Stabilność nieliniowych układów dynamicznych

Jacek Kabziński, Przemysław Mosiołek

Teoria stabilności nieliniowych układów dynamicznych wchodzi w zakres podstawowego kursu teorii sterowania dla studentów automatyki i robotyki oraz mechatroniki. Zazwyczaj omawia się podstawowe definicje stabilności i twierdzenia najważniejsze dla bezpośredniej metody Lapunowa, służące do badania stabilności punktów równowagi układów stacjonarnych i autonomicznych. Tymczasem w ostatnich dziesięcioleciach teoria stabilności układów nieliniowych była ciągle rozwijana i sukcesywnie pojawiały się twierdzenia rozszerzające jej zastosowania. Rozdziały w tej części książki mają charakter encyklopedycznego przeglądu aktualnego stanu wiedzy w tym zakresie. Podano najpierw definicje precyzujące różne pojęcia stabilności (rozdział pierwszy), a następnie twierdzenia, które można zastosować przy badaniu stabilności układów stacjonarnych (rozdział drugi) i niestacjonarnych (rozdział trzeci). Przedstawione pojęcia zilustrowano kilkoma przykładami. Dowody twierdzeń podano jedynie wtedy, gdy ułatwiają one zrozumienie istoty zjawisk. Sporo miejsca poświęcono ograniczoności i ostatecznej ograniczoności trajektorii, które są bardzo „praktycznym" rodzajem stabilności układów nieliniowych.

Nieliniowe układy dynamiczne, punkty równowagi i stabilność

Pojęcie stabilności ma kluczowe znaczenie w teorii sterowania i w praktyce projektowania układów regulacji. W języku potocznym „stabilny" jest bez wątpienia przymiotnikiem pozytywnym. „Stabilne konstrukcje" uważamy za bezpieczne, lepiej czujemy się w towarzystwie osób „stabilnych emocjonalnie", cenimy „stabilne uczucia". Wolimy też, by systemy ekonomiczne, biologiczne i społeczne, w których żyjemy, były stabilne, czyli zgodnie z definicją *Słownika języka polskiego* „łatwo powracające do równowagi po wcześniejszym jej zakłóceniu".

O ile można się zgodzić, że układy dynamiczne, które są tworami natury, zwykle charakteryzują się stabilnością i tylko wyjątkowo przejawiają zachowania niestabilne, równoznaczne katastrofie, o tyle w przypadku układów skonstruowanych przez człowieka utrata stabilności jest całkiem możliwa. Wiadomo, że nawet liniowe sprzężenie zwrotne wokół liniowego i stabilnego obiektu może prowadzić do utraty stabilności układu zamkniętego i trzeba specjalnie zadbać o to, by taka sytuacja nie wystąpiła. Stabilność jest podstawowym wymaganiem stawianym układom sterowania i warunkiem bezpieczeństwa ich pracy.

W odniesieniu do układów dynamicznych stabilność można definiować i opisywać na wiele sposobów. Możliwe jest definiowanie stabilności na podstawie relacji wejście – wyjście układu, to jest jako cechy polegającej na tym, że wyjście układu zachowuje się „poprawnie" w określonym sensie, jeśli tylko wejście zachowuje się „poprawnie". W ujęciu przyjętym w tej książce stabilność jest definiowana na podstawie analizy asymptotycznego (czyli dla czasu dążącego do nieskończoności) zachowania trajektorii wektora stanu układu, w relacji do trajektorii obowiązujących w stanie ustalonym – to jest punktów równowagi lub cykli granicznych. W tym rozdziale są zebrane definicje stabilności rozumianej w różny sposób.

Przedmiotem rozważań są nieliniowe układy dynamiczne, które mogą być opisane skończonym układem równań różniczkowych zwyczajnych, nazywanym równaniem stanu

$$\dot{x} = f(t, x, u) \tag{1}$$

w którym t oznacza czas,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

jest n-wymiarowym wektorem zmiennych stanu, $\dot{x}$ pochodną zmiennych stanu x względem czasu, a

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \tag{3}$$

p-wymiarowym wektorem sygnałów wejściowych (sterowań) oraz

$$f(t, x, u) = \begin{bmatrix} f_1(t, x, u) \\ f_2(t, x, u) \\ \vdots \\ f_n(t, x, u) \end{bmatrix} \tag{4}$$

Jeżeli nie wszystkie zmienne stanu są dostępne, to przyjmiemy, że wyjście układu jest opisane równaniem algebraicznym

$$y = h(t, x, u) \tag{5}$$

w którym

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \tag{6}$$

jest m-wymiarowym wektorem wyjść oraz

$$h(t,x,u) = \begin{bmatrix} h_1(t,x,u) \\ h_2(t,x,u) \\ \vdots \\ h_m(t,x,u) \end{bmatrix} \tag{7}$$

Rozważane są układy dynamiczne, w których funkcja $f(t, x, u)$ spełnia założenia odpowiedniego twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania równania różniczkowego (twierdzenie D2.2 z dodatku D2), to znaczy, że przy określonym warunku początkowym $x(t_0) = x_0$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $x(t)$ równania (1) określone dla $t \geq t_0$, nazywane trajektorią układu. By podkreślić zależność rozwiązania równania stanu od warunków początkowych, będzie stosowane oznaczenie $x(t; t_0, x_0)$ dla trajektorii spełniającej warunek $x(t_0) = x_0$.

Jeżeli w opisie modelowanego układu nie wyróżniono w jawny sposób sygnałów wejściowych, to jest

$$\dot{x} = f(t,x) \tag{8}$$

to taki układ jest nazywany swobodnym. Postać modelu (8) nie musi oznaczać, że układ jest pozbawiony sterowania. Model (8) jest odpowiedni w sytuacji, gdy określone sterowanie $u = u(t)$ zostało uwzględnione w zależności funkcji f od czasu, lub kiedy sterowanie w postaci sprzężenia od zmiennych stanu $u = u(x)$ zostało uwzględnione w zależności funkcji f od zmiennych stanu x, lub w bardziej ogólnym przypadku łączącym dwa poprzednie, to jest gdy określono sterowanie $u = u(t, x)$. Jeśli w równaniu (8) nie występuje jawna zależność funkcji f od czasu, to jest

$$\dot{x} = f(x) \tag{9}$$

to układ jest nazywany stacjonarnym. Parametry układu stacjonarnego pozostają stałe w funkcji czasu, a jego zachowanie nie zależy od chwili początkowej t_0.

Definicja 1. Punktem równowagi układu (8) nazywamy każdy stan x_e, dla którego $f(t, x_e) = 0$ dla każdego $t > t_0$.

Stała trajektoria $x(t) = x_e$ jest więc rozwiązaniem równania (8) z warunkiem początkowym $x(t_0) = x_e$. Gdy układ jest stacjonarny (obowiązuje model (9)), wówczas punkty równowagi są rzeczywistymi pierwiastkami równania algebraicznego $f(x) = 0$. Punkt $x = 0$ nie musi być punktem równowagi układu (9). Jeżeli jednak $x_e \neq 0$ jest punktem równowagi układu (9), to zamiana zmiennych określona równaniem $z = x - x_e$ prowadzi do układu

$$\dot{z} = f(z + x_e) = g(z) \tag{10}$$

w którym $z = 0$ jest punktem równowagi. Tak więc założenie, że punkt równowagi znajduje się w początku układu współrzędnych, nie zmniejsza ogólności rozważań, o ile badamy właściwości jednego, konkretnego punktu równowagi.

Definicja 2. Punkt równowagi x_e jest nazywany izolowanym punktem równowagi, jeśli istnieje jego otoczenie niezawierające innych punktów równowagi.

O ile w stacjonarnym układzie liniowym istnieje pojedynczy izolowany punkt równowagi (albo kontinuum nieizolowanych punktów równowagi), o tyle w układzie nieliniowym może występować wiele izolowanych punktów równowagi.

Oprócz punktów równowagi układu nieliniowego można wyróżnić okresowe trajektorie opisujące jego zachowanie w stanie ustalonym, czyli dla $t \to \infty$.

Definicja 3. Jeżeli istnieje zmienne w czasie rozwiązanie równania (8) spełniające warunek

$$x(t+T) = x(t) \tag{11}$$

dla pewnego $T > 0$ i każdego $t > t_0$, to nazywamy je cyklem granicznym.

Trajektoria w przestrzeni stanów odpowiadająca cyklowi granicznemu ma postać zamkniętej krzywej.

Dla układów liniowych „stabilność” jest rozumiana jako właściwość całego układu polegająca na zanikaniu składowej przejściowej odpowiedzi układu. W przypadku układów nieliniowych właściwość nazywana stabilnością dotyczy poszczególnych trajektorii układu, a w szczególności służy do opisu zachowania trajektorii układu nieliniowego w otoczeniu punktów równowagi. Zachowanie to może być różne w poszczególnych punktach równowagi tego samego układu. Inaczej niż w przypadku układów liniowych, dla których wszystkie definicje stabilności są równoważne, dla układów nieliniowych można sformułować wiele istotnie różniących się definicji stabilności.

Definicja 4. Punkt równowagi x_e układu (8) nazywamy stabilnym w sensie Lapunowa, jeśli dla dowolnych $t_0 > 0$, $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta_\varepsilon > 0$ (zależna być może od t_0, ε) taka, że

$$\|x_e - x_0\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|x_e - x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon \tag{12}$$

Definicja 5. Punkt równowagi x_e układu (8) nazywamy niestabilnym, jeśli nie jest stabilny w sensie definicji 4.

Definicja 6. Punkt równowagi x_e układu (8) nazywamy jednostajnie stabilnym, jeżeli $\delta_\varepsilon > 0$ w definicji 4 nie zależy od t_0.

Definicja 7. Punkt równowagi x_e układu (8) nazywamy stabilnym asymptotycznie, jeśli jest stabilny w sensie definicji 4, a ponadto istnieje $\delta > 0$ (zależna być może od t_0) taka, że

$$\|x_e - x_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \|x_e - x(t; t_0, x_0)\| = 0 \tag{13}$$

Definicja 8. Punkt równowagi x_e układu (8) nazywamy jednostajnie stabilnym asymptotycznie, jeżeli jest jednostajnie stabilny, a ponadto istnieje $\delta > 0$, niezależna od t_0 i taka, że dla wszystkich $\|x_e - x_0\| < \delta$ trajektoria $x(t; t_0, x_0)$ zbiega do x_e jednostajnie względem t_0, to znaczy dla dowolnego $t_0 > 0$, $\varepsilon > 0$ istnieje $\tau(\varepsilon) > 0$ takie, że

$$\|x_e - x_0\| < \delta \Rightarrow \forall_{t > t_0 + \tau(\varepsilon)} \|x_e - x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon \tag{14}$$

Punkt równowagi jest globalnie jednostajnie asymptotycznie stabilny, jeśli warunki tej definicji są spełnione dla dowolnych par liczb (ε, δ).

Definicja 9. Punkt równowagi x_e układu (8) nazywamy wykładniczo stabilnym, jeżeli istnieje liczba α > 0 taka, że dla dowolnego ε > 0 istnieje δ > 0 (zależna być może od ε) taka, że dla dowolnego $t \geq t_0$

$$\forall_{t \geq t_0} \|x(t; t_0, x_0)\| < \beta \tag{15}$$

Z definicji 9 i 7 wynika bezpośrednio, że wykładniczo stabilny punkt równowagi jest asymptotycznie stabilny.

Przykład 1

Weźmy pod uwagę układ nieliniowy

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \left(10x_1^2 + x_2^2 + 0{,}3\right) \\ \dot{x}_2 &= -6x_1 \left(10x_1^2 + x_2^2 + 0{,}3\right) - bx_2 \end{aligned} \tag{16}$$

Na rysunku 1 pokazano trajektorie układu dla $b = 0$.

W takim przypadku trajektorie układu tworzą krzywe zamknięte – elipsy, których półosie zależą od warunków początkowych. Dla dowolnie małego okręgu o promieniu ε można wybrać okrąg o promieniu δ taki, że trajektorie układu (elipsy) zaczynające się w tym okręgu nie wyjdą poza okrąg o promieniu ε. Na rysunku 1 linią kreskową zaznaczono przykładowy okrąg o promieniu ε, a linią kropka–kreska odpowiadający mu okrąg o promieniu δ. Zgodnie z definicją 7 punkt równowagi $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ jest stabilny w sensie Lapunowa.

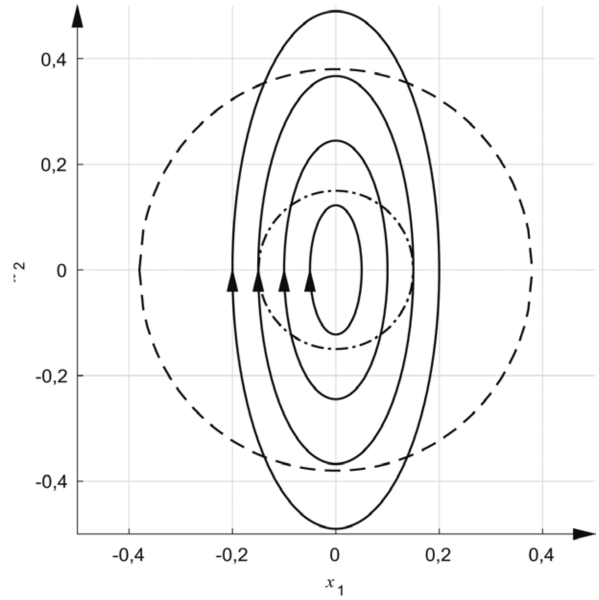
Gdy $b > 0$, wówczas otrzymujemy trajektorie jak na rysunku 2. Dla dowolnego okręgu o promieniu ε (linia kreskowa) można wskazać okrąg o promieniu δ (linia kropka–kreska) taki, że każda zaczynająca się w nim trajektoria nie opuści okręgu o promieniu ε, a ponadto dąży do punktu równowagi $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, gdy t dąży do nieskończoności. Punkt równowagi $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ jest więc asymptotycznie stabilny.

Definicja 10. Zbiór wszystkich takich punktów x_0 w przestrzeni stanów, dla których $\lim_{t \to \infty} \|x_e - x(t; t_0, x_0)\| = 0$ dla pewnego $t_0 \geq 0$ nazywamy zbiorem przyciągania punktu równowagi x_e.

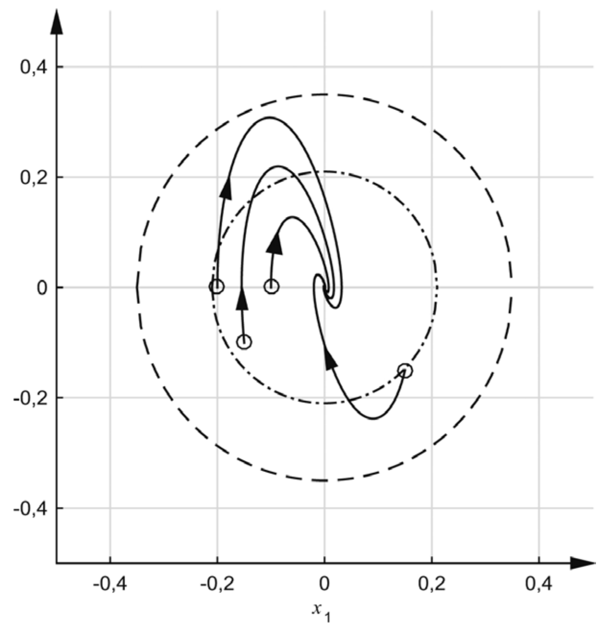
Definicja 11. Jeżeli punkt równowagi x_e układu (8) jest asymptotycznie stabilny i jego zbiór przyciągania jest całą przestrzenią stanów, to punkt równowagi nazywamy globalnie asymptotycznie stabilnym.

W przypadku układów stacjonarnych, opisanych równaniem (9), znika zależność trajektorii od chwili początkowej t_0, więc stabilny punkt równowagi układu stacjonarnego jest jednostajnie stabilny, a asymptotycznie stabilny jest jednostajnie asymptotycznie stabilny.

Stabilność w sensie Lapunowa, zgodnie z definicją 4, jest dość słabym wymaganiem wobec zachowania układu dynamicznego – nie pociąga nawet zbieżności trajektorii do punktu równowagi, a tylko ogranicza obszar wokół punktu równowagi, w którym trajektoria pozostaje. Zgodnie z tą definicją małe zaburzenie warunku początkowego daje małą zmianę rozwiązania. Stabilność asymptotyczna oznacza, że wokół punktu równowagi istnieje obszar przyciągania – trajektoria startująca w tym obszarze dąży do punktu równowagi. Stabilność asymptotyczna nie mówi nic o tym, jak szybko układ zbiega do punktu równowagi, ani nie oznacza, że zbieżność jest „monotoniczna" – układ może początkowo oddalić się od punktu równowagi, by ostatecznie do niego powrócić. Takie trajektorie pokazano na rys. 2. Informacja o szybkości zbieżności wynika natomiast z definicji stabilności wykładniczej – decyduje o niej parametr α we wzorze (15).



Rys. 1. Graficzna ilustracja definicji 7: linia ciągła – trajektorie układu; kropka–kreska – okrąg o promieniu δ; kreskowa – okrąg o promieniu ε



Rys. 2. Graficzna ilustracja definicji 8: linia ciągła – trajektorie układu; kropka–kreska – okrąg o promieniu δ; kreskowa – okrąg o promieniu ε; o – wartości początkowe

Dla stacjonarnych układów liniowych koniecznym i dostatecznym warunkiem stabilności asymptotycznej jest położenie wszystkich wartości własnych macierzy stanu w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej.

O tym, że wymaganie stabilności umieszczone w definicji stabilności asymptotycznej jest konieczne, przekonuje podany w [Hahn, 1967] przykład układu, w którym punkt równowagi ma obszar przyciągania, ale nie jest stabilny.

Przykład 2

Rozważmy system nieliniowy drugiego rzędu opisany równaniami

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{x_1^2(x_2 - x_1) + x_2^5}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)\left(1 + \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2\right)} \\ \dot{x}_2 &= \frac{x_2^2(x_2 - 2x_1)}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)\left(1 + \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2\right)} \end{aligned} \tag{17}$$

System (17) ma jeden punkt równowagi $(x_{e1}, x_{e2}) = (0, 0)$. Na rysunku 3 pokazano kilka wybranych trajektorii stanu rozważanego układu.

Jak pokazano w [Hahn, 1967], obszarem przyciągania jest cała płaszczyzna R^2. Mimo to nie są spełnione warunki definicji 4 i punkt równowagi nie jest stabilny w sensie Lapunowa. Zostanie pokazana taka liczba $\varepsilon > 0$, dla której nie istnieje δ dająca prawdziwość implikacji (12) – trajektoria rozpoczynająca się dowolnie blisko punktu równowagi opuszcza jego otoczenie o promieniu ε.

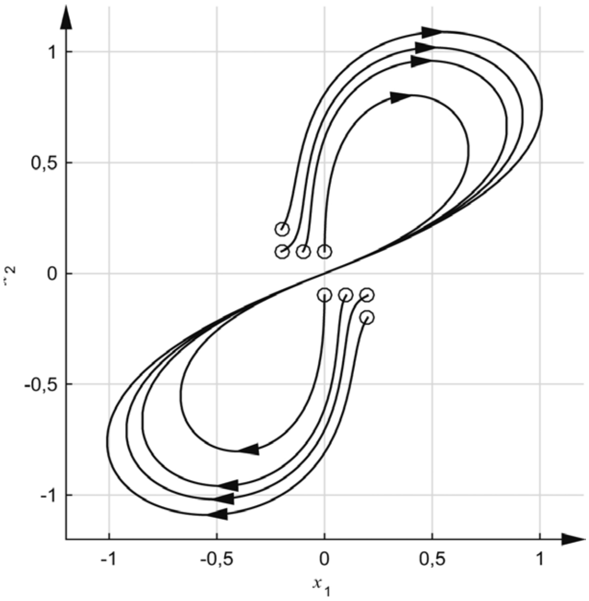
Weźmy pod uwagę domknięty trójkąt T ograniczony przez dodatnią półoś x_2, prostą $x_2 = 3x_1$ oraz prostą $x_2 = a < \frac{1}{\sqrt{27}}$ (rys. 4). Wewnątrz tego trójkąta i na jego krawędziach $\dot{x}_2 > 0$ i $\dot{x}_1 > 0$, a na odcinku OP jest spełniona zależność

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = \frac{x_2^2(x_2 - 2x_1)}{x_1^2(x_2 - x_1) + x_2^5} = \frac{9}{2 + 27x_2^2} > 3 \tag{18}$$

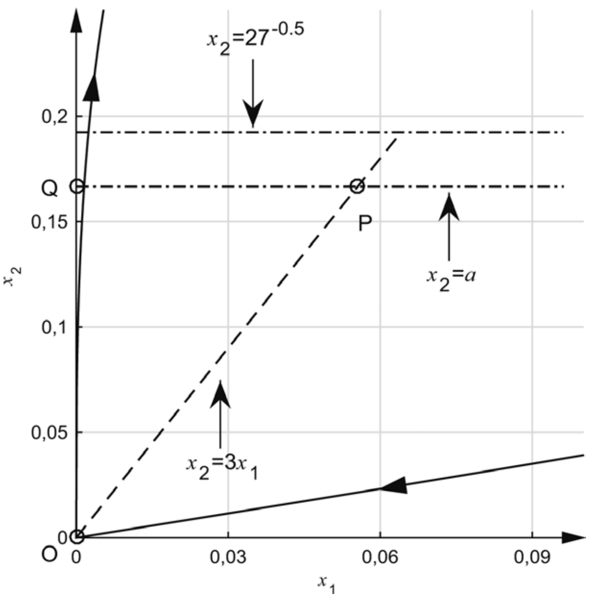
Wynika stąd, że jeżeli trajektoria układu znajdzie się w trójkącie T, to dalej trajektoria musi przebiegać tak, że obie zmienne stanu rosną, a gdyby trajektoria dotarła do odcinka OP, to z uwagi na (18) zostałaby skierowana do wnętrza trójkąta T. Tak więc każda trajektoria z warunkiem początkowym wewnątrz trójkąta OPQ musi przeciąć odcinek QP.

Niech $\varepsilon = a$. Rozważmy trajektorię z warunkiem początkowym $x_1 = 0$, $x_2 = \delta < a$. Musi ona przeciąć odcinek QP, musi więc opuścić otoczenie punktu równowagi o promieniu $\varepsilon = a$ niezależnie od tego, jak mała jest odległość δ warunku początkowego od punktu (0,0), czyli układ jest niestabilny. Na rysunku 4 pokazano początkowy i końcowy fragment trajektorii dla warunku początkowego $(0; 10^{-10})$.

Stabilność w sensie Lapunowa i stabilność asymptotyczna zakładają istnienie punktu równowagi. W wielu układach obecność zmieniających się zakłóceń, szumów pomiarowych itp. wyklucza istnienie stałego punktu równowagi. W takim przypadku przydatne są definicje pozwalające na ocenę globalnego zachowania trajektorii układu.



Rys. 3. Trajektorie układu (17): o – warunki początkowe



Rys. 4. Trójkąt OPQ i trajektorie układu (17) (linia ciągła)

Definicja 12. Trajektoria $x(t; t_0, x_0)$ układu (8) jest ograniczona, jeżeli istnieje stała $\beta > 0$ taka, że

$$\forall_{t \geq t_0} \|x(t; t_0, x_0)\| < \beta \tag{19}$$

Stała β w definicji 12 jest związana z wybraną trajektorią. Właściwość określoną w definicji 12 można wzmocnić żądając, żeby ta sama stała była odpowiednia dla wielu trajektorii.

Definicja 13. Trajektorie $x(t; t_0, x_0)$ układu (8) są jednostajnie ograniczone, jeżeli dla dowolnego, ograniczonego $\alpha > 0$ i $t_0 \geq 0$ istnieje stała $\beta > 0$ (zależna od α, ale niezależna od t_0) taka, że

$$\|x_0\| < \alpha \Rightarrow \forall_{t \geq t_0} \|x(t; t_0, x_0)\| < \beta \tag{20}$$

Definicja 14. Trajektorie $x(t; t_0, x_0)$ układu (8) są ostatecznie jednostajnie ograniczone z ograniczeniem $B > 0$, jeżeli dla dowolnego, ograniczonego $\alpha > 0$ i $t_0 \geq 0$ istnieje $\tau > 0$ (zależne od α i B) takie, że

$$\|x_0\| < \alpha \Rightarrow \forall_{t \geq t_0 + \tau(\alpha, B)} \|x(t; t_0, x_0)\| < B \tag{21}$$

Jeśli stała α może być dowolnie duża, to trajektorie układu są globalnie ostatecznie jednostajnie ograniczone.

Przykład 3

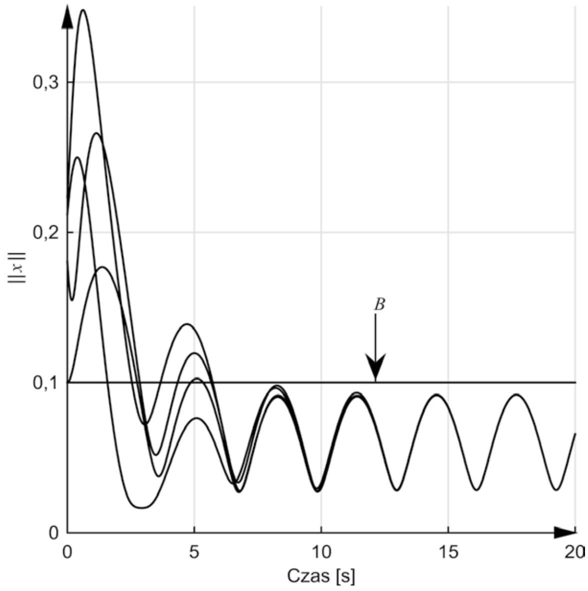
Weźmy pod uwagę układ nieliniowy (16) dla $b > 0$, poddany zewnętrznemu sygnałowi zakłócającemu $d(t) = 0{,}1 \sin(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \left(10x_1^2 + x_2^2 + 0{,}3\right), \\ \dot{x}_2 &= -6x_1 \left(10x_1^2 + x_2^2 + 0{,}3\right) - bx_2 + 0{,}1 \sin(t) \end{aligned} \tag{22}$$

Na rysunku 5 przedstawiono przebiegi normy wektora stanu układu (22).

Układ (22) jest stabilny w sensie definicji 14. Na rysunku 5 widać, że czas, po którym norma wektora stanu układu (22) ostatecznie spełnia ograniczenie B, zależy od warunków początkowych.

Definicja 14 określa więc bardzo użyteczną cechę, polegającą na tym, że wszystkie trajektorie układu trafią po pewnym skończonym czasie do tego samego otoczenia punktu zerowego. Od warunku początkowego zależy ten czas, ale nie promień B tego otoczenia. Jeżeli dodatkowo możemy zmniejszać B, na przykład poprzez parametry projektowe układu sterowania, to ostateczna jednostajna ograniczoność jest w pełni wystarczająca do praktycznej stabilizacji rzeczywistych układów regulacji. ■



Rys. 5. Przebieg normy wektora stanu

Bibliografia dostępna pod linkiem: nis.com.pl/bibliografia.html

Fragment pochodzi z książki:
Projektowanie nieliniowych układów sterowania
Jacek Kabziński, Przemysław Mosiołek
Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2018