



## Metoda relaksacji dynamicznej z parametrem długości łuku w analizie słupów żelbetowych

ANNA SZCZEŚNIAK, ADAM STOLARSKI

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Inżynierii Lądowej i Geodezji,  
Instytut Inżynierii Lądowej, Katedra Budownictwa, 00-908 Warszawa, ul. gen. S. Kaliskiego 2,  
anna.szczesniak@wat.edu.pl, astolarski@wat.edu.pl

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono modyfikację metody relaksacji dynamicznej mającą na celu umożliwienie rozszerzonej analizy wyężenia słupów żelbetowych po osiągnięciu nośności granicznej. Modyfikacja ta polega na włączeniu do rozwiązania metody długości łuku, co pozwoliło na zautomatyzowanie doboru kroku obciążenia i w znaczny sposób zwiększyło zakres analizy w obszarze pokrytycznym. W metodzie tej układ równań został rozszerzony o dodatkowe równanie więzów, łączące poszukiwany wektor przemieszczeń oraz parametr obciążenia. Rozwiązanie takiego rozszerzonego układu równań uzyskuje się poprzez śledzenie ścieżki rozwiązania dla wielu zmiennych, która posiada lokalne punkty graniczne, przy założeniu stałego parametru długości łuku na ścieżce rozwiązania. Zmodyfikowana metoda pozwala na śledzenie zjawiska globalnego osłabienia elementu konstrukcyjnego po osiągnięciu nośności granicznej aż do zniszczenia. W celu weryfikacji efektywności metody przeprowadzona została analiza porównawcza wyników rozwiązań numerycznych z wcześniej publikowanymi wynikami badań, w których przedstawiono zależność przemieszczenie–obciążenie w przekrojach krytycznych słupów żelbetowych dla rozwiązania bez uwzględnienia parametru długości łuku.

**Słowa kluczowe:** słupy żelbetowe, metoda relaksacji dynamicznej, metoda długości łuku, nośność graniczna

**DOI:** 10.5604/12345865.1168893

### 1. Wstęp

Celem pracy jest rozbudowanie metody obliczeniowej prezentowanej w pracy [8] w sposób umożliwiający prowadzenie analizy wyężenia ściskanych elementów żelbetowych w zakresie pokrytycznym. W pracy [8] przedstawiono opis kompletnej metody obliczeniowej pozwalającej na śledzenie zachowania mimośrodowo

ściskanego elementu prętowego obciążonego statycznie. W opisie metody uwzględniono modelowanie materiałów konstrukcyjnych oraz modelowanie zachowania elementu konstrukcyjnego z zastosowaniem równań teorii dużych przemieszczeń ustroju prętowego. Do rozwiązania układu równań równowagi elementu prętowego zastosowano metodę relaksacji dynamicznej. W tej metodzie rozwiązanie zagadnienia statycznego sprowadza się do analizy procesu pseudodynamicznego z uwzględnieniem tłumienia krytycznego. Rozwiązanie uzyskuje się w procesie iteracyjnym utożsamianym z rekurencyjnym procesem obliczeniowym w kolejnych krokach pseudoczasu. Ponadto, w pracy [8] przedstawiono analizę porównawczą otrzymanych wyników numerycznych z wynikami badań doświadczalnych oraz rozważań teoretycznych zaczerpniętych z literatury. Zaproponowana metoda obliczeniowa okazała się efektywna w zakresie sprężystym oraz sprężysto-plastycznym do osiągnięcia nośności granicznej włącznie. Jednakże metoda ta nie pozwoliła na śledzenie zjawiska globalnego osłabienia elementu konstrukcyjnego, które obserwowane jest w wynikach badań doświadczalnych. W celu wyeliminowania tej niedoskonałości w niniejszej pracy przedstawiono procedurę przewidującą rozbudowę metody obliczeniowej prezentowanej w pracy [8]. Założeniem rozbudowanej metody analizy jest możliwość śledzenia zachowania elementów obciążonych mimośrodowo w zakresie pokrytycznym. Umożliwienie szczegółowego opisu zjawiska globalnego osłabienia elementu konstrukcyjnego, występującego po osiągnięciu nośności granicznej, jest niezwykle istotne w opisie i prognozowaniu mechanizmu jego zniszczenia. W tym celu do procedury numerycznej wprowadzony został parametr długości łuku na ścieżce równowagi. Takie podejście jest określane jako metoda długości łuku. Została ona włączona do metody relaksacji dynamicznej i pozwala na jednoczesne wyznaczenie poszukiwanych przemieszczeń i parametru obciążenia, poprzez śledzenie ścieżki równowagi posiadającej lokalne punkty graniczne. Prekursorem tej metody jest Rijs, który przedstawił jej koncepcję w pracy [6]. Kolejne rozwinięcia i interpretacje metody długości łuku prezentowane są m.in. w pracach Ramma [5], Crisfielda [1], Schweizrehofa i Wriggersa [7]. Połączenie metody relaksacji dynamicznej i metody długości łuku przedstawione zostało w pracy Pasqualino [2], a jego praktyczne zastosowanie w analizie konstrukcji prezentowane jest w pracach Remesha i Krishnamoorthy [4], Pasqualino i Estefen [3]. Rozwiązania te nie dotyczą jednak analizy elementów żelbetowych w zakresie niesprężystym. Szczególnie nie są znane rozwiązania dotyczące słupów żelbetowych w zakresie odkształcenia do zniszczenia włącznie.

## 2. Istota metody rozwiązania równań równowagi

W pracy [8] zaprezentowano metodę analizy słupów żelbetowych, w której układ równań opisujący problem dynamicznego zachowania niesprężystego elementu

żelbetowego rozwiązano przy zastosowaniu tłumienia krytycznego  $c = \max(c_i, k_r)$ , co umożliwia w przejściu granicznym opis zagadnienia statycznego. Taka metoda rozwiązania określona została jako metoda relaksacji dynamicznej.

W celu zwiększenia efektywności rozwiązania w zakresie analizy pokrytycznej, w rozwiązaniu układu nieliniowych równań równowagi dynamicznej (10a) zawartych w pracy [8] uwzględniona została metoda śledzenia ścieżki rozwiązania dla wielu zmiennych [9, 10].

Układ równań (10a) wg pracy [8] można przedstawić w postaci wektorowej:

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}, \lambda) = \Delta \mathbf{q}^n - \Delta \mathbf{q}_G^n - \Delta \lambda^n \Delta \mathbf{q}_P^n = 0, \quad (1)$$

gdzie:  $\mathbf{G}(\mathbf{q}, \lambda)$  — wektorowa funkcja układu równań;

$\Delta \mathbf{q}^n = (\Delta u_i^n, \Delta w_i^n)^T$  — wektor poszukiwanych przyrostów przemieszczeń;

$\Delta \mathbf{q}_P^n = \begin{cases} a_i P_x(s_i) \\ a_i P_z(s_i) \end{cases}$  — wektor składowych przyrostów przemieszczeń od

całkowitego obciążenia;

$$\Delta \mathbf{q}_G^n = \begin{cases} b_i \Delta u_i^{n-1} + a_i [-N_{i1} \cos \theta_{i1} + N_{i0} \cos \theta_{i0} + Q_{i1} \sin \theta_{i1} - Q_{i0} \sin \theta_{i0}] \\ b_i \Delta w_i^{n-1} + a_i [N_{i1} \sin \theta_{i1} - N_{i0} \sin \theta_{i0} + Q_{i1} \cos \theta_{i1} - Q_{i0} \cos \theta_{i0}] \end{cases} + \lambda^{n-1} \Delta \mathbf{q}_P^n$$

— wektor składowych przyrostów przemieszczeń dla parametru

obciążenia  $\lambda^{n-1}$  — z poprzedniego kroku czasowego;

$\lambda^n$  — parametr obciążenia w aktualnym kroku czasowym.

Ogólna idea metody polega na włączeniu do analizy równań ruchu (1) dodatkowego równania więzów łączącego parametr obciążenia i wektor przyrostów przemieszczenia z przyrostem długości łuku na ścieżce rozwiązania.

Równanie więzów przyjęto w następującej postaci [1, 10]:

$$f(\mathbf{q}, \lambda) = \Delta \mathbf{q}_m^T \Delta \mathbf{q}_m + \Delta \lambda_m^2 - \Delta l^2 = 0, \quad (2)$$

gdzie:  $\Delta l$  — przyrost (parametr) długości łuku na ścieżce rozwiązania;

$\mathbf{q} = (u, w)^T$  — wektor poszukiwanych przemieszczeń;

$\Delta \lambda_m = \lambda^n - \lambda_m$  — przyrost aktualnego parametru obciążenia  $\lambda^n$  oraz

$\Delta \mathbf{q}_m = \mathbf{q}^n - \mathbf{q}_m$  — przyrost aktualnego wektora niewiadomych przemieszczeń  $\mathbf{q}^n$  względem ostatnich zbieżnych wartości parametru obciążenia  $\lambda_m$  oraz wektora przemieszczeń  $\mathbf{q}_m$  uzyskanych z założoną dokładnością w poprzednim kroku obciążenia  $m$ .

### 3. Ideowy algorytm rozwiązania rozszerzonego układu równań

Zaproponowano wyznaczenie parametru obciążenia  $\lambda^n$  przez bezpośrednie rozwiązanie równania więzów (2). Sposób ten wymaga badania znaku wyróżnika  $g(\mathbf{q}) = \Delta l^2 - \Delta \mathbf{q}_m^T \Delta \mathbf{q}_m$  oraz określenia rozwiązań:

$$\lambda_{1,2}^n = \lambda_m \pm \sqrt{\Delta l^2 - \Delta \mathbf{q}_m^T \Delta \mathbf{q}_m} \quad \text{jeżeli } g(\mathbf{q}) \geq 0,$$

$$\lambda_{1,2}^n = \lambda_m \pm \sqrt{\Delta \mathbf{q}_m^T \Delta \mathbf{q}_m - \Delta l^2} \quad \text{jeżeli } g(\mathbf{q}) < 0,$$

a następnie dokonania wyboru rozwiązania według kryterium najmniejszej „odległości” względem rozwiązania uzyskanego w kroku obciążenia  $m - 1$ , czyli najmniejszego kąta (lub największego kosinusa tego kąta) pomiędzy rozwiązaniem w aktualnym kroku obciążenia  $m$  a rozwiązaniem w poprzednim kroku obciążenia  $m - 1$ :

$$\vartheta = \min(\vartheta_1, \vartheta_2) = \min\left(\arccos \frac{\Delta \mathbf{q}_{m,1} \Delta \mathbf{q}_{m-1}}{\Delta l^2}, \arccos \frac{\Delta \mathbf{q}_{m,2} \Delta \mathbf{q}_{m-1}}{\Delta l^2}\right). \quad (3)$$

Z analizy warunków rozwiązania równania więzów (2) wynika, że kryterium to spełnia rozwiązanie zapisane w postaci:

$$\lambda^n = \lambda_m + \text{sign}(\Delta l^2 - \Delta \mathbf{q}_m^T \Delta \mathbf{q}_m) \sqrt{\text{abs}(\Delta l^2 - \Delta \mathbf{q}_m^T \Delta \mathbf{q}_m)}. \quad (4)$$

Równanie więzów (2) wraz z układem równań ruchu (1) tworzą rozszerzony układ równań, który jest rozwiązywany iteracyjnie w każdej chwili czasu  $t_n = n\Delta t$ .

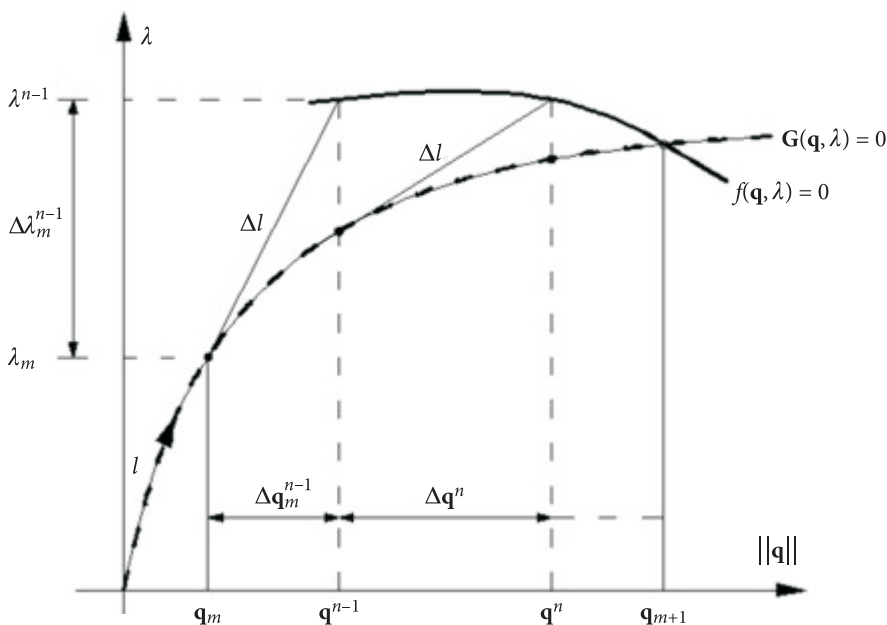
Rozszerzony układ równań umożliwia wyznaczenie nie tylko poszukiwanego wektora przemieszczeń  $\mathbf{q}$ , lecz także parametru obciążenia  $\lambda$  na nieliniowej ścieżce równowagi zawierającej lokalne punkty graniczne.

Rozwiązanie rozszerzonego układu równań jest dwuetapowe i polega na wyznaczeniu: (I — etap predykcji) parametru obciążenia w zależności od wartości przemieszczeń z poprzedniego kroku iteracyjnego na podstawie równania więzów (2); (II — etap korekcji) nowych wartości przemieszczeń w następnym kroku iteracyjnym z układu równań ruchu (1).

Schemat iteracyjnego rozwiązania rozszerzonego układu równań (1) oraz równania więzów (2)  $f(\mathbf{q}, \lambda) = 0$  przedstawiono na rysunku 1.

Rozwiązanie uzyskuje się po  $(n)$ -tej iteracji utożsamianej z krokiem czasowym  $t_n = n\Delta t$ :

$$\lambda^n = \lambda^{n-1} + \Delta \lambda^n, \quad \mathbf{q}^n = \mathbf{q}^{n-1} + \Delta \mathbf{q}^n. \quad (5)$$



Rys. 1. Schemat iteracyjnego rozwiązania rozszerzonego układu równań

Proces iteracyjnego poprawiania wyniku kończy się w chwili osiągnięcia żądanej dokładności  $\varepsilon_G$  rozwiązania:

$$\|\mathbf{G}(\mathbf{q}^n, \lambda^n)\| \leq \varepsilon_G. \quad (6)$$

Na podstawie doświadczeń numerycznych ustalono, że możliwe jest przyjęcie dokładności rozwiązania w zakresie  $\varepsilon_G \in (0, 1^{-3}, 0, 1^{-6})$ .

W chwili osiągnięcia zbieżnego rozwiązania ustala się parametr obciążenia oraz wektor przemieszczeń dla następnego kroku obciążenia  $\lambda_{m+1} = \lambda^n$ ,  $\mathbf{q}_{m+1} = \mathbf{q}^n$ .

#### 4. Analiza wyników badań numerycznych słupów żelbetowych

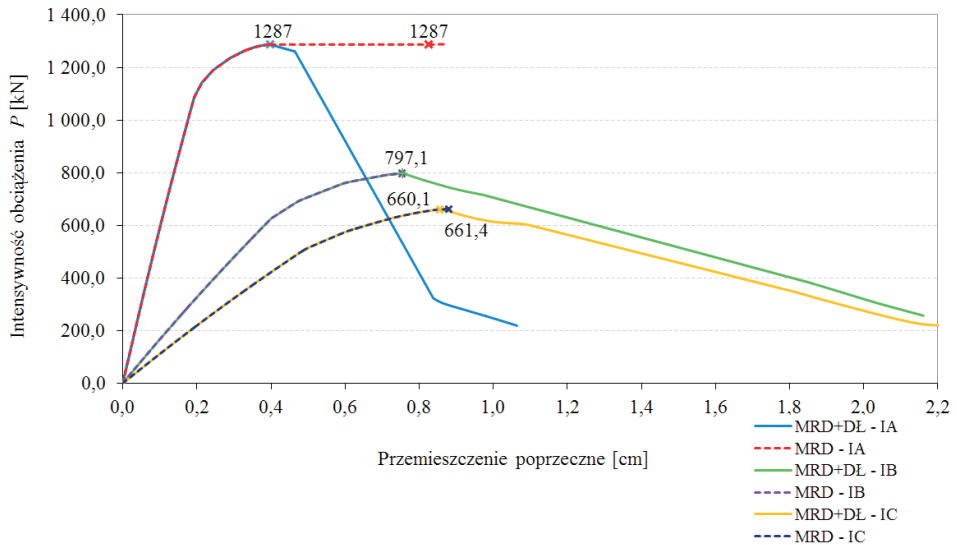
Metoda relaksacji dynamicznej (MRD) prezentowana w pracy [8] pozwala na śledzenie wyężenia słupów żelbetowych od stanów sprężystych, przez stany sprężysto-plastyczne, po pełne uplastycznienie i ograniczone osłabienie przekroju. Włączenie do analizy metody długości łuku (MRD + DŁ) umożliwia dodatkowo obserwację zachowania elementu konstrukcyjnego w zakresie pokrytycznym, w którym występuje zaawansowany proces osłabienia prowadzący do zniszczenia elementu konstrukcyjnego. W celu weryfikacji efektywności metody relaksacji dynamicznej

z uwzględnieniem parametru długości łuku (MRD + DŁ) na podstawie opracowanej procedury numerycznej przygotowano program komputerowy zapisany w języku programowania Fortran. Następnie przeprowadzone zostały badania numeryczne słupów żelbetowych mimośrodowo ściskanych, których wyniki porównano z wynikami badań numerycznych przeprowadzonych przy zastosowaniu metody relaksacji dynamicznej (MRD) i prezentowanymi w pracy [8]. Badania przeprowadzone zostały dla słupów analizowanych w pracy [8], które oznaczone zostały numerem serii I. W badaniu uwzględniono obciążenie zewnętrzne w postaci siły podłużnej działającej na mimośrodku  $e$ , przyłożonej na obu brzegach słupa. Badania przeprowadzone zostały dla trzech wartości mimośrodu, które zostały oznaczone literami A, B, C i wynoszą  $e = \{e_A; e_B; e_C\} = \{15; 50; 65\}$  mm.

Badaniom poddane zostały słupy o długości 168 cm, wymiarach przekroju poprzecznego  $17,5 \text{ cm} \times 17,5 \text{ cm}$ , zbrojone symetrycznie trzema prętami stalowymi o średnicy  $\varphi = 12 \text{ mm}$ . Do badania przyjęto następujące własności wytrzymałościowe betonu i stali:  $f_y = 430,0 \text{ MPa}$  — granica plastyczności stali,  $E_s = 200,0 \text{ GPa}$  — moduł odkształcenia stali,  $\varepsilon_{us} = 0,15$  — odkształcenie graniczne stali,  $f_c = 44,78 \text{ MPa}$  — wytrzymałość betonu na ściskanie,  $E_c = 32,18 \text{ GPa}$  — moduł odkształcenia betonu,  $\varepsilon_{fc} = 0,002$ ,  $\varepsilon_{uc} = 0,00665$  — odkształcenia graniczne betonu oraz  $s_{uc} = 2500 \text{ kg/m}^3$  — masa właściwa żelbetu.

W celu zobrazowania wpływu uwzględnienia parametru długości łuku na otrzymane wyniki porównano wykresy obciążenie–przemieszczenie poprzeczne w przekroju zlokalizowanym w środku długości słupa IA, IB i IC, uzyskane podczas analizy z zastosowaniem MRD w pracy [8] oraz MRD + DŁ (rys. 2).

Wyniki badań przeprowadzonych na podstawie MRD i prezentowane w pracy [8] zaznaczone zostały liniami przerywanymi. Linia czerwoną oznaczono wyniki uzyskane podczas analizy słupa IA, linią fioletową wyniki uzyskane dla słupa IB, natomiast linią granatową — wyniki analizy słupa IC. Wyniki analizy przeprowadzonej z zastosowaniem MRD + DŁ oznaczono linią ciągłą. Kolorem niebieskim oznaczone zostały wyniki otrzymane dla słupa IA, zielonym — IB, a pomarańczowym — IC. W każdym z rozpatrywanych trzech przypadków mimośrodu obciążenia słupa przebieg wykresu w zakresie sprężysto-plastycznym jest identyczny dla obu metod. Różnice wyników dotyczą przede wszystkim opisu fazy podkrytycznego zachowania słupa. W przypadku wyników uzyskanych dla słupa IA MRD wskazuje na gwałtowne przyrosty przemieszczeń występujące po osiągnięciu granicznej wartości obciążenia. W MRD nieograniczony wzrost przemieszczeń przy stałej wartości obciążenia interpretowany jest jako symptom zniszczenia. MRD + DŁ pozwala natomiast na prześledzenie ścieżki globalnego osłabienia elementu, która charakteryzuje się stopniową redukcją obciążenia przy narastających przemieszczeniach. Analiza słupa IB z zastosowaniem MRD pozwoliła na opis procesu wytężenia elementu konstrukcyjnego do chwili osiągnięcia granicznej wartości obciążenia. Dopiero zastosowanie MRD + DŁ umożliwiło opis zachowania



Rys. 2. Porównanie wyników analizy numerycznej dla słupa IA, IB i IC z zastosowaniem MRD [8] oraz MRD + DŁ

elementów w zakresie pokrytycznym. Podobnie sytuacja wygląda w przypadku słupa IC, dla którego przy pomocy MRD możliwe było prześledzenie zachowania elementu w kolejnych krokach obciążenia, tylko do momentu osiągnięcia granicznej wartości obciążenia. Opis wyężenia słupa w zakresie pokrytycznym możliwy był po włączeniu do analizy metody długości łuku.

W tabeli 1 porównane zostały wyniki otrzymane na podstawie analizy słupów z zastosowaniem MRD i MRD + DŁ w zakresie nośności granicznej i towarzyszącego jej osiągnięcia przemieszczenia poprzecznego w przekroju środkowym.

TABELA 1  
Zestawienie nośności granicznej oraz przemieszczenia słupów IA, IB i IC na podstawie analizy MRD [8] oraz MRD + DŁ

Słup	Metoda analizy	Nośność graniczna $P_0$ [kN]			Przemieszczenie odpowiadające nośności granicznej $w_0$ [cm]		
		MRD	MRD + DŁ	$\frac{P_0^{MRD+DL}}{P_0^{MRD}}$ [%]	MRD	MRD + DŁ	$\frac{w_0^{MRD+DL}}{w_0^{MRD}}$ [%]
IA		1287,0	1287,0	100,0	0,83	0,40	48,2
IB		797,1	797,1	100,0	0,75	0,74	98,6
IC		661,4	660,1	99,8	0,88	0,86	97,7

Analiza porównawcza wyników otrzymanych przy pomocy obu metod wskazuje na zgodność wartości nośności granicznej w rozpatrywanych przypadkach na poziomie ponad 99%. W zakresie przemieszczeń dla słupów IB i IC wzajemna zgodność wyników uzyskanych w obu metodach wynosi ponad 97%. Rozbieżność wyników pojawia się w przypadku słupa IA, dla którego uzyskany został najbardziej zaawansowany zakres analizy przy zastosowaniu MRD. Przyczyną zaistniałej sytuacji jest problem z ustaleniem wartości przemieszczenia towarzyszącego osiągnięciu nośności granicznej w analizie prowadzonej przy pomocy MRD. Przy granicznej wartości obciążenia obserwowane są gwałtowne przyrosty przemieszczeń w kolejnych krokach obliczeniowych interpretowane jako symptom zniszczenia. Inaczej sytuacja wygląda w przypadku analizy przeprowadzonej z zastosowaniem MRD + DŁ. Wówczas za nośność graniczną uważana jest maksymalna wartość obciążenia, którą jest w stanie przenieść element konstrukcyjny, w związku z czym w sposób jednoznaczny można określić wartość przemieszczenia towarzyszącego jej osiągnięciu. Włączenie do analizy metody długości łuku pozwala na śledzenie procesu globalnego osłabienia elementu konstrukcyjnego po osiągnięciu nośności granicznej. W zakresie pokrytycznym zauważalny jest postępujący spadek nośności, któremu towarzyszy przyrost przemieszczenia. Zjawisko to obserwowane jest do chwili wyczerpania nośności i zniszczenia elementu. W konsekwencji możliwe jest ustalenie mechanizmu zniszczenia elementu konstrukcyjnego.

## 5. Zakończenie

W pracy przedstawiono rozbudowę metody śledzenia zachowania ściskanych elementów żelbetowych poddanych działaniu krótkotrwałych obciążeń statycznych [8], prowadzącą do zwiększenia zakresu analizy.

W pracy [8] zaprezentowano metodę analizy układu konstrukcyjnego opracowaną na podstawie założeń metody różnic skończonych. Rozważano proces dynamiczny, który po wprowadzeniu tłumienia krytycznego pozwolił na opis zagadnienia statycznego. Taka procedura zastosowana do rozwiązania układu nieliniowych równań równowagi jest określana jako metoda relaksacji dynamicznej (MRD). Pozwoliła ona na wstępne oszacowanie nośności ściskanych elementów konstrukcyjnych bez możliwości śledzenia ich zachowania w zakresie pokrytycznym.

W celu umożliwienia analizy w zakresie pokrytycznym w pracy zaproponowano rozbudowę metody relaksacji dynamicznej poprzez włączenie do układu równań równowagi dodatkowego równania więzów, zgodnie z założeniami metody długości łuku (MRD + DŁ).

Metoda analizy wyężenia konstrukcji była podstawą opracowania własnych procedur numerycznych i programów obliczeniowych, które pozwoliły na przeprowadzenie badań numerycznych mimośrodowo ściskanych słupów żelbetowych.



Analiza porównawcza otrzymanych wyników badań numerycznych dla MRD + DŁ z wynikami badań numerycznych dla MRD prezentowanymi w pracy [8] wskazała na efektywność MRD + DŁ w analizie pełnego cyklu wyężenia słupów żelbetowych oraz jej przydatność w prognozowaniu przebiegu mechanizmu zniszczenia mimośrodowo ściskanych elementów żelbetowych.

Praca powstała w wyniku zadań badawczych zrealizowanych w ramach pracy badawczej statutowej nr 855, przeprowadzanej w Wydziale Inżynierii Łądowej i Geodezji Wojskowej Akademii Technicznej im. Jarosława Dąbrowskiego.

Artykuł wpłynął do redakcji 7.05.2015 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano 10.06.2015 r.

## LITERATURA

- [1] CRISFIELD M.A., *A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through*, Computers and Structures, 13, 1981, 55-62.
- [2] PASQUALINO I.P., *Arc-length method for explicit dynamic relaxation*, XXI ICTAM, 15-21 August 2004, Warsaw, Poland, e-book: SM1S-12607.
- [3] PASQUALINO I.P., ESTEFEN S.F., *A nonlinear analysis of the buckle propagation problem in deepwater pipelines*, International Journal of Solids and Structures, vol. 38, 2001, 8481-8502.
- [4] RAMESH G., KRISHNAMOORTHY C.S., *Post-buckling analysis of structures by dynamic relaxation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 36, 1993, 1339-1364.
- [5] RAMM E., *Strategies for tracing the nonlinear response near limit points*, [in:] W. Wunderlich, E. Stein and K. J. Bathe, eds, *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1981.
- [6] E. RIKS E., *The application of Newtons method to the problem of elastic stability*, Journal of Applied Mechanics, 39, 1972, 1060-1066.
- [7] SCHWEIZERHOF K., WRIGGERS P., *Consistent linearization for path following methods in nonlinear fe-analysis*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 59, 1986, 261-279.
- [8] SZCZEŚNIAK A., STOLARSKI A., *Analiza wyężenia słupów żelbetowych metodą relaksacji dynamicznej*, Biul. WAT, vol. 2, Warszawa, 2014, 155-170.
- [9] WASZCZYSZYN Z., CICHÓN CZ., RADWAŃSKA M., *Metoda elementów skończonych w stateczności konstrukcji*, Arkady, Warszawa, 1990.
- [10] WRIGGERS P., *Nonlinear Finite Element Methods*, Springer, 2008.

A. SZCZEŚNIAK, A. STOLARSKI

### Dynamic relaxation method with arc-length parameter for analysis of reinforced concrete columns

**Abstract.** The paper presents the modification of the dynamic relaxation method in order to increase its effectiveness in the range of the post-critical analysis. For this purpose, the arc-length parameter on the equilibrium path was introduced into the computational procedure. The additional constraints equation that combines increment of load parameter and the vector of displacement increments with the arc-length increment on the solution path was incorporated to analysis of the equations of motion.

Solution of nonlinear equilibrium equations is obtained recursively in subsequent pseudo-time instants. The proposed method allows for tracking the global softening phenomenon of the structural element in the post-critical range, which leads to failure. We ran numerical experiments for the reinforced concrete eccentrically loaded column. Our comparative analysis with previously published numerical results demonstrated that the proposed computational method is effective.

**Keywords:** reinforced concrete columns, dynamic relaxation method, arc-length method, load-carrying capacity

**DOI:** 10.5604/12345865.1168893