

**Mateusz BRZEK, Wojciech MITKOWSKI**  
KATEDRA AUTOMATYKI I INŻYNIERII BIOMEDYCZNEJ EAIIB-AGH,  
Al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków

## Lokalizacja uszkodzeń w zadanym obszarze z wykorzystaniem teorii spektralnej

Mgr Mateusz BRZEK

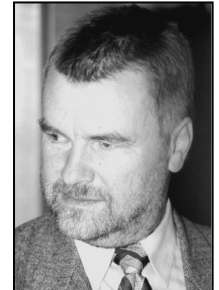
Absolwent Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie na Wydziale Matematyki Stosowanej o specjalności Matematyka w Naukach Przyrodniczych i Technicznych. Od 2012 jest doktorantem Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie na Wydziale Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii Biomedycznej. Specjalizuje się w zastosowaniach teorii spektralnej i równań różniczkowych w zagadnieniach technicznych.



e-mail: mbrzek@agh.edu.pl

Prof. dr hab. inż. Wojciech MITKOWSKI

W roku 1970 uzyskał tytuł magistra inżyniera elektryka w zakresie automatyki i telemekhaniki na Wydziale Elektrotechniki Górniczej i Hutniczej AGH w Krakowie. Na tym samym Wydziale w roku 1974 uzyskał stopień doktora nauk technicznych, a w roku 1984 stopień doktora habilitowanego w zakresie automatyki. W roku 1992 Prezydent RP nadał Mu tytuł naukowy profesora nauk technicznych. Główne kierunki badań naukowych to automatyka i robotyka, teoria sterowania oraz teoria obwodów elektrycznych.



e-mail: wojciech.mitkowski@agh.edu.pl

### Streszczenie

W literaturze naukowej problem lokalizacji uszkodzeń istnieje od dziesiątków lat. Polega on na rozwiązaniu zadania odwrotnego, czyli przybliżonego określenia lokalizacji uszkodzenia na podstawie funkcji i wartości własnych operatora w zadanym obszarze [1]. Algorytmy, przy pomocy których określa się położenie uszkodzenia wymagają skomplikowanych obliczeń [2]. Autorzy niniejszego artykułu chcieli w bezpośredni sposób, przy użyciu wartości własnych operatora Laplace'a dla kwadratu  $[0,1] \times [0,1]$  znaleźć przybliżone miejsce w którym jest uszkodzenie.

**Słowa kluczowe:** lokalizacja uszkodzeń, operator Laplace'a, wartości własne.

### The Approximate Location of Imperfections in Fixed Domain Using the Spectral Theory

#### Abstract

In the following article we will try to find the dependence between the location of imperfections in a square measured  $[0,1] \times [0,1]$  and the spectrum of the Laplace operator for this square. In theoretical considerations concerning the problem of the location of the imperfection for the fixed bounded domain we will take advantage of spectra theory results and, more precisely, the conclusion of the spectra theorem for compact and self-adjoint operators, which says that all eigenvalues of the Laplace operator on the bounded  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  domain are positive and have finite multiplicities and  $+\infty$  is the limit point of eigenvalues. These eigenvalues are dependent on location and size of the imperfection. However, we are interested in the inverse task which consists in localizing the imperfection of the domain on a basis of the spectrum of the operator. In the practical part we will determine the spectrum of 81 samples whose imperfection is placed in different points of domain. On a basis of numerical studies we will hypothesize about the dependence between the spectrum of the Laplace operator of the  $[0,1] \times [0,1]$  square and the location of the imperfection.

**Keywords:** location of imperfections, Laplace operator, eigenvalues.

### 1. Definicja problemu dla obszaru bez uszkodzenia

Niech dany będzie obszar  $\Omega \subset \mathbb{R}^2, \Omega = [0,1] \times [0,1]$ . Dla obszaru  $\Omega$  i  $k=1,2,\dots$  definiujemy problem

$$\begin{cases} Au_k^0(x, y) = \lambda_k^0 u_k^0(x, y) & \text{w } \Omega \\ u_k^0(x, y) = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

gdzie  $A$  jest operatorem liniowym  $A: H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  takim, że operator  $-A$  jest operatorem eliptycznym, a operator odwrotny do  $A$  tj.  $A^{-1}: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  jest operatorem zwartym. Wartości i funkcje własne  $(\lambda_k^0, u_k^0(x, y))$  układu (1) odnoszą się do obszaru bez deformacji.

### 2. Definicja problemu dla obszaru z uszkodzeniem

W obszarze  $\Omega$  wprowadzamy uszkodzenie (deformację)  $D$ . Uszkodzeniem jest dziura o nieregularnym kształcie. Może to być szczelina, otwór lub inne zniekształcenie odpowiadające fizycznej deformacji obszaru powstałej na skutek uderzenia, nacisku czy innych sił fizycznych. W praktyce jako obszar  $\Omega$  możemy przyjąć metalową blaszkę w kształcie kwadratu, w której na skutek uderzenia powstała nieregularna dziura. Zakłada się, że powstała deformacja jest mała (pole powierzchni deformacji jest bliskie 0) i znajduje się wewnątrz zadanego obszaru  $\Omega$ . Oznaczmy przez  $\Omega_D$  obszar  $\Omega$  z opisany uszkodzeniem. Dla obszaru  $\Omega_D$  i  $k=1,2,\dots$  rozważamy następujący problem spektralny

$$\begin{cases} Au_k(x, y) = \lambda_k u_k(x, y) & \text{w } \Omega_D \\ u_k(x, y) = 0 & \text{na } \partial\Omega_D \end{cases} \quad (2)$$

Rozwiązaniami powyższego problemu jest nieskończony ciąg par  $(\lambda_k, u_k(x, y))$  dla  $k=1,2,\dots$ , gdzie  $\lambda_k$  są wartościami własnymi oraz  $u_k(x, y)$  są funkcjami własnymi. Wartości własne zależą od położenia i wielkości zniekształcenia  $D$ .

### 3. Definicja problemu odwrotnego

Głównym celem naszych badań będzie rozwiązanie zadania odwrotnego, które polega na lokalizowaniu współrzędnych  $(x, y)$  zniekształcenia  $D$  w kwadracie  $[0,1] \times [0,1]$ , na podstawie widma  $\sigma(A)$  operatora Laplace'a dla tego kwadratu.

$$\sigma(A) \rightarrow (x, y) \quad (3)$$

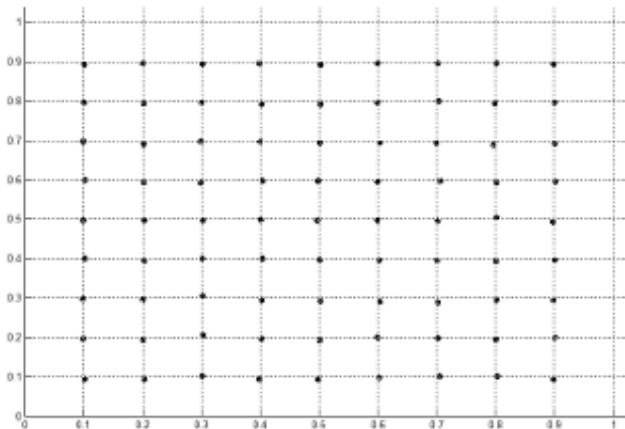
### 4. Symulacja komputerowa

Symulację komputerową przeprowadzaliśmy w programie MATLAB używając pakietu PDE Tool. W modelu matematycznym za operator eliptyczny przyjęliśmy równanie Laplace'a określone dla obszaru  $\Omega = [0,1] \times [0,1]$

$$A = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (4)$$

Celem symulacji numerycznej jest zaobserwowanie jak zachowuje się (charakterystyka) widma operatora Laplace'a dla kwadratu  $[0,1] \times [0,1]$  gdy uszkodzenie znajduje się w różnych punktach tego kwadratu. Następnie na podstawie charakterystyki widma spróbujemy określić położenie uszkodzenia w tym kwadracie, czyli rozwiązać problem odwrotny (3). Trudnym zadaniem jest badanie widma operatora Laplace'a dla kwadratu  $[0,1] \times [0,1]$

z uszkodzeniem w każdym punkcie tego kwadratu, dlatego aby móc stworzyć charakterystykę tego widma wybraliśmy siatkę punktów rozmieszczonych w jednakowej odległości od siebie (rys. 1).



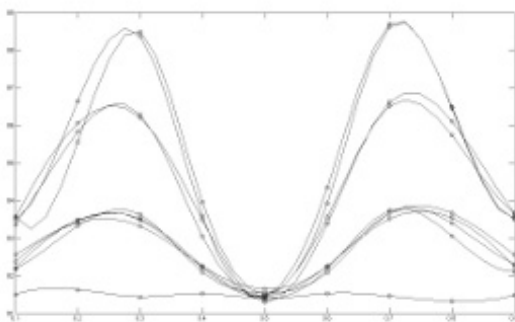
Rys. 1. Siatka punktów w których umieszczaliśmy zniekształcenie  
Fig. 1. The grid of points which the deformation was placed in

Dla każdego punktu (uszkodzenia) powyższej siatki stosowaliśmy poniższy algorytm, aby otrzymać wartości własne i funkcje własne mu przypisane.

Algorytm: 1

1. Zadajemy obszar bez uszkodzenia (kwadrat  $[0,1] \times [0,1]$ ).
2. W zadanym obszarze umieszczamy uszkodzenie.
3. Obszar z uszkodzeniem pokrywamy siatką Mes (triangulacja obszaru z uszkodzeniem).
4. Wybieramy rodzaj równania i jego specyfikację (Eigenmodes,  $a=1,0, c=0,0, d=1,0$ ).
5. Otrzymujemy wartości własne i funkcje własne.

Za cel naszych badań postawiliśmy sobie lokalizację uszkodzenia na podstawie widma. Z uzyskanych danych mamy jego zakres, czyli wartość najmniejszą ( $\lambda_{min}$ ) i największą ( $\lambda_{max}$ ) wartości własnych dla uszkodzenia znajdującego się w poszczególnych punktach. Do dalszej analizy danych posłużyliśmy się wykresami, których argumentami są współrzędne  $x$  kolejnych punktów, w których było uszkodzenie. Rzędny natomiast są wartości maksymalne widma  $\lambda_{max}$  uzyskana dla tej współrzędnej. Każdy wykres odpowiada innej wartości  $y$ . Dokładniej, stosując nasz algorytm dla prostej o równaniu  $y=0,5$  i kolejnych punktów na tej prostej  $(0,k; 0,5)$ , gdzie  $k=0,1,\dots,0,9$ , charakterystyka wartości największych  $\lambda_{max}$  widma jest krzywą położoną najbliżej osi odciętych na rys. 2.



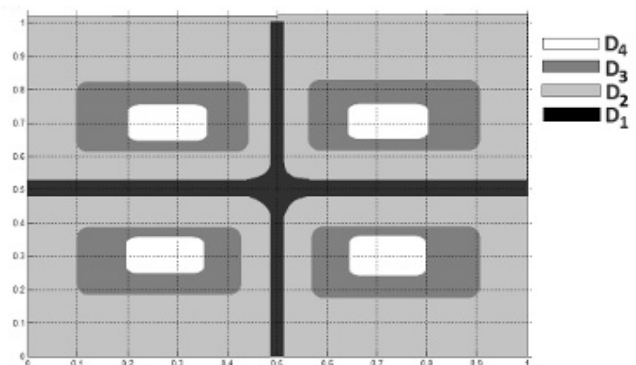
Rys. 2. Charakterystyka wartości największych  $\lambda_{max}$  widma operatora Laplace'a dla kwadratu  $[0,1] \times [0,1]$  z uszkodzeniem  
Fig. 2. The characteristic of maximum values  $\lambda_{max}$  of the spectrum of the Laplace's operator for the square  $[0,1] \times [0,1]$  with the deformation

Charakterystyki widma przedstawione na rys. 2 są splinami kubicznymi wygenerowanymi w programie Matlab.

Na rys. 2. możemy wyróżnić cztery rodziny krzywych. Niech pierwszą rodziną będzie najniższa krzywa, która odpowiada prostej o równaniu  $y=0,5$ . Jej wartości  $\lambda_{max}$  mieszczą się w przedziale  $[81,3; 81,53]$ . Rodziną numer dwa będą krzywe wykreślone dla prostych o równaniach  $y=0,1, y=0,4, y=0,6, y=0,9$ . Tutaj wartości  $\lambda_{max}$  przebiegają przedział  $[81,53; 83,67]$ . Za rodzinę trzecią uznamy krzywe uzyskane dla prostych  $y=0,2, y=0,8$ . Wartości  $\lambda_{max}$  dla tych krzywych mieszczą się w przedziale  $[81,29; 86,62]$ . Ostatnią, czwartą rodziną są charakterystyki mające najwyższe piki. Proste jakie im odpowiadają, to  $y=0,3, y=0,7$ . Wartości  $\lambda_{max}$  dla tej rodziny należą do przedziału  $[81,45,88,7]$ .

Pomysłem autorów jest wyróżnienie czterech przedziałów, do których może należeć  $\lambda_{max}$  i na tej podstawie wyznaczenie obszarów kwadratu  $[0,1] \times [0,1]$ , w których może znajdować się uszkodzenie. Niech przedziałem pierwszym będzie  $J_1(\lambda_{max})=[81,3; 81,53]$ . Przedziałem drugim  $J_2(\lambda_{max})=[81,53; 83,67]$ . Dwa następne przedziały, to  $J_3(\lambda_{max})=[83,67; 86,62]$  i  $J_4(\lambda_{max})=[86,62; 88,7]$ .

Rysunek 3 przedstawia graficzną ilustrację obszarów, w których znajduje się uszkodzenie. To znaczy, jeżeli  $\lambda_{max}$  należy do przedziału  $J_2=[81,53; 83,67]$ , to uszkodzenie leży w obszarze  $D_2$ . Ogólnie, jeżeli  $\lambda_{max}$  należy do przedziału  $J_i(\lambda_{max})$ , gdzie  $i=1,2,3,4$ , to uszkodzenie leży odpowiednio w obszarze  $D_i$ , gdzie  $i=1,2,3,4$ .



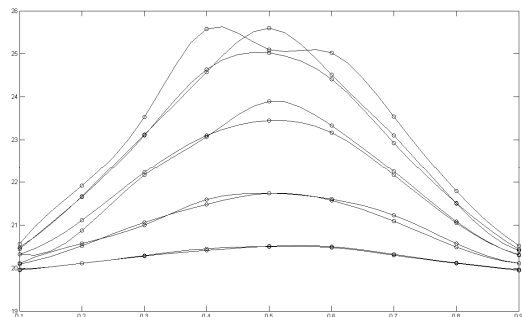
Rys. 3. Graficzna ilustracja obszarów  $D_i$ , dla  $i=1,2,3,4$ , w których znajduje się uszkodzenie

Fig. 3. The graphic illustration of domains  $D_i$ , for  $i=1,2,3,4$ , where the deformation is located in

Taką samą analizę przeprowadzimy dla wartości najmniejszych  $\lambda_{min}$  widma operatora Laplace'a. Rysunek 4 przedstawia charakterystyki dla poszczególnych punktów, z tą jednak różnicą, że oś pionowa to zakres wartości najmniejszych  $\lambda_{min}$  jakie pojawiają się w widmie operatora Laplace'a dla kwadratu  $[0,1] \times [0,1]$  z uszkodzeniem. Podobnie jak w przypadku wartości największych tu również wyróżnimy cztery rodziny krzywych. Pierwszą rodziną będą dwie krzywe leżące najbliżej osi poziomej. Odpowiadają one prostym o równaniach  $y=0,1$  i  $y=0,9$ . Ich wartości  $\lambda_{min}$  mieszczą się w przedziale  $[19,94; 20,51]$ . Druga rodzina to dwie krzywe leżące ponad dwiema pierwszymi. Odpowiadają one prostym o równaniach  $y=0,2$  i  $y=0,8$ . Dla tej rodziny zakres wartości  $\lambda_{min}$  należy do przedziału  $[20,09; 21,74]$ . Rodzina trzecia to charakterystyki wartości najmniejszych widma punktów leżących na prostych  $y=0,3$  i  $y=0,7$ .

Dla tych krzywych zakres wartości  $\lambda_{min}$  należy do przedziału  $[20,3; 23,9]$ . Ostatnia, czwarta rodzina to krzywe uzyskane z wartości najmniejszych widma dla punktów leżących na prostych  $y=0,4, y=0,5, y=0,6$ . Zakres ich wartości  $\lambda_{min}$  należy do przedziału  $[20,4; 26,1]$ . Podobnie jak w przypadku  $\lambda_{max}$  tu również wyróżnimy cztery przedziały, do których może należeć  $\lambda_{min}$  i na tej podstawie wyznaczymy obszary kwadratu  $[0,1] \times [0,1]$ , w których może znajdować się uszkodzenie.

Przedziałem pierwszym będzie  $J_1(\lambda_{min})=[19,94; 20,51]$ . Przedziałem drugim  $J_2(\lambda_{min})=[20,51; 21,74]$ . Dwa następne przedziały, to  $J_3(\lambda_{min})=[21,74; 23,9]$  i  $J_4(\lambda_{min})=[23,9; 26,1]$ .

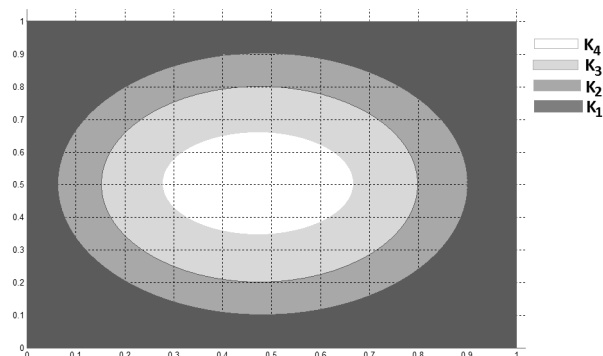


Rys. 4. Charakterystyka wartości najmniejszych  $\lambda_{min}$  widma operatora Laplace'a dla kwadratu  $[0,1] \times [0,1]$  z uszkodzeniem

Fig. 4. The characteristic of minimum values  $\lambda_{min}$  of the spectrum of the Laplace's operator for the square  $[0,1] \times [0,1]$  with the deformation

Rysunek 5 przedstawia graficzną ilustrację obszarów, w których znajduje się uszkodzenie. To znaczy, jeżeli  $\lambda_{min}$  należy do przedziału  $J_1(\lambda_{min})=[19,94; 20,51]$ , to uszkodzenie leży w obszarze  $K_1$ . Ogólnie, jeżeli  $\lambda_{min}$  należy do przedziału  $J_i(\lambda_{min})$ , gdzie  $i=1,2,3,4$ , to uszkodzenie leży odpowiednio w obszarze  $K_i$ , gdzie  $i=1,2,3,4$ .

Kiedy mamy charakterystykę widma, możemy na podstawie jego zakresu  $\lambda_{min}$  i  $\lambda_{max}$  podać obszary, w których będzie uszkodzenie. Obszarami tymi będą części wspólne zbiorów  $D_i$  i  $K_j$ , gdzie  $i, j=1,2,3,4$ .



Rys. 5. Graficzna ilustracja obszarów  $K_i$ , dla  $i=1,2,3,4$ , w których znajduje się uszkodzenie

Fig. 5. The graphic illustration of domains  $K_i$ , for  $i=1,2,3,4$ , where the deformation is located in

## 5. Wnioski

Jak pokazuje symulacja numeryczna, na podstawie widma operatora Laplace'a dla kwadratu  $[0,1] \times [0,1]$  z uszkodzeniem, może określić obszary, w których znajduje się uszkodzenia.

## 6. Literatura

- [1] Lipnicka M.: Przybliżona lokalizacja uszkodzeń w zadanym obszarze. Biuletyn Polskiego Towarzystwa Matematycznego Tom 13/54, 2011.
- [2] Jackowska-Strumiłło L., Sokołowski J., Żochowski A., Henrot A.: On Numerical Solution of Shape Inverse Problem. Computational Optimization and Application, vol. 23, s. 231-255, 2002.
- [3] Matlab "Partial differential equation toolbox. User's guide", The Math Works, Inc.
- [4] Donald A. McQuarrie: Matematyka dla przyrodników i inżynierów. Tom 1, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2005.

otrzymano / received: 25.11.2013

przyjęto do druku / accepted: 02.12.2013

artykuł recenzowany / revised paper

## INFORMACJE

# Newsletter PAK

Wydawnictwo PAK wysyła drogą e-mailową do osób zainteresowanych Newsletter PAK, w którym są zamieszczone:

- spis treści aktualnego numeru miesięcznika PAK,
- kalendarz imprez branżowych,
- ważniejsze informacje o działalności Wydawnictwa PAK.

Newsletter jest wysyłany co miesiąc do osób, które w jakikolwiek sposób współpracują z Wydawnictwem PAK (autorzy prac opublikowanych w miesięczniku PAK, recenzenci, członkowie Rady Programowej, osoby które zgłosiły chęć otrzymywania Newslettera).

Celem inicjatywy jest umocnienie w środowisku pozycji miesięcznika PAK jako ważnego i aktualnego źródła informacji naukowo-technicznej.

Do newslettera można zapisać się za pośrednictwem:

- strony internetowej: [www.pak.info.pl](http://www.pak.info.pl), po dodaniu swojego adresu mailowego do subskrypcji,
- adresu mailowego: [wydawnictwo@pak.info.pl](mailto:wydawnictwo@pak.info.pl), wysyłając swoje zgłoszenie.

Otrzymywanie Newslettera nie powoduje żadnych zobowiązań ze strony adresatów. W każdej chwili można zrezygnować z otrzymywania Newslettera.

Tadeusz SKUBIS  
Redaktor naczelny Wydawnictwa PAK