

Adam ŻUCHOWSKI

LINEARYZACJA DYNAMIKI MODELI WIENERA- -HAMMERSTEINA ORAZ UPRASZCZANIE NIELINIOWYCH MODELI DYNAMIKI TORÓW POMIAROWYCH DLA SYGNAŁÓW WEJŚCIOWYCH WOLNOZMIENNYCH

STRESZCZENIE *Wykorzystując modele zastępcze, uproszczone dla liniowych modeli dynamiki, tworzone przy wykorzystaniu rozwinięcia funkcji podcałkowej splotu w szereg Taylora, stosunkowo dokładne dla sygnałów wejściowych wolnozmiennych i gładkich można dokonać prostej, pełnej linearyzacji modelu Wienera-Hammersteina i takiego przekształcenia innych, wspomnianych modeli, które ułatwia interpretację zachowania się toru pomiarowego. W artykule przedstawiono odpowiednie zależności i wyniki symulowanych przykładów.*

Słowa kluczowe: dynamika obiektów, modele nieliniowe, metoda linearyzacji

1. WSTĘP

Założymy, że na wejście liniowego obiektu o charakterystyce impulsowej $k(t)$ przy zerowych warunkach początkowych został podany sygnał $x(t)$ wolnozmienny w stosunku do prędkości zmian $k(t)$ i gładki. Po rozwinięciu funkcji podcałkowej splotu członu $x(t-v)$ w szereg Taylora i wprowadzeniu momentu i -tego rzędu charakterystyki impulsowej $m_i(t)$, dla sygnału wyjściowego $y(t)$ otrzymuje się wzór [2, 4]:

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^i}{i!} \right] \cdot m_i(t) \cdot x^{(i)}(t) \quad \text{gdzie} \quad m_i(t) = \int_0^t v^i \cdot k(v) \cdot dv \quad (1)$$

prof. dr hab. inż. Adam ŻUCHOWSKI

e-mail: adam.zuchowski@zut.edu.pl

Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie,
Wydział Elektryczny, Katedra Sterowania i Pomiarów,
Al. Piastów 42, 70-310 Szczecin

PRACE INSTYTUTU ELEKTROTECHNIKI, zeszyt 272, 2016

lub w warunkach, gdy sygnał wejściowy $x(t)$ jest gładki (przy małym udziale pochodnych rzędu wyższego niż pierwszy) – wzór przybliżony:

$$y(t) = h(t) \cdot x[t - t_0(t)], \quad t_0 \cdot (t) = m_1(t) / m_0(t) \quad (2)$$

$h(t)$ jest charakterystyką skokową obiektu.

Wzór (2) można wykorzystać do linearyzacji, lub uproszczeń niektórych, nieliniowych modeli dynamiki obiektów. Wykorzystano tu dwa pierwsze człony wzoru (1), wykorzystanie pozostałych pominiętych służy jedynie do oceny dokładności wzoru (2). Błąd jest tu zależny od drugiej i wyższych pochodnych sygnału $x(t)$ i rośnie w przybliżeniu proporcjonalnie do kwadratu czasu t , a tym samym wzór (2) jest dokładny dla krótkich czasów t i w warunkach gładkości sygnału $x(t)$.

2. LINEARYZACJA MODELU WIENERA- -HAMMERSTEINA

Model Wienera-Hammersteina opisują trzy równania [3]:

$$X(t) = F_1[x(t)], \quad Y(t) = \int_0^t k(v) \cdot X(t-v) \cdot dv, \quad y(t) = F_2[Y(t)] \quad (3)$$

Wykorzystując model uproszczony (2), otrzymuje się: $Y(t) = h(t) \cdot F_1\{x[t - t_0(t)]\}$ oraz:

$$y(t) = F_2[h(t) \cdot F_1\{x[t - t_0(t)]\}] \text{ a jeżeli też: } F_2(a \cdot b) = F_2(a) \cdot F_2(b) \text{ i } F_2[F_1(b)] = b \quad (4)$$

$$\text{to:} \quad y(t) = F_2[h(t)] \cdot x[t - t_0(t)] = \{F_2[h(t)] / h(t)\} \cdot h(t) \cdot x[t - t_0(t)] \quad (5)$$

co odpowiada prostej reakcji liniowego członu o skokowej charakterystyce $h(t)$ na sygnał $x(t)$, mnożonej dodatkowo przez funkcję czasu $f(t) = F_2[h(t)] / h(t)$.

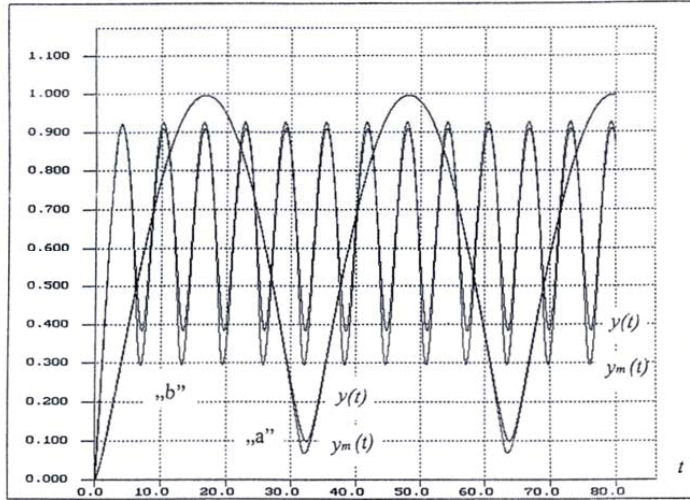
Rozpatrzmy następujący przykład:

Modelowi Wienera-Hammersteina odpowiada równanie różniczkowe:

$$T \cdot dY / dt + Y = x^2(t), \quad y(t) = \sqrt{Y(t)}, \quad h(t) = 1 - \exp(-t/T) \quad (6)$$

Na rysunku 1 pokazano przebiegi rozwiązania $y(t)$ powyższego równania dla $T = 1$, $x(t) = \sin \omega t$ w przypadku gdy $\omega = 0,1$ (wykresy oznaczone symbolem „a”), a więc dla sygnału stosunkowo wolnozmiennego i gładkiego oraz dla $\omega = 0,5$ (wykresy oznaczone

symbolem „b”), gdy warunki te odbiegają od takich założeń. Jednocześnie dla porównania pokazano przebiegi $y_m(t)$ dla odpowiedniego, zlinearyzowanego modelu (5) w postaci:



Rys. 1. Przebiegi rozwiązań równań (6) i (7)

$$dy(t)/dt + y = |x(t)|, \quad y_m(t) = f(t) \cdot y(t), \quad f(t) = 1/\sqrt{1 - \exp(-t)} \quad (7)$$

Tu, w przypadku „b” błędy modelu (5) są znacznie większe.

Informacje o tym modelu znaleźć można w pracach [3] [4], inne zastosowania modelu wydają się nowe.

Ciekawy wynik uzyskuje się stosując uproszczony model (5) w przypadku operacji wyznaczania średniej geometrycznej $y(t)$ dla sygnału $x(t) > 0$ w przedziale czasowym $0, t$. Średnią taką wyznacza się z zależności:

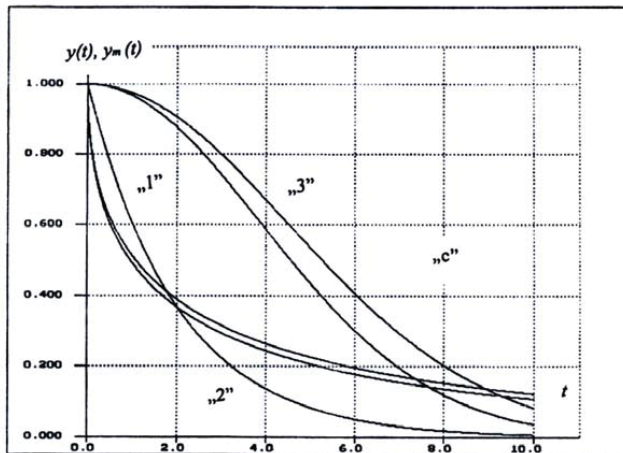
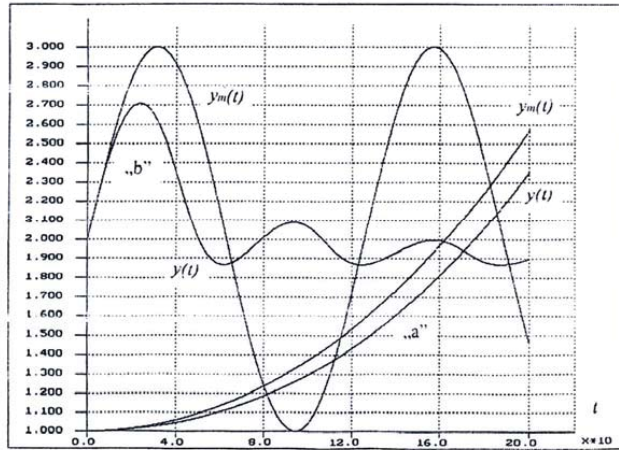
$$\ln y(t) = (1/t) \cdot \int_0^t \ln x(t) \cdot dt \quad (8)$$

co odpowiada całkowaniu sygnału $\ln x(t)$ przez układ o transmitancji $K(s) = 1/s$, $h(t) = t$, $t_0(t) = t/2$. Po wykorzystaniu modelu uproszczonego (2) i przekształceniach otrzymuje się nieoczekiwanie:

$$y_m(t) = x(t/2) \quad (9)$$

Przebiegi $y(t)$ i $y_m(t)$ dla $x(t) = \cosh(0,015 \cdot t)$ pokazano na rysunku 2a, a dla $x(t) = 2 + \sin(0,1 \cdot t)$ na rysunku 2b. Model ten zapewnia dobrą dokładność (poza

szczególными przypadkami) tylko dla krótkich czasów t . Trzy takie przypadki szczególne dla (1): $x(t) = \exp(-\sqrt{t})$, dla (2): $x(t) = \exp(-t)$ i dla (3): $x(t) = \exp(-0,1 \cdot t^2)$ prowadzą do przebiegów jak na rysunku 2c.



Rys. 2. Ilustracje zachowań uproszczonych modeli wyznaczenia średniej geometrycznej przebiegu sygnału

3. UPRASZCZANIE NIELINIOWYCH MODELI DYNAMIKI TORÓW POMIAROWYCH

Dynamikę nieliniowych torów pomiarowych o analogowym działaniu opisują często równania różniczkowe typu [1]:

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot y^{(i)}(t) + y(t) = x(t) \cdot F[y(t)] \quad (10)$$

gdzie $x(t)$ jest sygnałem pobudzenia lub jego kwadratem, przy tym dokonuje się odczytu sygnału $x_0(t)$ z „równania skali” $x_0(t) = y(t)/F\{y(t)\}$ z błędem dynamicznym w stosunku do wartości $x(t)$. Traktując całą prawą stronę równania (10) jako „pobudzenie” otrzymuje się w oparciu o model (2):

$$y(t) = h(t) \cdot x[t - t_0(t)] \cdot F\{y[t - t_0(t)]\} \quad \text{lub} \quad y(t)/F\{y[t - t_0(t)]\} = h(t) \cdot x[t - t_0(t)] \quad (11)$$

co odpowiada reakcji liniowego członu (lewa strona równania (10)) na sygnał $x(t)$. Jeśli model uznać za poprawny, to:

$$h(t) \cdot x[t - t_0(t)] = y(t)/\{F[y(t)] - t_0(t) \cdot dF(y)/dy\} = y(t)/\{F[y(t)] \cdot (1 - t_0(t) \cdot d[\ln F(y)]/dy)\} \quad (12)$$

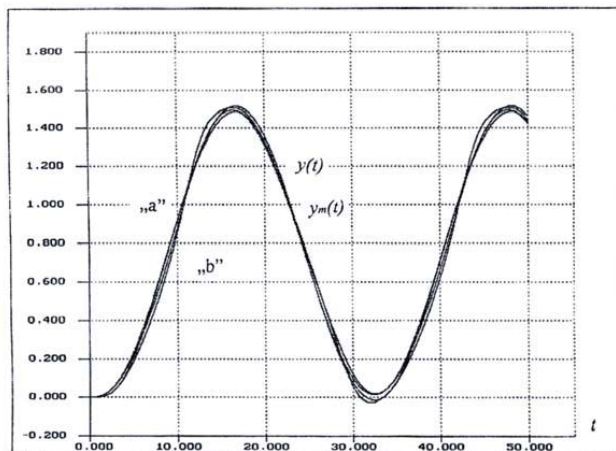
Człon $t_0(t) \cdot d[\ln F(y)]/dy$ można traktować jako swego rodzaju „poprawkę” zerującą się w ekstremach funkcji $F(y)$, a po jej pominięciu:

$$y(t)/F[y(t)] = h(t) \cdot [t - t_0(t)] \quad (13)$$

co pozwala wyznaczyć wartość $y(t)$ oznaczoną jako $y_m(t)$ w oparciu o reakcję modelu liniowego. Poniżej podano dwa przykłady:

dla równania: $dy/dt + y = x(t) \cdot [1 - 0.5 \cdot (y - 1)^2]$, $x(t) = 1.5 \cdot \sin^2(0.1 \cdot t)$ – przykład „a” oraz dla równania: $d^2y/dt^2 + dy/dt + y = x(t) \cdot [1 - 0.5 \cdot (y - 1)^2]$ – przykład „b”, które zilustrowano wykresami przebiegów $y(t)$ na rysunku 3 a i b.

Rozważania i przykłady dowodzą pewnej, choć ograniczonej użyteczności prezentowanej metody.



Rys. 3. Ilustracja zachowań modeli w omawianym przykładzie

LITERATURA

1. Metal A., Żuchowski A.: Mierniki elektryczne – obliczanie i konstrukcja. PWN, Warszawa – Poznań, 1969.
2. Żuchowski A.: O przechodzeniu wolnozmiennych sygnałów przez układy liniowe. Pomiary, Automatyka, Kontrola (PAK), nr 2, 1982.
3. Żuchowski A.: O pewnej własności modelu Hammersteina. Pomiary, Automatyka, Kontrola (PAK), nr 10, 1996.
4. Żuchowski A.: Modele dynamiki i identyfikacja. Seria Tempus, Wyd. Uczelniane Politechniki Szczecińskiej, 2003.

Przyjęto do druku dnia 12.02.2016 r.

THE LINEARIZATION OF DYNAMICS OF THE
WIENER-HAMMMERSTEIN MODEL AND SIMPLIFICATION
OF NONLINEAR MODELS OF MEASURING SYSTEMS FOR
SLOWLY-ALTERING SIGNALS

Adam ŻUCHOWSKI

ABSTRACT *The simplified models of linear systems created by expanding of the integrand of convolution integral in Taylor's series are relatively accurate for slowly-altering, smooth input signals. Using this models one can do such linearization of the Wiener-Hammerstein model and the above-mentioned other type of models that interpretation of the operation of a measuring system is substantially facilitated. The referring dependences as well as exemplary results of simulations are presented in the paper.*

Keywords: *method of linearization, nonlinear models, dynamics of systems*