflection; c) stress distribution in bellow's diaphragm due to internal pressure and angular deflection



Kompensator gumowy jest przeznaczony głównie do instalacji transportujących gorącą wodę użytkową, o stosunkowo niskim ciśnieniu, tj. do 16 bar. Opisane wyżej techniki symulacji komputerowej, z wykorzystaniem zaawansowanych modeli odzwierciedlających właściwości gumy, a także przeprowadzone testy eksperymentalne pozwoliły zaprojektować kompensator przeznaczony do wyższej klasy ciśnienia, tj. 25 bar. Optymalizacja konstrukcji polegała między innymi na doborze odpowiedniej grubości warstwy wzmacniającej gumową membranę kompensatora. Oceny poprawności konstrukcji dokonywano za pomocą symulacji komputerowej z wykorzystaniem nieliniowego modelowania metodą elementów skończonych. Dysponując pozyskanymi uprzednio danymi eksperymentalnymi, zdefiniowano model materiału gumy oraz części składowych kompensatora, zadano właściwe warunki brzegowe w postaci ciśnienia wywieranego na wewnętrzną część membrany, zdefiniowano stosowane przemieszczenia (Rys. 13a). W efekcie obliczeń MES otrzymano rozkład naprężenia obwodowego w warstwie gumy (Rys. 13b i 13c). Oczywiście w ostatniej fazie prac badawczych prototyp kompensatora powinien zostać przebadany na stanowisku badawczym, ponieważ każda symulacja komputerowa jest pewnym przybliżeniem rzeczywistości. Takie podejście w konstruowaniu elementów wykonanych z gumy pozwala przede wszystkim ograniczyć liczbę prototypów finalnej konstrukcji.

## 6. Podsumowanie

Jak wykazano w artykule, modelowanie nieliniowych zagadnień w metodzie elementów skończonych ma bardzo obszerne zastosowanie. W większości zespołów mechanicznych guma jest elementem nieodzownym. Charakteryzuje się bowiem dobrymi właściwościami mechanicznymi oraz izolacyjnymi, w szczególności tłumiącymi drgania. Poprawny model jej stanu naprężenia czy odkształcenia sprowadza się do odpowiedniego zdefiniowania modelu materiału. Jako uzupełnienie danych materiałowych jest niezbędne przeprowadzenie testów laboratoryjnych. Często wybór odpowiedniego testu decyduje o poprawności uzyskanych rezultatów. Należy podkreślić, że MES jest metodą przybliżoną, obciążoną pewnym błędem. Niemniej jednak wyniki uzyskane tą metodą dają bardzo dobre przybliżenie do rzeczywistości.

## Literatura

1. Ali A., Hosseini M., Sahari B.B., "A Review of Constitutive Models for Rubber-Like Materials", *Am. J. Eng. Appl. Sci.*, 2010, 3 (1), 232–239.
2. Bojtos A., Ábrahám G., "Optical measuring system for equibiaxial test of hyperelastic rubber-like materials", *9th Youth Symposium on Experimental Solid Mechanics*, Trieste, Italy, July 7–10, 2010, 17–173.
3. Brieu M., Diani J., Bhatnagar N., "A New Biaxial Tension Test Fixture for Uniaxial Testing Machine – A Validation for Hyperelastic Behavior of Rubber-like Materials", *J. Test. Eval.*, 2007, 35 (4), 1–9.
4. Jakel R., "Analysis of Hyperelastic Materials with MECHANICA", Presentation for the 2nd SAXSIM Technische Universität Chemnitz, 27. April 2010 Rev. 1.0 Theory and Application Examples.
5. Javorik J., Stanek M., "The Shape Optimization of the Pneumatic Valve Diaphragms", *Int. J. Math. Comput. Simulat.*, 2011.
6. Murphy J.S., Hanley N., "The Significance of Equi-biaxial Bubble Inflation in Determining Elastomeric Fatigue Properties" w: *Elastomers*, red. A. Boczkowska, InTech 2012.
7. Palmieri G., Chiappini G., Sasso M., Papalini S., "Hyperelastic Materials Characterization by Planar Tension Tests and Full-field Strain Measurement", *Proceedings of the SEM Annual Conference*, June 1–4, 2009, Albuquerque, New Mexico, USA 2009, Society for Experimental Mechanics Inc.
8. Rusiński E., Czmochoński J., Smolnicki T., *Zaawansowana metoda elementów skończonych w konstrukcjach nośnych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2000.
9. Santos D., Batalha G.F., "Mechanical behaviour characterizing and simulation of polyacrylate rubber", *J. Achiev. Mater. Manuf. Eng.*, 2010, 38 (1), 33–40.
10. Seibert H., Scheffer T., Diebels S., "Biaxial Testing of Elastomers – Experimental Setup, Measurement and Experimental Optimisation of Specimen's Shape", 2014, *Tech. Mech.*, 34 (2), 72–89.
11. Shahzad M., Kamran A., Zeeshan Siddiqui M., Farhan M., "Mechanical Characterization and FE Modelling of a Hyperelastic Material", *Mat. Res.*, 2015, 18 (5), 918–924.
12. PN-ISO 37:2007 „Guma i kauczuk termoplastyczny – Oznaczanie właściwości wytrzymałościowych przy rozciąganiu”.
13. "HYPERFIT" – Curve fitting software for compressible hyperelastic material models.