

# Modele diofantyczne problemów harmonogramowania cyklicznego

Zbigniew Banaszak, Grzegorz Bocewicz

Wydział Elektroniki i Informatyki

Politechnika Koszalińska

ul. Śniadeckich 2, 75-453 Koszalin, Polska

e-mail: Zbigniew.Banaszak@tu.koszalin.pl

## Streszczenie

Harmonogramowanie cykliczne rozumiane jako harmonogramowanie powtarzających zdarzeń, jak np. zajęć lekcyjnych, rozkładów jazdy, itp. wiąże się z poszukiwaniem odpowiedzi na dwie klasy pytań: odpowiednio o charakterze dedukcyjnym i abdukcyjnym. Pierwsza grupa problemów dotyczy wyboru zasad rozstrzygania konfliktów zasobowych ekstremalizujących wielokryterialną funkcję celu (minimalizacja cyklu, maksymalizacja przepustowości, itp.) przy zadanych ograniczeniach narzucanych na strukturę systemu, druga z kolei poszukuje struktur, które przy zadanych regułach rozstrzygania konfliktów zasobowych gwarantują zadane ilościowe i jakościowe parametry wielokryterialnej funkcji celu. Przedstawione rozważania koncentrują się na drugiej klasie problemów. Podkreślając ich diofantyczny charakter wyjaśnią kwestie związane z nierozstrzygalnością szeregu problemów harmonogramowania cyklicznego, w szczególności tych związanych z próbą uzyskania oczekiwanych zachowań systemu przy arbitralnie zadanych ograniczeniach strukturalnych.

## 1. Wstęp

Zagadnienia związane z planowaniem dyżurów, programów zajęć szkolnych, rozkładów jazdy, itp. należą do najczęściej występujących w praktyce wielokryterialnych problemów szeregowania, tzw. problemów „timetabling’u” [7, 8, 9, 15]. W dziedzinach liczb całkowitych i/lub liczb wymiernych problemy te sprowadzają się do problemów diofantycznych. Nierozstrzygalność tego typu problemów wymusza konieczność wyznaczenia warunków wystarczających istnienia poszukiwanych rozwiązań wielokryterialnych.

Celem przybliżenia tej kwestii rozważmy sytuację planowania cotygodniowych zajęć dwóch grup studenckich. Studenci tych grup uczęszczają na te same zajęcia, prowadzone przez tych samych wykładowców, w różnych salach. Przyjmując trzy kryteria oceny związane np. z minimalizacją liczby „okienek” poszczególnych grup studenckich, wykładowców oraz obciążenia sal wykładowych, poszukiwany jest taki rozkład zajęć, który minimalizuje te kryteria; w szczególności taki w którym zajęcia grup studenckich odbywają się bez przerw, wykładowcy prowadzą swoje zajęcia bez przerw

oraz obciążenie sal jest ciągłe. Łatwo widać, że przy ograniczeniach związanych z liczbą dostępnych sal i wykładowców (a także zakresem kompetencji umożliwiającym wykładowcom prowadzenie różnych zajęć) poszukiwany „bezokienkowy” rozkład zajęć nie istnieje. Można też pokazać, że dopuszczając pewną elastyczność określającą minimalny okres prowadzenia zajęć (na ogół różny od zwyczajowego 45 minutowego modułu) rozwiązanie takie jednak istnieje.

Łatwo też zauważyć, że brak rozwiązań ekstremalizujących wszystkie kryteria wynika, w rozważanym przypadku, z przyjętej „ziarnistości” czasu trwania zajęć oraz ograniczeń narzucanych bądź to na godziny rozpoczynania zajęć, bądź też dostępność kadry czy sal wykładowych. W tym kontekście wydaje się również, że sformułowanie problemu odwrotnego, koncentrującego się np. na poszukiwaniu odmiennych od dotychczasowych (tzn. 45 minutowych) czasowych modułów prowadzenia zajęć pozwoliłoby znaleźć rozwiązania ekstremalizujące wybrane klasy kryteriów optymalizacji.

W przedstawionym kontekście, niniejsza praca podkreślając diofantyczny charakter problemów harmonogramowania cyklicznego wyjaśnia kwestie związane z nierozstrzygalnością szeregu problemów należących do tej klasy, w szczególności tych związanych z próbą uzyskania oczekiwanych zachowań systemu przy arbitralnie zadanych ograniczeniach strukturalnych (np. determinujących długość minimalnego modułu określającego czas prowadzenia zajęć, dostępność sal, wykładowców i ich kompetencji).

## 2. Problemy harmonogramowania cyklicznego

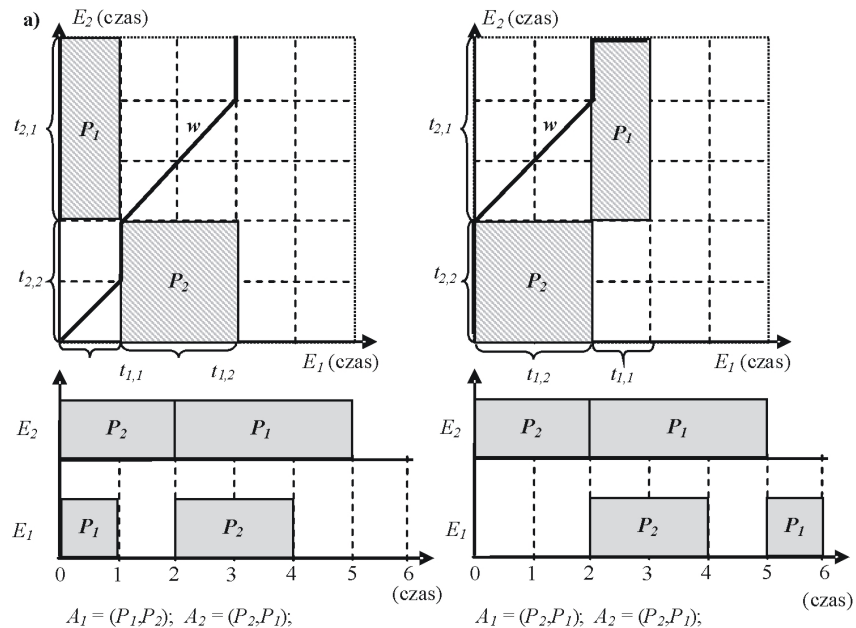
Celem ilustracji zagadnień związanych z problemami „timetabling’u” [3, 15] rozważmy następujący problem planowania zajęć. Dany jest zbiór zajęć:  $P = \{P_1, P_2\}$  realizowanych w dwóch grupach studenckich  $E_1, E_2, E = \{E_1, E_2\}$ . Znane są czasy trwania zajęć w poszczególnych grupach  $T_1 = (1, 2)$  (czas trwania zajęć  $P_1$ , dla grupy  $E_1$  wynosi 1 jednostkę, a czas trwania zajęć  $P_2$  dwie jednostki),  $T_2 = (3, 2)$ . Przyjmuje się, że między zajęciami nie występują przerwy, a zajęcia dla obu grup rozpoczynają się o tej samej godzinie. Poszukiwana jest odpowiedź na pytanie: Czy istnieje rozwiązanie (kolejność realizacji zajęć) spełniające narzucone wyżej ograniczenia?

W celu wyznaczenia odpowiedzi rozważono 4 przypadki (dla dwuelementowych zbiorów  $P$  i  $E$  oraz przy założeniu braku okienek istnieją tylko 4 alternatywne warianty rozkłady zajęć):  $A_1 = (P_1, P_2), A_2 = (P_2, P_1); A_1 = (P_2, P_1), A_2 = (P_2, P_1); A_1 = (P_1, P_2), A_2 = (P_1, P_2)$  oraz  $A_1 = (P_2, P_1); A_2 = (P_1, P_2)$ ; Zostały one zilustrowane na Rys. 1 i Rys. 2.

Rys. 1 ilustruje przestrzenie obszarów zabronionych (układ współrzędnych  $E_1, E_2$ ) oraz diagramy Gantta odpowiadające możliwym rozkładom zajęć preferującym zajęcia grupy  $E_2$  (plan zajęć tej grupy nie zawiera okienek). Przyjmując, że każde z zajęć prowadzone jest przez jednego wykładowcę, pierwszy z planów przedstawiony na Rys. 1b) gwarantuje ciągły przebieg tylko dla wykładowcy prowadzącego zajęcia  $P_2$  z kolei

drugi z planów przedstawionych na Rys. 1b) gwarantuje ciągły przebieg zajęć prowadzonych już przez obu wykładowców.

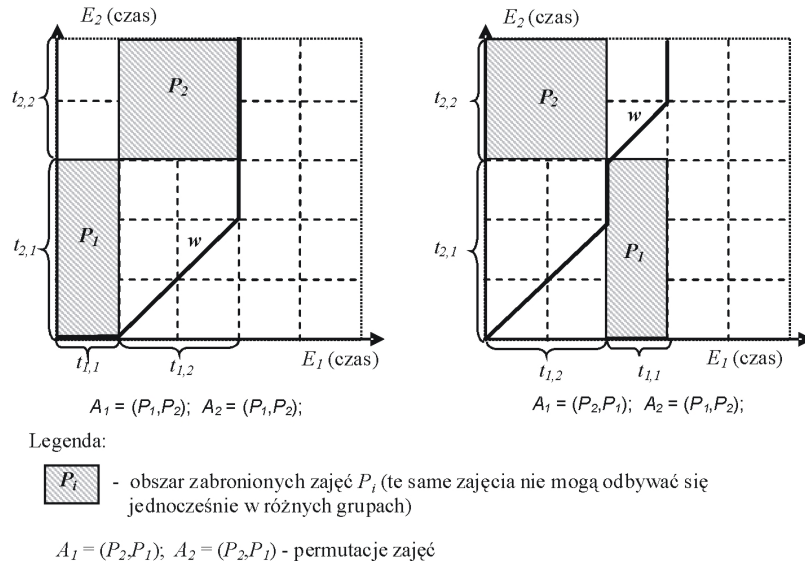
Z kolei Rys. 2 ilustruje możliwe plany zajęć preferujące grupę  $E_1$ . Łatwo zauważyć, że poszukiwane („bezokienkowe”) rozwiązanie istnieje, jeżeli w układzie współrzędnych  $E_1, E_2$  (przestrzeni obszarów zabronionych) udaje się poprowadzić prostą  $w$  pod kątem  $45^\circ$  (patrz Rys. 1a) i Rys. 2) tak, aby nie przechodziła przez obszary zabronione. W żadnym z rozważanych przypadków nie jest to możliwe - nie istnieje zatem harmonogram spełniający zadane ograniczenia (oczekiwane wartości kryteriów).



Legenda:

- $P_i$  - obszar zabronionych zajęć  $P_i$  (te same zajęcia nie mogą odbywać się jednocześnie w różnych grupach)
- $P_i$  - przedział czasowy realizacji zajęć  $P_i$   $A_1 = (P_2, P_1)$ ;  $A_2 = (P_2, P_1)$  - permutacje zajęć

**Rys. 1.** Możliwe rozkłady zajęć preferujące grupę  $E_2$  wraz z odpowiadającymi im diagramami Gantt'a.

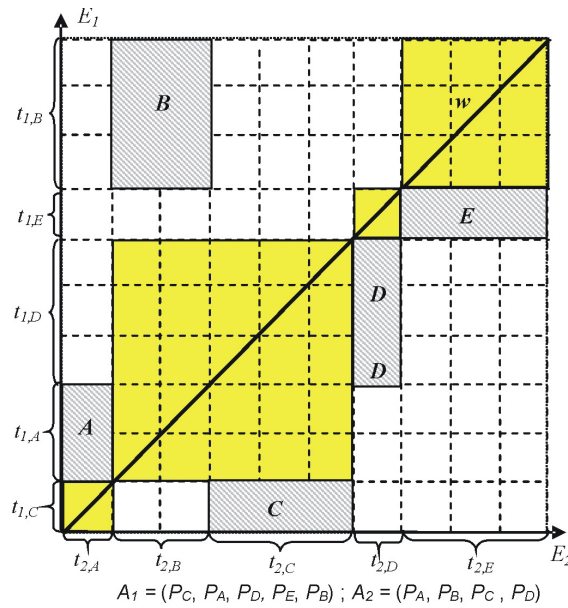


**Rys. 2.** Przestrzenie obszarów zabronionych preferujące grupę  $E_1$ .

W rozważanym przypadku nie istnieje więc rozwiązanie optymalizujące zajęcia obu grup. Powstaje pytanie czy, w ogóle jest możliwy przypadek, w którym zajęcia w obu grupach mogą odbywać się bez „okienek”. A jeżeli tak to, jakie warunki wystarczające będą to gwarantowały?

Alternatywne, sygnalizowane we Wstępie podejście sugeruje pytanie odwrotne [3]: Przy jakich założeniach narzuconych na wielkości dyskretnej zmiennych decyzyjnych (np. przy jakich wielokrotnościach przyjętego modułu czasu zajęć) możliwe jest uzyskanie „bezokienkowych” planów zajęć? Celem ilustracji tego podejścia rozważmy zajęcia typu  $P_A, P_B, P_C$  i  $P_D$  oraz dwie grupy studenckie  $E_1$  i  $E_2$  zainteresowane tego typu zajęciami. Wiedząc ile trwają poszczególne zajęcia (mogące łączyć w ciągi np. wykład-ćwiczenia, laboratorium-seminarium, itp.) oraz znając dopuszczalny limit dzienny obciążenia studentów, wykładowców (lub dostępności sal) „ $K$ ”, należy wyznaczyć „bezokienkowe” harmonogramy zajęć obu grup.

Przyjmując, że w grupie  $E_2$  odbywają się zajęcia w podanej sekwencji  $A_2 = (P_A, P_B, P_C, P_D)$  trwające odpowiednio  $T_2 = (1, 2, 3, 1, 3)$  jednostek czasu, a w grupie  $E_1$  zajęcia odbywające się w sekwencji  $A_1 = (P_C, P_A, P_D, P_E, P_B)$  trwają odpowiednio  $T_1 = (1, 2, 3, 1, 3)$  jednostek czasu łatwo widać (patrz Rys. 3), że odpowiednie „bezokienkowe” plany zajęć istnieją.



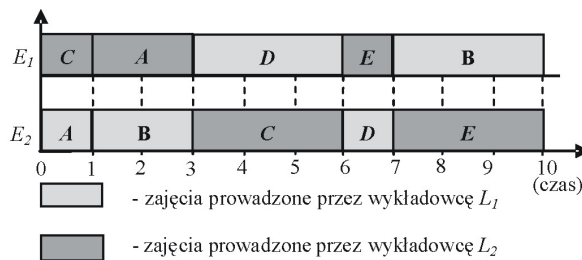
Legenda:

$P_i$  - obszar zabronionych zajęć  $P_i$  (te same zajęcia nie mogą odbywać się jednocześnie w różnych grupach)

$A_1 = (P_C, P_A, P_D, P_E, P_B)$ ;  $A_2 = (P_A, P_B, P_C, P_D)$  - permutacje zajęć

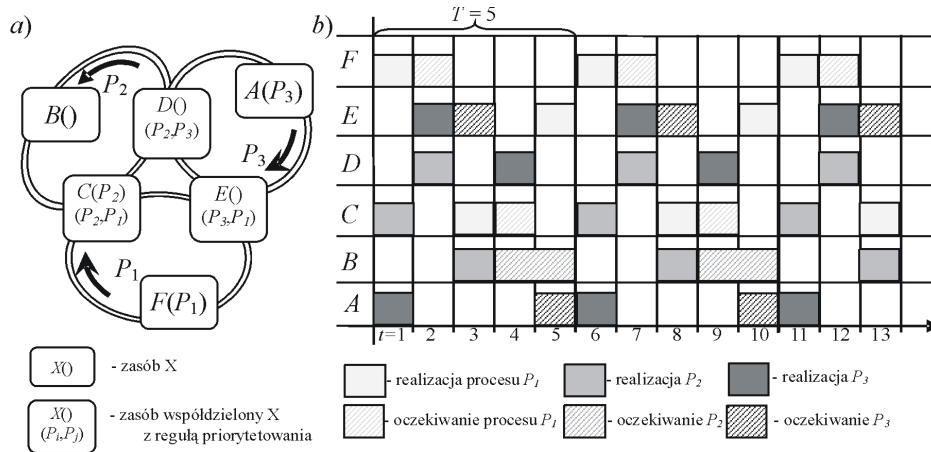
**Rys. 3.** Rozwiązanie optymalizujące plany zajęć obu grup

Z przedstawionego na Rys. 4 diagramu wynika, że przy obsadzie dwóch wykładowców ( $L_1$  i  $L_2$ ), gdzie jeden z nich prowadzi zajęcia  $P_A, P_B$  i  $P_D$ , a drugi prowadzi zajęcia  $P_A, P_C$  i  $P_E$  istnieje również plan zapewniający ciągłą pracę wykładowców. Łatwo też zauważyć, że prowadzone zajęcia, wymagają minimum dwóch sal wykładowych (wówczas sale zajmowane są non-stop), bądź też 5 specjalistycznych (wówczas sale do zajęć  $P_A, P_D$  i  $P_E$  będą wykorzystywane przez dwie grupy bez przerwy).



**Rys. 4.** Diagram Gantt'a planu zajęć odpowiadający rozwiązaniu z Rys. 3

Innym przykładem obiektów wiążących się z potrzebą harmonogramowania cyklicznego są systemy współbieżnie przebiegających procesów cyklicznych [2,4, 10, 12, 16]. Model takiego systemu obejmującego trzy procesy cykliczne zadane sekwencjami czynności  $P_1 = (C_1, E_1, F_1)$ ,  $P_2 = (B_2, C_2, D_2)$ ,  $P_3 = (D_3, A_3, E_3)$ , gdzie:  $X_j$  – czynność  $j$ -tego procesu wykonywana na  $X$ -tym zasobie, przedstawia Rys. 5 a). Wśród zasobów systemu  $A, B, C, D, E, F$  zasoby  $C, D,$  i  $E$  są zasobami współdzielonymi, to znaczy zasoby wykorzystywane w trybie wzajemnego wykluczania przez konkurujące w dostępie do nich procesy.

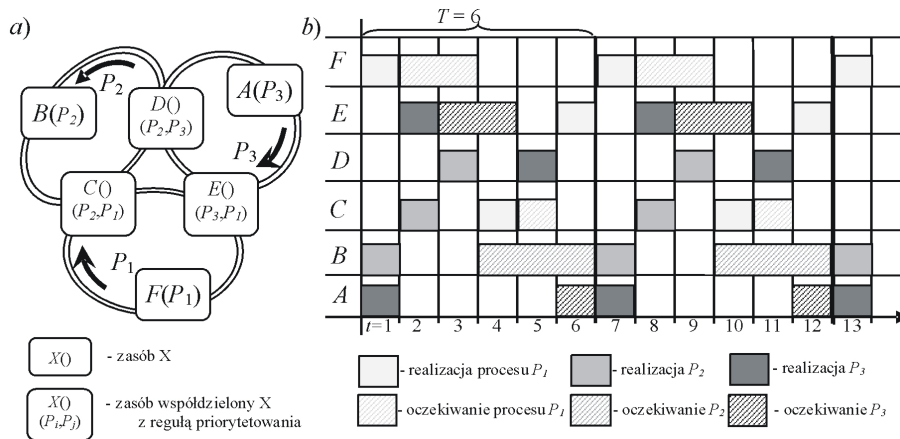


**Rys. 5.** System procesów cyklicznych: stan początkowy a), diagram Gantt'a cyklicznego przebiegu ustalonego b)

W stanie początkowym z Rys. 5 a) system ten znajduje się w stanie (cyklicznym przebiegu) ustalonym o cyklu  $T=5$  (przy założeniu, że  $t_{C_1} = t_{E_1} = t_{F_1} = t_{C_2} = t_{B_2} = t_{D_2} = t_{D_3} = t_{A_3} = t_{E_3} = 1$ ), co ilustruje Rys. 5 b). Łatwo zauważyć, że istnienie przebiegu cyklicznego zależy od stanu początkowego (tzn. początkowej alokacji procesów do zasobów, charakteryzowanej w postaci sekwencji  $S_0 = (F, C, A)$  – Rys. 5), przyjętego kierunku obiegu procesów oraz od reguł priorytetu (reguł określających pierwszeństwo dostępu procesów do zasobów współdzielonych, np.: dla zasobu  $D$ ,  $\sigma_D = (P_2, P_3)$  – reguła ta oznacza, że do zasobu  $D$  pierwszeństwo dostępu przydzielone jest procesowi  $P_2$ , następnie procesowi  $P_3$ , potem  $P_2$  i znowu  $P_3$ , itd.).

Przykładowo, zmieniając reguły priorytetu z postaci gwarantującej przebieg z Rys. 5 b), tzn. reguł:  $\sigma_C = (P_2, P_1)$ ,  $\sigma_D = (P_2, P_3)$ ,  $\sigma_E = (P_3, P_1)$ , na reguły:  $\sigma_C = (P_2, P_1)$ ,  $\sigma_D = (P_3, P_2)$ ,  $\sigma_E = (P_1, P_3)$ , rozważany system znajduje się w stanie blokady. Z kolei w początkowej alokacji procesów:  $S_0 = (F, B, A)$  (proces  $P_1$  rozpoczyna pracę na zasobie

$F$ , proces  $P_2$  na  $B$  proces  $P_3$  na  $A$ ) otrzymuje się kolejny stan ustalony, tym razem o okresie  $T = 6$ . Przebieg ustalony odpowiadający temu przypadkowi ilustruje Rys. 6.



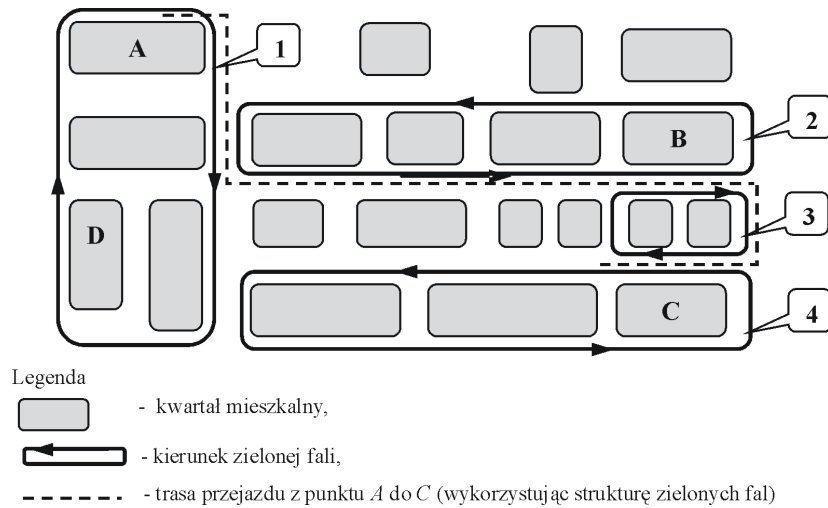
**Rys. 6.** Diagram Gantt'a cyklicznego przebiegu ustalonego o okresie 6.

W ogólnym przypadku okresy cyklicznych przebiegów ustalonych (a także postaci reguł priorytetowania) łatwo uzyskać rozwiązując liniowe równanie diofantyczne postaci:  $3y + 3x = T + z$  [2, 4]. Przykładowe rozwiązania przedstawia Tabela 1.

Tabela 1. Przykładowe rozwiązania równania diofantycznego:  $3y + 3x = T + z$ .

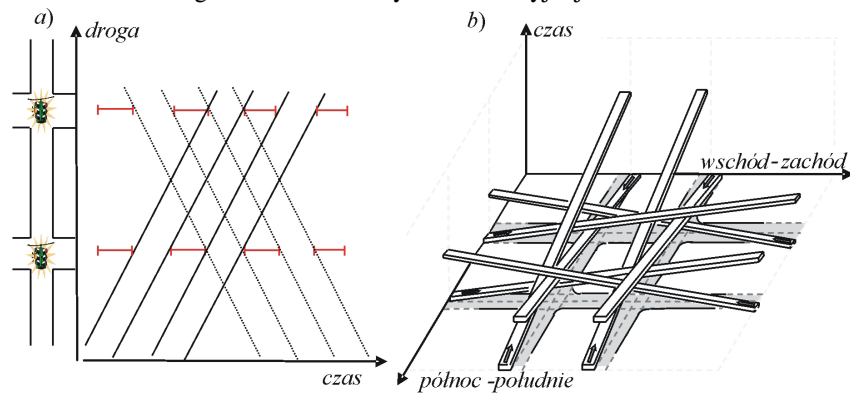
T	x	y	z
5	1	1	1
6	1	2	3
10	2	2	2

Praktycznymi przykładami obiektów modelowanych jako systemy współbieżnych procesów cyklicznych są systemy organizacji ruchu ulicznego [4] wykorzystujące zasadę systemu zsynchronizowanych fal zielonych o strukturach zamkniętych Rys. 7. Przedstawiony przypadek ilustruje możliwość rozwiązania organizacji ruchu miejskiego, w którym każda ulica (w jednym kierunku) posiada zieloną falę. Łatwo zauważyć, że w zależności od wyboru struktury systemu lokalnych, zamkniętych fal zielonych istnieje możliwość tworzenia zielonych fal łączących dowolne punkty infrastruktury miejskiej. Przykładowo, przejeżdżając z kwartału A do kwartału C można skorzystać z odcinków zielonej fali, odpowiednio: 1, 2 i 3, jak zaznaczono linią przerywaną (Rys. 7). Rozwiązanie takie wydaje się być szczególnie wygodne przy organizacji imprez masowych, rozładowywania porannych i popołudniowych szczytów komunikacyjnych.



**Rys. 7.** Ilustracja rozwiązania ruchu ulicznego wykorzystującego zasadę systemu zsynchronizowanych fal zielonych o strukturach zamkniętych.

Ciekawą konsekwencją powyższego przykładu jest próba odpowiedzi na pytanie; Czy dowolnym mieście można zorganizować ruch uliczny oparty na sygnalizacji świetlnej w sposób gwarantujący, że każda ulica, w każdym kierunku będzie tworzyła zieloną falę. Korzystając z ilustracji mechanizmu organizacji „zielonej fali” przedstawionego na Rys. 8 a) łatwo widać, że odpowiedź na tak postawione pytanie jest pozytywna przy spełnieniu warunku regularności struktury komunikacyjnej.



**Rys. 8.** Ilustracja organizacji ruchu opartej na mechanizmie „zielonej fali”.



### 3. Problemy diofantyczne

Równanie diofantyczne (od Diofantosa [14, 17]) to równanie, którego rozwiązanie szuka się w zbiorze liczb całkowitych lub liczb naturalnych. Odpowiedni problem diofantyczny sprowadza się do rozwiązania równania postaci  $F(x,y)=0$ , gdzie  $F(x,y)$  jest wielomianem o współczynnikach całkowitych lub wymiernych. Jego rozwiązanie sprowadza się do stwierdzenia czy ma ono rozwiązanie wymierne, czy też nie ma żadnego rozwiązania. Jeżeli ma, należy znaleźć wszystkie jego rozwiązania, tzn. podać sposób efektywnego znalezienia jednego z nich, a następnie znaleźć ogólne wzory albo opisać sposób znalezienia pozostałych.

Przykładem równania diofantycznego jest równanie  $x^n + y^n = z^n$ . Dla  $n = 2$  klasycznym problemem tej klasy jest problem tzw. trójkątów pitagorejskich. Poszukiwane są rozwiązania w liczbach naturalnych równania:  $x^2 + y^2 = z^2$ . Przykładowe rozwiązania to następujące trójki pitagorejskie: (3, 4, 5), (5, 12, 13). Rozwiązania niebędące wielokrotnościami innych rozwiązań to tzw. "rozwiązania właściwe". Takich trójkątów pitagorejskich (o bokach całkowitej długości) jest nieskończenie wiele. Wszystkie rozwiązania właściwe równania Pitagorasa w liczbach naturalnych  $(x, y, z)$  można uzyskać ze wzorów, które znał już Diofantos:  $x=k^2-l^2$ ,  $y=2kl$ ,  $z=k^2+l^2$ ; gdzie  $k, l$  to liczby naturalne, przy czym  $k > l$ . Jeśli  $k$  i  $l$  są względnie pierwsze uzyskuje się rozwiązania właściwe, nie będące wielokrotnością innych rozwiązań [17], [18]. Dla  $n > 2$  równanie to nie ma rozwiązań – jest to treść słynnego twierdzenia Fermata.

Innym przykładem liniowego, równania diofantycznego jest równanie  $nx + my = k$ , gdzie  $n, m, k \in \mathbb{N}$ ,  $x, y \in \mathbb{Z}$ , które ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy największy wspólny dzielnik liczb  $m$  i  $n$  dzieli  $k$ .

Okazuje się, że nie istnieje algorytm, który w każdym przypadku prowadziłby do rozwiązania równania diofantycznego. Często nie można nawet odpowiedzieć na podstawowe pytania: czy dane równanie diofantyczne ma choć jedno rozwiązanie?, czy liczba tych rozwiązań jest skończona?, czy jest ich nieskończenie wiele? W ogólnym przypadku badając równania diofantyczne poszukiwane są odpowiedzi na pytania [14, 17]: czy ma ono rozwiązania? jeśli tak, to ile ich jest (skończenie, czy nieskończenie wiele)? czy istnieje algorytm na ich wyznaczenie?

Gödel pokazał, że w każdym systemie formalnym obejmującym arytmetykę musi się znaleźć wyrażenie równoważne twierdzeniu: "Tego zdania nie można udowodnić - patrz analogia do paradoksu Epimenidesa ("to zdanie jest fałszywe")". Oba zdania nie mają określonej wartości logicznej. Oznacza to, że dowolny system logiczny, w którym można je sformułować, nie może być niesprzeczny.

Przykładem problemu nie rozstrzygalnego jest m.in. dziesiąty problem Hilberta: czy dane równanie diofantyczne posiada rozwiązanie w liczbach całkowitych? W rozważanym wyżej liniowym równaniu diofantycznym rozwiązaniem jest zbiór wszystkich  $n$ -tek liczb spełniających rozważany układ. Problem niesprzeczności danego

równania sprowadza się do odpowiedzi na pytanie, czy jest chociaż jedna  $n$ -ka liczb spełniająca ten układ. Zadania te mają różne własności w zależności np. od tego, czy poszukiwane jest rozwiązanie w zbiorze liczb wymiernych, czy też w zbiorze liczb całkowitych lub naturalnych. Problem niesprzeczności diofantycznych równań liniowych (a więc o rozwiązaniach naturalnych) jest NP-zupełny, a problem niesprzeczności równań o rozwiązaniach całkowitych jest wielomianowy. Niektóre problemy są silnie NP-zupełne, inne są pseudowielomianowe. Mają wiele zastosowań praktycznych, w tym technicznych i ekonomicznych.

Klasyycznym przykładem problemu rozstrzygalnego jest zbiór liczb pierwszych. Istnieje, bowiem metoda sprawdzenia czy dana liczba jest pierwsza sprowadzająca się do sprawdzenia wszystkich jej potencjalnych dzielników. Alan Turing wykazał, że tzw. problemem stopu tzn. sytuacja, w której dla danego algorytmu należy stwierdzić, czy program realizujący dany algorytm zatrzyma się (ściśle związany z twierdzeniem Gödla) jest problemem nierozstrzygalnym.

Oznacza to, że nie można przewidzieć, czy dana procedura obliczeniowa (algorytm) zostanie wykonana w skończonej liczbie kroków. Wspomniany problem stopu może odnosić się albo do konkretnych danych wejściowych, albo do wszystkich możliwych danych. Jeśli program zatrzymuje się dla wszystkich danych to spełnia własność stopu. Jeżeli problem jest rozstrzygalny to wiadomo, że dla konkretnych danych wejściowych jego rozwiązanie istnieje lub nie. W tym kontekście oznacza to, że kwestia rozstrzygalności równań diofantycznych pozostaje w ogólności problemem otwartym. Tak było, np. w przypadku równania diofantycznego  $x^n + y^n = z^n$ ,  $n > 2$ .

Zakładając, że liczba zmiennych, kształt i stopień równania diofantycznego charakteryzują strukturę systemu, a rozwiązanie równania odpowiada spełnieniu odpowiedniej właściwości funkcjonowania (zachowania) modelowanego tym równaniem systemu, można przyjąć, że równania tego typu opisują związki zachodzące między strukturą a zachowaniem, modelowanych przy ich pomocy, obiektów. Uwaga ta wynika z obserwacji, że wartości zmiennych i parametrów występujących w problemach diofantycznych, są ograniczone do pewnych podzbiorów liczb naturalnych. Oznacza to, że pożądane zachowanie (wartości funkcji celu), na ogół łatwiej osiąga się na drodze syntezy odpowiedniej struktury systemu (gwarantującej oczekiwane jego funkcjonowanie), niż na drodze analizy potencjalnych (z reguły rosnących wykładniczo) wariantów zachowania, wariantów implikowanych zadaną strukturą obiektu. Przykładem ilustrującym tę tezę jest wspomniany wcześniej problem takiej organizacji ruchu miejskiego, w której każda ulica w każdym kierunku stanowiłaby część zielonej fali. Bezowocność tego typu poszukiwań, w arbitralnie zadanej strukturze ulic i arterii ruchu miejskiego, łatwo widać. Pożądane zachowanie można, bowiem obserwować tylko w pewnych klasach struktur, np. gwarantujących te same odległości między kolejnymi skrzyżowaniami w obu prostopadle przecinających się kierunkach, typu Manhattan.

#### 4. Modele diofantyczne problemów harmonogramowania cyklicznego

Jak już wspomniano, często występujący w praktyce problem harmonogramowania cyklicznego wiąże się z wyznaczaniem planu zajęć. Poszukiwane plany determinują czas i miejsce prowadzonych zajęć – dokładniej mówiąc określają to: jaka grupa, przez kogo prowadzona, w jakiej sali winna odbywać swoje cotygodniowe zajęcia. Łatwo widać, że problem ten jest problemem wielokryterialnym – występują trzy, zwykle optymalizowane kryteria „bezokienkowej” pracy wykładowców, obciążenia sal oraz obsługi grup studenckich. Celem ilustracji diofantycznego charakteru tej klasy problemów rozważamy następujący przykład [4]:

Dany jest czteroelementowy zbiór realizowanych zajęć:  $P=\{A_1, B_1, A_2, B_2\}$ . Zajęcia  $A_1$  i  $A_2$  należą do bloku wykładów  $A$ , zajęcia  $B_1, B_2$  do bloku  $B$ . Dane są dwie grupy wykładowe  $E_1, E_2$ . Dla grupy  $E_1$  przeznaczonych jest 5 jednostek czasu zajęć z grupy  $A$  (łącznie dla zajęć  $A_1$  i  $A_2$ ) i 4 jednostki z grupy  $B$  (łącznie dla zajęć  $B_1$  i  $B_2$ ). Dla grupy  $E_2$  przeznaczonych jest 8 jednostek czasu zajęć z grupy  $A$  i 6 jednostek z grupy  $B$ . Przyjmuje się, że znane są czasy trwania zajęć dla każdej z grup. Dla grupy  $E_1$  czas trwania zajęć  $A_1$ ,  $t_{1,A1} = 2$ ; czas zajęć  $B_1$ ,  $t_{1,B1} = 2$ ; czas zajęć  $A_2$ ,  $t_{1,A2} = 3$ ; czas zajęć  $B_2$ ,  $t_{1,B2} = 2$ ; czasy te reprezentowane są kolejno jako elementy sekwencji  $T_1 = (2,2,3,2)$ . Dla grupy  $E_2$  czasy trwania zajęć reprezentowane są analogicznie w postaci sekwencji  $T_2 = (4,2,4,4)$ . Oznacza to, że [2]:

$$t_{1,A1}+t_{1,A2} = 5;$$

$$t_{1,B1}+t_{1,B2} = 4;$$

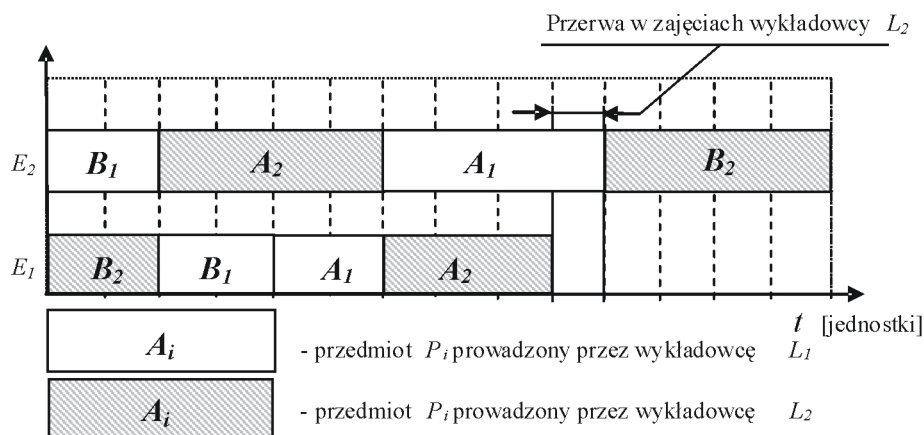
$$t_{2,A1}+t_{2,A2} = 8;$$

$$t_{2,B1}+t_{2,B2} = 6.$$

Układ równań charakteryzujący rozważany problem, obejmujący między innymi wymienione powyżej równania [2], jest typowym układem liniowych równań diofantycznych. Nie wiadomo też oczywiście, czy układ taki posiada rozwiązanie w dziedzinie liczb całkowitych.

Przyjmując, że zajęcia  $A_1, B_1$ , prowadzi wykładowca  $L_1$ , a zajęcia  $A_2, B_2$ , wykładowca  $L_2$ , poszukiwany jest rozkład zajęć gwarantujący ciągłość prowadzonych zajęć, tzn. brak „okienek”, tak dla grup studenckich jak i prowadzonych zajęć. Komputerowa implementacja tak sformułowanego problemu w języku Oz Mozart prowadzi do komunikatu: brak rozwiązań.

Okazuje się, że wszystkie możliwe warianty realizacji zajęć prowadzą do występowania „okienek” bądź to wśród grup studenckich, bądź też wykładowców. Przykład takiej realizacji ilustruje Rys. 9. W przedstawionym przypadku wykładowca  $L_2$  ma przerwę (trwającą 1 jednostkę czasu) między zajęciami  $A_2$  grupy  $E_1$  i zajęciami  $B_2$  grupy  $E_2$ .



**Rys. 9.** Wykres Gantt'a rozwiązania z „okienkiem” dla wykładowców

Brak „bezokienkowych” rozwiązań nie oznacza, że nie można rozważać komplementarnych, odwrotnych problemów planowania – problemów związanych z wyznaczeniem czasów trwania zajęć i ich kolejności wykonania gwarantujących istnienie „bezokienkowych” planów zajęć. Celem ilustracji tej możliwości rozważmy problem, w którym nieznane są czasy trwania poszczególnych zajęć, jednak suma godzin przypadająca na blok wykładowy postaje nie zmieniona:

$$t_{1,A1} + t_{1,A2} = 5, \text{ (5 jednostek dla bloku A grupy } E_1\text{);}$$

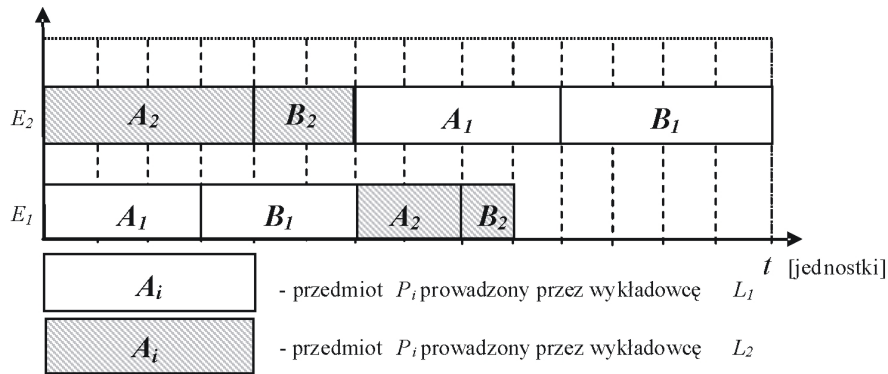
$$t_{1,B1} + t_{1,B2} = 4, \text{ (4 jednostki dla bloku B grupy } E_1\text{);}$$

$$t_{2,A1} + t_{2,A2} = 8, \text{ (8 jednostek dla bloku A grupy } E_2\text{);}$$

$$t_{2,B1} + t_{2,B2} = 6, \text{ (6 jednostek dla bloku B grupy } E_2\text{).}$$

Poszukiwana jest odpowiedź na pytanie: Czy istnieje taki zbiór czasów trwania czynności  $T_1, T_2$  oraz taka ich kolejność realizacji, która umożliwia „bezokienkową” (zarówno dla wykładowców jak i dla grup studenckich) realizację zajęć?

Komputerowa implementacja tak sformułowanego problemu prowadzi do następujących czasów trwania zajęć  $E_1, E_2$ :  $T_1 = (3, 3, 2, 1)$ ,  $T_2 = (4, 4, 4, 2)$ , gwarantującą „bezokienkową” realizację zajęć. Dla grupy  $E_1$  sekwencja określająca kolejność realizacji zadań tej grupy ma postać  $(A_1, B_1, A_2, B_2)$ , z kolei dla grupy  $E_2$  sekwencja określająca kolejność realizacji zadań tej grupy ma postać  $(A_2, B_2, A_1, B_1)$ . Otrzymane rozwiązanie ilustruje Rys 10.



Rys. 10. Wykres Gantt'a "bezokienkowego" rozwiązania.

Łatwo zauważyć, że uzyskane rozwiązanie  $T_1 = (3,3,2,1)$ ,  $T_2 = (4,4,4,2)$  przedstawia warunki wystarczające dla istnienia poszukiwanego rozwiązania dwukryterialnego problemu harmonogramowania zajęć lekcyjnych. Warto też zwrócić uwagę na relacje występujące pomiędzy strukturą (liczba grup studenckich, wykładowców, kompetencjami wykładowców, modułów zajęć, itp.), a zachowaniem (oczekiwaniem ciągłej, „bezokienkowej” pracy, obciążeniem, zachowaniem indywidualnych priorytetów, itp.) rozważanego systemu. W szczególności łatwo widać, że nie przy każdej strukturze można uzyskać oczekiwane zachowanie, co znaczy, że chcąc zagwarantować określone zachowanie warto rozważyć problem odwrotny związany z poszukiwaniem odpowiedniej struktury.

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że diofantyczny charakter problemów harmonogramowania cyklicznego tłumaczy również nierozstrzygalność pewnych, spotykanych w praktyce, problemów decyzyjnych, jak np. problemu wyznaczenia określonej długości cyklu systemu złożonego z podsystemów o arbitralnie zadanej długości cykli. Uwaga ta wskazuje na fakt, że rozwiązań dopuszczalnych (w tym optymalnych) należy poszukiwać w pewnej wektorowej przestrzeni liczb naturalnych. W praktyce oznacza to konieczność określenia procedury generującej elementy tej przestrzeni. Przykładowy problem można sformułować w następujący sposób: dany jest system współbieżnych procesów cyklicznych, znane są cykle procesów składowych. Poszukiwany jest stan początkowy i zbiór reguł priorytetu gwarantujący cykliczne zachowanie systemu o zadanej (minimalnej) długości cyklu.

Rozwiązanie tego problemu sprowadza się do odpowiedzi na pytanie: Czy istnieje rozwiązanie odpowiedniego układu równań diofantycznych? W ogólności oznacza to, konieczność każdorazowej weryfikacji sformułowań problemów harmonogramowania cyklicznego pod kątem ich rozstrzygalności.

## 5. Zakończenie

Diofantyczny charakter problemów harmonogramowania cyklicznego, w szczególności problemów „timetablingu”, uniemożliwia wykorzystanie standardowych narzędzi implementujących metody programowania matematycznego czy też metody implementujące paradygmaty sztucznej inteligencji (typu tabu search, evolutionary computation, simulated annealing) [1, 2, 9, 11, 15]. Nierozstrzygalny charakter tych problemów i związana z tym niepewność co do istnienia jakichkolwiek rozwiązań dopuszczalnych implikuje konieczność wyznaczania warunków wystarczających gwarantujących istnienie rozwiązań tego typu zdań, warunków umożliwiających budowę metod bazujących na paradygmacie wnioskowania abdukcyjnego. Metod związanych z syntezą struktur obiektów spełniających oczekiwane zachowanie. Oznacza to konieczność poszukiwania warunków jakie winna spełniać struktura systemu aby jego zachowanie odpowiadało przyjętym oczekiwaniom.

Narzucony koniecznością uwzględnienia wyżej wymienionych ograniczeń (tzn. odpowiednich warunków wystarczających) sposób reprezentacji problemu decyzyjnego (przyjmujący postać swoistej bazy wiedzy) pozwala wykorzystać techniki programowania z ograniczeniami [6, 13] do weryfikacji jego niesprzeczności w kontekście arbitralnie zadanego zbioru pytań rutynowych. Komputerowe implementacje tak specyfikowanych problemów (przyjmujących postać problemów spełniania ograniczeń [1, 5]) pozwalają rozwiązywać różne (w tym również i rewersyjne) wielokryterialne problemy decyzyjne. W szczególności oznacza to możliwość wykorzystania tego typu reprezentacji przy budowie dedykowanych systemów interakcyjnego wspomaganie decyzji, np. tych związanych z planowaniem inwestycji występujących w małych i średnich przedsiębiorstwach produkcyjnych.

## Literatura

- [1] Bach I., Bocewicz G., Banaszak Z., Constraint programming approach to time-window and multiresource-constrained projects portfolio prototyping. In: Industrial, Engineering and Other Applications of Applied Intelligent Systems, IEA/AIE 2008, N.T. Nguyen et al. (Eds.), Lecture Notes in Artificial Intelligence 5027, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008, 767–776
- [2] Banaszak Z., Bzdrya K., Bocewicz G., (2009). O rozstrzygalności problemów harmonogramowania cyklicznego, Polioptymalizacja i Komputerowe Wspomaganie Projektowania, Mielno, 2009, (w druku).
- [3] Bocewicz G., Bach I., Banaszak Z., O Problemie Timetabling’u Jako o Problemie Rozstrzygalności. Inżynieria Wiedzy i Systemy Ekspertowe, Wrocław, 2009, (w druku)

- [4] Bocewicz G., Bach I., Banaszak Z., Modele diofantyczne cyklicznych procesów transakcyjnych, IX Międzynarodowa Konferencja Naukowo-Techniczna Technologiczne Systemy Informacyjne w Inżynierii Produkcji i Kształceniu Technicznym Kazimierz Dolny, 2009, (w druku)
- [5] Bocewicz G., Banaszak Z., Wójcik R., Design of admissible schedules for AGV systems with constraints: a logic-algebraic approach, In: Agent and Multi-Agent Systems: Technologies and Applications, Nguyen N.T., Grzech A., Howlett R.J., Jain L.C. (Eds.), Lecture Notes in Artificial Intelligence 4496, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2007, 578-587.
- [6] Barták R., Incomplete Depth-First Search Techniques: A Short Survey, Proceedings of the 6<sup>th</sup> Workshop on Constraint Programming for Decision and Control, Ed. Figwer J., 2009, 7-14.
- [7] Cai X., Li K.N., A genetic algorithm for scheduling staff of mixed skills under multi-criteria. European Journal of Operational research, 125, 2000, 359-369.
- [8] Drexel A., Mundschenk M., Long-term staffing based on qualification profiles. Math. Meth. Oper. Res. 68, 2008, 21-47.
- [9] Ernst A.T., Jiang H., Krishnamoorthy M., Owens B., Sier D., An annotated bibliography of personnel scheduling and rostering. Annals of Operations Research, 127, 2009, 21-144.
- [10] Gaujal B., Jafari M., Baykal-Gursoy M., Alpan G.: Allocation Sequences of Two Processes Sharing a Resource. IEEE Trans. on Robotics and Automation, Vol.11, No. 5, 1995, pp. 748-353.
- [11] Hapke M., Jaszkiwicz A., Słowiński R., Interactive analysis of multiple-criteria Project scheduling problems. European Journal of Operational research, 107, 2007, 315-324.
- [12] Polak M., Majdzik P., Banaszak Z., Wójcik R., The performance evaluation tool for automated prototyping of concurrent cyclic processes. Fundamenta Informatice, April, 2004, Editor-in-Chief, A. Skowron, ISO Press, Vol. 60, No.1-4, 2004, pp.269-289.
- [13] Schutle H., Smolka G., Wurtz J., Finite Domain Constraint Programming in Oz. German Research Center for Artificial Intelligence, Germany, D-66123 Saarbrücken, 1998.
- [14] Smart Nigel P., The Algorithmic Resolution of Diophantine Equations. London Mathematical Society Student Text, 41. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [15] Von Thomas Kampmeyer, Cyclic scheduling problems, Ph.D. Dissertation, Fachbereich Mathematik/Informatik, Universität Osnabrück, 2006
- [16] Wójcik R.: Towards Strong Stability of Concurrent Repetitive Processes Sharing Resources. Systems Science, Vol. 27, No. 2, 2001, pp. 37-47.
- [17] [http://pl.wikipedia.org/wiki/R%C3%B3wnanie\\_diofantyczne](http://pl.wikipedia.org/wiki/R%C3%B3wnanie_diofantyczne).

## **Diophantine models of the cyclic scheduling problems**