Zbigniew WESOŁOWSKI

MODELOWANIE PROBABILISTYCZNE PROCESU PRZESYŁANIA KOMUNIKATÓW W SYSTEMACH ROZPROSZONYCH

STRESZCZENIE *W artykule omówiono zagadnienia modelowania probabilistycznego oraz analizy statystycznej procesu przesyłania komunikatów w systemach rozproszonych. Przyjęto, że modelami probabilistycznymi przepływności linków sieciowych są niestacjonarne ze względu na wartość oczekiwaną procesy stochastyczne. Analizy statystyczne prowadzi się na podstawie danych generowanych przez symulator stochastyczny procesu przepływów danych w sieciach komputerowych. Dane generowane przez symulator są interpretowane jako realizacje niestacjonarnych procesów stochastycznych. Przytoczono przykład wykorzystania proponowanego podejścia do badania procesu przesyłania danych w prostym systemie rozproszonym.*

Słowa kluczowe: *modelowanie probabilistyczne, systemy rozproszone, analiza statystyczna niestacjonarnych szeregów czasowych*

1. WSTĘP

Jednym z otwartych problemów współczesnej matematyki i informatyki jest zagadnienie modelowania matematycznego systemów złożonych z wielu wzajemnie oddziałujących na siebie elementów [1, 2]. Przykładami takich systemów są: kolonie mrówek, organizmy żywe, portale społecznościowe oraz sieci komputerowe. W systemach tych wzajemna interakcja elementów sprawia, że proces wymiany informacji staje się tak skomplikowany i nieprzewidywalny, że niezwykle trudno jest go zrozumieć, a zatem i opisać w postaci zależności matematycznych. Do modelowania matematycznego takich systemów stosuje się różne podejścia [3-8], w tym łańcuchy Markowa [3] oraz układy chaotyczne [4]. W pracach [6, 8] przeprowadzono analizy krytyczne dotyczące możliwości wykorzystania różnych podejść formalnych do modelowania Internetu. W pracy zaproponowano podejście probabilistyczne [9, 10], którego istotą jest wykorzystanie niestacjonarnych ze względu na wartość oczekiwaną procesów stochastycznych.

dr inż. Zbigniew WESOŁOWSKI
e-mail: zwesolowski@wat.edu.pl

Wojskowa Akademia Techniczna, 00-908 Warszawa 49, ul. Gen. Sylwestra Kaliskiego 2

Podejście to uwzględnia fakt, że procesy transmisji danych w sieciach komputerowych podlegają gwałtownym i nieprzewidywalnym zmianom. Analizy statystyczne procesów przesyłania danych w linkach oraz ścieżkach sieciowych systemów rozproszonych prowadzi się na podstawie wyników symulacji komputerowej. Krótki opis symulatora zamieszczono w punkcie 3. Do badania rozważanych procesów zastosowano metody analizy niestacjonarnych szeregów czasowych [9, 11].

Wprowadźmy oznaczenia: $\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych, $\mathbb{R}_+ = (0,\infty) \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}$ – zbiór liczb całkowitych, $\mathbb{N}$ – zbiór liczb naturalnych, $T = \mathbb{R}_0$ – zbiór parametrów czasowych, $WN(0,\sigma^2)$ – szum biały o zerowej wartości oczekiwanej i wariancji σ^2 ($\sigma > 0$), $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ – zbiór wszystkich funkcji określonych na zbiorze $\mathbb{N}$ i o wartościach w $\mathbb{R}$. Niech $\Delta = (\Omega, \Xi, \mathrm{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, na której będą zdefiniowane wszystkie zmienne losowe.

2. MODEL SYSTEMU ROZPROSZONEGO

Model matematyczny systemu rozproszonego określa dwójka:

$$(N, D), \tag{1}$$

gdzie: N jest modelem struktury, D jest modelem procesu przesyłania komunikatów.

2.1. Model struktury systemu rozproszonego

Model N (1) określa sieć:

$$N=(V, E, \mathbf{c}), \tag{2}$$

gdzie:

- $V = H \cup R = \{v_1, v_2, \ldots, v_{m_V}\}$ jest zbiorem wierzchołków, $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_{m_H}\}$ jest zbiorem wierzchołków reprezentujących komputery, $R = \{r_1, r_2, \ldots, r_{m_R}\}$ jest zbiorem wierzchołków reprezentujących routery, oraz $m_V = m_H + m_R$;
- $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_{m_E}\}$ jest zbiorem krawędzi skierowanych reprezentujących jednokierunkowe linki łączące wszystkie elementy ze zbioru V;
- $\mathbf{c} = \left[c_1, c_2, \ldots, c_{m_E}\right]^T \in \mathbb{R}_+^{m_E \times 1}$ jest wektorem przepustowości linków.

Niech $K = \{1, \ldots, m_H\}$ będzie zbiorem numerów komputerów ze zbioru H. Niech $L = \{1, \ldots, m_E\}$ będzie zbiorem numerów krawędzi ze zbioru E. Niech

$P=\left\{p_1,p_2,\ldots,p_{m_P}\right\}$ będzie zbiorem ścieżek łączących wszystkie pary różnych komputerów ze zbioru *H*, gdzie: $p_s=p_{(\alpha_s,\beta_s)}=\left(\alpha_s,r_s^{(1)},r_s^{(2)},\ldots,r_s^{(n_s)},\beta_s\right)$ jest ścieżką łączącą parę różnych komputerów $\left(\alpha_s,\beta_s\right)\in H\times H$, $\alpha_s\neq\beta_s$, $r_s^{(i)}\in R$, dla: $i=1,\ldots,n_s$, $s=1,\ldots,m_P$. Załóżmy, że komputery ze zbioru *H* są połączone pojedynczymi, acyklicznymi i statycznymi ścieżkami. Niech $S=\left\{1,\ldots,m_P\right\}$ będzie zbiorem numerów ścieżek ze zbioru *P*.
Zasady przesyłania komunikatów w sieci *N* (2) określa binarna macierz routingu:

$$\mathbf{R}=\left[r_{ls}\right]_{m_E\times m_P}, \tag{3}$$

$$r_{ls}=\begin{cases}1, & \text{dla } e_l\in p_s,\\ 0, & \text{dla } e_l\notin p_s,\end{cases}$$

gdzie: $e_l\in E$, dla $l\in L$; $p_s\in P$, dla $s\in S$. Element r_{ls} macierzy **R** przyjmuje wartość jeden, jeśli link e_l należy do ścieżki p_s, oraz przyjmuje wartość zero w przeciwnym przypadku. Niech $L_s=\left\{l\in L: r_{ls}=1\right\}$ będzie zbiorem numerów linków należących do ścieżki *s*, $s\in S$. Niech $S_l=\left\{s\in S: r_{ls}=1\right\}$ będzie zbiorem numerów ścieżek zawierających link *l*, $l\in L$.

2.2. Model procesu przesyłania komunikatów

Przyjmijmy, że na każdym komputerze ze zbioru *H* są wykonywane procesy obliczeniowe, zwane agentami, które wymieniają komunikaty z innym agentami. Załóżmy, że każdy agent może wymieniać komunikaty z pojedynczym agentem wykonywanym na innym komputerze. Niech $A_k=\left\{a_{k1},a_{k2},\ldots,a_{km_{A_k}}\right\}$ będzie zbiorem agentów wykonywanych na komputerze $h_k\in H$, gdzie $1\leq m_{A_k}\leq m_H-1$, dla $k\in K$. Niech $A=\bigcup_{k\in K}A_k=\left\{a_1,a_2,\ldots,a_{m_A}\right\}$ będzie zbiorem agentów wykonywanych na wszystkich komputerach ze zbioru *H*, gdzie: $m_A=\sum_{k\in K}m_{A_k}$, $m_H\leq m_A\leq m_H\left(m_H-1\right)$. Komunikaty są przesyłane między parami różnych agentów $\left(a_s,b_s\right)\in A\times A$, $a_s\neq b_s$, wzdłuż ścieżek p_s, $p_s\in P$, dla $s\in S$. Z tego założenia wynika, że $m_A=m_P$. W parze $\left(a_s,b_s\right)$, agent a_s jest nazywany nadawcą (lub źródłem), natomiast agent b_s jest nazywany odbiorcą (lub ujściem) komunikatów przesyłanych wzdłuż ścieżki p_s. Niech $M_s=\left\{m_{s1},m_{s2},\ldots,m_{sm_{M_s}}\right\}$ będzie komunikatem generowanym przez agenta a_s, gdzie: $m_{si}\in B$, B={0,1} jest zbiorem liczb binarnych, dla $i=1,\ldots,m_{M_s}$. Niech

$M = \{M_1, M_2, \ldots, M_{m_A}\}$ będzie zbiorem komunikatów generowanych przez wszystkich agentów ze zbioru A. Źródło a_s generuje komunikaty z szybkością $y_s \in Y$, gdzie $Y = \mathbb{R}_0$. Po wysłaniu każdego pakietu danych, źródło oczekuje na pakiet ACK potwierdzający odebranie przez ujście b_s uprzednio wysłanego pakietu.
Model procesu generowania komunikatów przez agenta $a_s \in A$ określa trójka:

$$G_s = (\Delta, Y, \psi_s), \qquad s \in S, \tag{4}$$

gdzie: $\psi_s : \Delta \to Y$ jest zmienną losową będącą modelem probabilistycznym szybkości generowania komunikatów przez agenta a_s.
Model procesu przesyłania komunikatów przez link l, $l \in L_s$, należący do ścieżki s, $s \in S$, określa trójka:

$$D_{sl} = (\Delta, \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \xi_{sl}), \qquad l \in L_s,\ s \in S, \tag{5}$$

gdzie: $\xi_{sl} : \Delta \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ jest procesem stochastycznym z czasem dyskretnym będącym modelem probabilistycznym przepływności linku l, $l \in L_s$.
Model procesu przesyłania komunikatów wzdłuż ścieżki s określa trójka:

$$D_s = (\Delta, \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \xi_s), \qquad s \in S, \tag{6}$$

gdzie: $\xi_s : \Delta \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ jest procesem stochastycznym z czasem dyskretnym będącym modelem probabilistycznym przepływności ścieżki s.
Model D (1) określa następująca szóstka:

$$D_s = \left(\Delta, \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, Y, \{\psi_s; s \in S\}, \{\xi_{sl}; l \in L_s, s \in S\}, \{\xi_s; s \in S\}\right).$$

3. SYMULACJA PROCESU PRZESYŁANIA KOMUNIKATÓW W SYSTEMACH ROZPROSZONYCH

Symulacją komputerową procesu przesyłania komunikatów w systemach rozproszonych nazywamy numeryczną metodę wnioskowania o długościach przedziałów czasu przesyłania komunikatów przez wszystkie linki ze zbioru L oraz przez wszystkie ścieżki ze zbioru S, na podstawie obserwacji działania programu komputerowego symulującego ten proces. Symulację prowadzi się metodą kolejnych zdarzeń [12]. Zdarzenia polegają na zakończeniu przesyłania pakietów przez linki ze zbioru L. Zachodzą one w chwilach losowych ze zbioru T.

Niech $M_s(n) \subseteq M_s$ oznacza pakiet wygenerowany przez źródło a_s w chwili $t_s(n) \in T$. Niech $T_s = \{t_s(1), t_s(2), \ldots, t_s(m_{T_s})\}$ będzie zbiorem losowych chwil generowania pakietów $M_s(n)$ przez źródło a_s. Niech $N_s = \{1, \ldots, m_{T_s}\}$ będzie zbiorem numerów chwil ze zbioru T_s. Jak można zauważyć zachodzi równość $\bigcup_{n \in N_s} M_s(n) = M_s$. Każdy pakiet $M_s(n)$ jest przekazywany wzdłuż wszystkich ścieżek ze zbioru L_s. Niech $x_{sl}(n) = t_{sl}^{(1)}(n) - t_{sl}^{(0)}(n)$ będzie długością przedziału czasu $T_{sl}(n) = \left[t_{sl}^{(0)}(n), t_{sl}^{(1)}(n)\right)$ przesyłania pakietu $M_s(n)$ przez link *l*, $l \in L_s$, gdzie: $t_{sl}^{(0)}(n)$ jest chwilą rozpoczęcia, a $t_{sl}^{(1)}(n)$ chwilą zakończenia przesyłania pakietu $M_s(n)$ przez ten link. Niech $x_s(n) = \sum_{l \in L_s} x_{sl}(n)$ będzie długością przedziału czasu $T_s(n) = \left[t_s^{(0)}(n), t_s^{(1)}(n)\right)$ przesyłania pakietu $M_s(n)$ przez ścieżkę *s*, $s \in S$, gdzie: $t_s^{(0)}(n) = t_s(n)$ jest chwilą rozpoczęcia, a $t_s^{(1)}(n)$ chwilą zakończenia przesyłania pakietu $M_s(n)$ przez tę ścieżkę, gdzie $t_s(n) \in T_s$.

Eksperyment symulacyjny polega na obserwacji długości $x_{sl}(n)$ przedziałów czasu $T_{sl}(n)$, dla: $n \in N_s$, $l \in L_s$, $s \in S$. Próby $\mathbf{x}_{sl} = \left[x_{sl}(1), x_{sl}(2), \ldots, x_{sl}(m_{T_s})\right]^T$, $l \in L_s$, $s \in S$, nazywamy wynikami eksperymentu symulacyjnego.

Załóżmy, że eksperyment symulacyjny będzie powtarzany *m*, $m \in \mathbb{N}$, razy. Liczbę *m* wyznacza się tak, aby zapewnić 100(1-*α*)% przedział ufności dla wartości oczekiwanych $\hat{\mu}_{sl} = \frac{1}{m_{T_s}} \sum_{n=1}^{m_{T_s}} x_{sl}(n)$ z prób $\mathbf{x}_{sl}$, $l \in L_s$, $s \in S$ [10, 11]. Niech $I = \{1, \ldots, m\}$ będzie zbiorem numerów eksperymentów symulacyjnych. Próbę $\mathbf{x}_{sl}(i) = \left[x_{sl}(i,1), x_{sl}(i,2), \ldots, x_{sl}(i, m_{T_s})\right]^T$ nazywamy wynikiem *i*, $i \in I$, eksperymentu symulacyjnego polegającego na obserwacji długości przedziałów czasu przesyłania wszystkich pakietów wygenerowanych przez źródło a_s wzdłuż linku *l*, $l \in L_s$.

Macierze:

$$\mathbf{X}_{sl} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{sl}^T(1) \\ \mathbf{x}_{sl}^T(2) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{sl}^T(m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{sl}(1,1) & x_{sl}(1,2) & \cdots & x_{sl}(1, m_{T_s}) \\ x_{sl}(2,1) & x_{sl}(2,2) & \cdots & x_{sl}(2, m_{T_s}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{sl}(m,1) & x_{sl}(m,2) & \cdots & x_{sl}(m, m_{T_s}) \end{bmatrix}, \tag{7}$$

dla: $l \in L_s$, $s \in S$, nazywamy wynikami symulacyjnego badania procesu przesyłania komunikatów w systemach rozproszonych.

4. ESTYMACJA PARAMETRÓW MODELI PROBABILISTYCZNYCH PROCESÓW PRZESYŁANIA KOMUNIKATÓW W LINKACH SIECIOWYCH SYSTEMÓW ROZPROSZONYCH

Macierz $\mathbf{X}_{sl}$ (7) zapiszmy w postaci:

$$\mathbf{X}_{sl} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{sl}^{(1)} & \mathbf{x}_{sl}^{(2)} & \cdots & \mathbf{x}_{sl}^{(m_{T_S})} \end{bmatrix},$$

gdzie $\mathbf{x}_{sl}^{(n)} = \left[x_{sl}(1,n), x_{sl}(2,n), \ldots, x_{sl}(m,n) \right]^T \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ jest n-tą kolumną macierzy $\mathbf{X}_{sl}$, dla $n \in N_s$. Jak można zauważyć składowe $x_{sl}(i,n)$, $i \in I$, próby $\mathbf{x}_{sl}^{(n)}$ są zaobserwowanymi, w toku wykonywania eksperymentów symulacyjnych, długościami przedziałów czasu przesyłania pakietu $M_s(n)$ wzdłuż linku l, $l \in L_s$, dla $n \in N_s$. Składowe próby $\mathbf{x}_{sl}^{(n)}$ interpretuje się jako realizacje procesu stochastycznego ξ_{sl} (5), tj. $\xi_{sl_{\omega_i}}(n) = x_{sl}(i,n)$, gdzie $\omega_i \in \Omega$ jest zdarzeniem elementarnym, dla $i \in I$. Niech $\hat{\mu}_{sl}^{(n)} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_{sl}(i,n)$ będzie średnią z próby $\mathbf{x}_{sl}^{(n)}$, którą interpretuje się jako oszacowanie oczekiwanej długości przedziału czasu przesyłania pakietu $M_s(n)$ przez link l, $l \in L_s$.

Załóżmy, że ciąg zmiennych losowych $\left(\hat{\mu}_{sl}^{(n)}\right)_{n \in N_s}$ spełnia równanie o postaci:

$$\hat{\mu}_{sl}^{(n)} = \omega_{sl}(n) + \delta_{sl}(n) = \boldsymbol{\beta}_{sl}^T \mathbf{z}_{sl}(n) + \delta_{sl}(n), \qquad n \in N_s, \tag{8}$$

gdzie: $\omega_{sl} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jest trendem ciągu $\left(\hat{\mu}_{sl}^{(n)}\right)_{n \in N_s}$, $\boldsymbol{\beta}_{sl} = \left[\beta_{sl}(0), \ldots, \beta_{sl}(m_\beta - 1) \right]^T$, $m_\beta = 4$, jest wektorem parametrów trendu ω_{sl}, $\mathbf{z}_{sl}(n) = \left[1, \hat{\mu}_{sl}^{(n)}, \left(\hat{\mu}_{sl}^{(n)}\right)^2, \left(\hat{\mu}_{sl}^{(n)}\right)^3 \right]^T$, oraz $\delta_{sl}(n) \sim WN\left(0, \sigma_{sl}^2\right)$.

Poszukujemy modelu strukturalnie zgodnego z układem (8) o postaci:

$$\tilde{\mu}_{sl}^{(n)} = \hat{\omega}_{sl}(n) = \mathbf{b}_{sl}^T \mathbf{z}_{sl}(n), \qquad n \in N_s, \tag{9}$$

gdzie: $\hat{\omega}_{sl} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jest modelem trendu ω_{sl}, $\mathbf{b}_{sl} = \left[b_{sl}(0), b_{sl}(1), \ldots, b_{sl}(m_\beta - 1) \right]^T$ jest wektorem nieznanych parametrów modelu $\hat{\omega}_{sl}$.

Załóżmy, że poszukiwany model $\hat{\omega}_{sl}$ ma minimalizować błąd średniokwadratowy $\mathrm{E}\left[\left(\varepsilon_{sl}^{(n)}\right)^2\right]$, gdzie $\varepsilon_{sl}^{(n)} = \hat{\mu}_{sl}^{(n)} - \tilde{\mu}_{sl}^{(n)}$, dla $n \in N_s$.

Równania (8) zapiszmy w postaci macierzowej:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{sl} = \mathbf{Z}_{sl}\boldsymbol{\beta}_{sl} + \boldsymbol{\delta}_{sl},$$

gdzie: $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{sl} = \left[\hat{\mu}_{sl}^{(1)}, \hat{\mu}_{sl}^{(2)}, \ldots, \hat{\mu}_{sl}^{(m_{T_s})}\right]^T \in \mathbb{R}^{m_{T_s}\times 1}$, $\mathbf{Z}_{sl} = \left[\mathbf{z}_{sl}^T(1), \mathbf{z}_{sl}^T(2), \ldots, \mathbf{z}_{sl}^T\left(m_{T_s}\right)\right]^T \in \mathbb{R}^{m_{T_s}\times m_\beta}$.

Równania (9) przybierają następującą postać macierzową:

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{sl} = \mathbf{Z}_{sl}\mathbf{b}_{sl},$$

gdzie $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{sl} = \left[\tilde{\mu}_{sl}^{(1)}, \tilde{\mu}_{sl}^{(2)}, \ldots, \tilde{\mu}_{sl}^{(m_{T_s})}\right]^T \in \mathbb{R}^{m_{T_s}\times 1}$.

Zadanie polega na znalezieniu wektora $\hat{\mathbf{b}}_{sl} \in \mathbb{R}^{m_\beta\times 1}$ takiego, że:

$$\mathrm{f}\left(\hat{\mathbf{b}}_{sl}\right) = \min_{\mathbf{b}_{sl}\in\mathbb{R}^{m_\beta\times 1}} \left\{\mathrm{f}\left(\mathbf{b}_{sl}\right) = \boldsymbol{\varepsilon}_{sl}^T\boldsymbol{\varepsilon}_{sl} = \left(\hat{\boldsymbol{\mu}}_{sl} - \mathbf{Z}_{sl}\mathbf{b}_{sl}\right)^T\left(\hat{\boldsymbol{\mu}}_{sl} - \mathbf{Z}_{sl}\mathbf{b}_{sl}\right)\right\}, \tag{10}$$

gdzie: $\boldsymbol{\varepsilon}_{sl} = \left[\varepsilon_{sl}^{(1)}, \varepsilon_{sl}^{(2)}, \ldots, \varepsilon_{sl}^{(m_{T_s})}\right]^T = \hat{\boldsymbol{\mu}}_{sl} - \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{sl} = \hat{\boldsymbol{\mu}}_{sl} - \mathbf{Z}_{sl}\mathbf{b}_{sl}$.

Zadanie (10) jest liniowym zadaniem najmniejszych kwadratów [9-11]. Minimalizowaną sumę błędów średniokwadratowych zapiszmy w postaci:

$$\begin{aligned}\mathrm{f}\left(\mathbf{b}_{sl}\right) &= \left(\hat{\boldsymbol{\mu}}_{sl} - \mathbf{Z}_{sl}\mathbf{b}_{sl}\right)^T\left(\hat{\boldsymbol{\mu}}_{sl} - \mathbf{Z}_{sl}\mathbf{b}_{sl}\right)\\ &= \hat{\boldsymbol{\mu}}_{sl}^T\hat{\boldsymbol{\mu}}_{sl} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{sl}^T\mathbf{Z}_{sl}\mathbf{b}_{sl} - \mathbf{b}_{sl}^T\mathbf{Z}_{sl}^T\hat{\boldsymbol{\mu}}_{sl} + \mathbf{b}_{sl}^T\mathbf{Z}_{sl}^T\mathbf{Z}_{sl}\mathbf{b}_{sl}\\ &= \hat{\boldsymbol{\mu}}_{sl}^T\hat{\boldsymbol{\mu}}_{sl} - 2\mathbf{b}_{sl}^T\mathbf{Z}_{sl}^T\hat{\boldsymbol{\mu}}_{sl} + \mathbf{b}_{sl}^T\mathbf{Z}_{sl}^T\mathbf{Z}_{sl}\mathbf{b}_{sl}.\end{aligned}$$

Różniczkując powyższą funkcję względem wektora $\mathbf{b}_{sl}$ mamy:

$$\frac{\partial\,\mathrm{f}\left(\mathbf{b}_{sl}\right)}{\partial\mathbf{b}_{sl}} = -2\mathbf{Z}_{sl}^T\hat{\boldsymbol{\mu}}_{sl} + 2\mathbf{Z}_{sl}^T\mathbf{Z}_{sl}\mathbf{b}_{sl}.$$

Przyrównując powyższą różniczkę do zera otrzymujemy warunek optymalności, z którego wynika układ równań normalnych o postaci:

$$\mathbf{Z}_{sl}^T\hat{\boldsymbol{\mu}}_{sl} = \mathbf{Z}_{sl}^T\mathbf{Z}_{sl}\mathbf{b}_{sl}.$$

Jeżeli macierz $\mathbf{Z}_{sl}^T\mathbf{Z}_{sl}$ jest nieosobliwa, to rozwiązaniem zadania (10) jest estymator o postaci:

$$\hat{\mathbf{b}}_{sl} = \left(\mathbf{Z}_{sl}^T\mathbf{Z}_{sl}\right)^{-1}\mathbf{Z}_{sl}^T\hat{\boldsymbol{\mu}}_{sl}\,.$$

5. ESTYMACJA PARAMETRÓW MODELI PROBABILISTYCZNYCH PROCESÓW PRZESYŁANIA KOMUNIKATÓW W ŚCIEŻKACH SIECIOWYCH SYSTEMÓW ROZPROSZONYCH

Niech $\mathbf{x}_s^{(n)} = \sum_{l\in L_s}\mathbf{x}_{sl}^{(n)} = \left[x_s(1,n), x_s(2,n), \ldots, x_s(m,n)\right]^T \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ będzie próbą, której składowymi $x_s(i,n) = \sum_{l\in L_s} x_{sl}(i,n)$, $i \in I$, są zaobserwowane, w toku wykonywania eksperymentów symulacyjnych, długości przedziałów czasu przesyłania pakietu $M_s(n)$ wzdłuż ścieżki *s*, $s \in S$. Składowe próby $\mathbf{x}_s^{(n)}$ interpretuje się jako realizacje procesu stochastycznego ξ_s (6), tj. $\xi_{s_{\omega_i}}(n) = x_s(i,n)$, gdzie $\omega_i \in \Omega$ jest zdarzeniem elementarnym, dla $i \in I$. Niech $\hat{\mu}_s^{(n)} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_s(i,n)$ będzie średnią z próby $\mathbf{x}_s^{(n)}$, którą interpretuje się jako oszacowanie oczekiwanej długości przedziału czasu przesyłania pakietu $M_s(n)$ przez ścieżkę *s*, $s \in S$.

Załóżmy, że ciąg zmiennych losowych $\left(\hat{\mu}_s^{(n)}\right)_{n\in N_s}$ spełnia równanie o postaci:

$$\hat{\mu}_s^{(n)} = \omega_s(n) + \delta_s(n) = \boldsymbol{\beta}_s^T\mathbf{z}_s(n) + \delta_s(n), \qquad n \in N_s\,, \tag{11}$$

gdzie: $\omega_s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jest trendem $\left(\hat{\mu}_s^{(n)}\right)_{n\in N_s}$, $\boldsymbol{\beta}_s = \left[\beta_s(0), \ldots, \beta_s(m_\beta - 1)\right]^T$, $m_\beta = 4$, jest wektorem nieznanych parametrów trendu ω_s, $\mathbf{z}_s(n) = \left[1, \hat{\mu}_s^{(n)}, \left(\hat{\mu}_s^{(n)}\right)^2, \left(\hat{\mu}_s^{(n)}\right)^3\right]^T$, oraz $\delta_s(n) \sim WN\left(0, \sigma_s^2\right)$.

Poszukujemy modelu strukturalnie zgodnego z układem (11) o postaci:

$$\tilde{\mu}_s^{(n)} = \hat{\omega}_s(n) = \mathbf{b}_s^T\mathbf{z}_s(n), \qquad n \in N_s\,, \tag{12}$$

gdzie: $\hat{\omega}_s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jest modelem trendu ω_s (11), $\mathbf{b}_s = \left[b_s(0), b_s(1), \ldots, b_s(m_\beta - 1)\right]^T$ jest wektorem nieznanych parametrów modelu $\hat{\omega}_s$.

Załóżmy, że poszukiwany model $\hat{\omega}_s$ ma minimalizować błąd średniokwadratowy $\mathrm{E}\left[\left(\varepsilon_s^{(n)}\right)^2\right]$, gdzie $\varepsilon_s^{(n)} = \hat{\mu}_s^{(n)} - \tilde{\mu}_s^{(n)}$, dla $n \in N_s$.
Równania (11) zapiszmy w postaci macierzowej:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_s = \mathbf{Z}_s \boldsymbol{\beta}_s + \boldsymbol{\delta}_s,$$

gdzie: $\hat{\boldsymbol{\mu}}_s = \left[\hat{\mu}_s^{(1)}, \hat{\mu}_s^{(2)}, \ldots, \hat{\mu}_s^{\left(m_{T_S}\right)}\right]^T \in \mathbb{R}^{m_{T_S} \times 1}$, $\mathbf{Z}_s = \left[\mathbf{z}_s^T(1), \mathbf{z}_s^T(2), \ldots, \mathbf{z}_s^T\left(m_{T_s}\right)\right]^T \in \mathbb{R}^{m_{T_S} \times m_\beta}$.
Równania (12) przybierają następującą postać macierzową:

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_s = \mathbf{Z}_s \mathbf{b}_s,$$

gdzie $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_s = \left[\tilde{\mu}_s^{(1)}, \tilde{\mu}_s^{(2)}, \ldots, \tilde{\mu}_s^{\left(m_{T_S}\right)}\right]^T \in \mathbb{R}^{m_{T_S} \times 1}$.

Zadanie polega na znalezieniu wektora $\hat{\mathbf{b}}_s$ takiego, że:

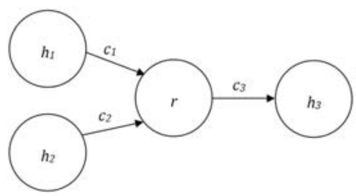
$$\mathrm{f}\left(\hat{\mathbf{b}}_s\right) = \min_{\mathbf{b}_s \in \mathbb{R}^{m_\beta \times 1}} \left\{\mathrm{f}\left(\mathbf{b}_s\right) = \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \boldsymbol{\varepsilon}_s = \left(\hat{\boldsymbol{\mu}}_s - \mathbf{Z}_s \mathbf{b}_s\right)^T \left(\hat{\boldsymbol{\mu}}_s - \mathbf{Z}_s \mathbf{b}_s\right)\right\}, \tag{13}$$

gdzie: $\boldsymbol{\varepsilon}_s = \left[\varepsilon_s^{(1)}, \varepsilon_s^{(2)}, \ldots, \varepsilon_s^{\left(m_{T_S}\right)}\right]^T = \hat{\boldsymbol{\mu}}_s - \tilde{\boldsymbol{\mu}}_s = \hat{\boldsymbol{\mu}}_s - \mathbf{Z}_s \mathbf{b}_s$. Rozwiązując zadanie (13) w sposób analogiczny do sposobu rozwiązywania zadania (10), otrzymujemy estymator parametrów funkcji $\hat{\omega}_s$ (13) o postaci:

$$\hat{\mathbf{b}}_s = \left(\mathbf{Z}_s^T \mathbf{Z}_s\right)^{-1} \mathbf{Z}_s^T \hat{\boldsymbol{\mu}}_s$$

Przykład 1. Rozważmy zagadnienie symulacyjnego badania procesu przesyłania komunikatów w prostym systemie rozproszonym, którego strukturę reprezentuje sieć *N*=(*V*,*E*,**c**) przedstawiona na rysunku 1, gdzie: $V = H \cup R$, $H = \left\{h_1, \ldots, h_{m_H}\right\}$, $m_H = 3$, $R = \{r\}$, $E = \left\{e_1, \ldots, e_{m_E}\right\}$, $m_E = 3$, $\mathbf{c} = \left(c_1, \ldots, c_{m_E}\right)^T$. Zbiór P przyjmuje postać $P = \{p_1, p_2\}$, gdzie: $p_1 = (h_1, r, h_3)$, $p_2 = (h_2, r, h_3)$. Zbiory *K, S* i *L* przybierają postacie: *K*={1,2,3}, *S*={1,2}, *L*={1,2,3}.

Rys. 1. Wykres sieci N reprezentującej strukturę techniczną systemu rozproszonego



Macierz routingu **R** (3) przybiera postać:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Założmy, że wektor przepustowości **c** ma postać $\mathbf{c} = \left[100,100,100\right]^T$. Załóżmy dalej, że komunikaty ze zbioru *M* mają długości $m_{M_s} = 200$ [Mb], dla $s \in S$.

Przyjmijmy, że zmienne losowe ψ_s (4), $s \in S$, mają różne rozkłady Weibulla, tj. $\psi_s \sim W\left(\alpha_s, \beta_s\right)$, gdzie: $\alpha_1 = 1{,}2$, $\beta_1 = 6{,}5$, $\alpha_2 = 0{,}95$, $\beta_2 = 3{,}5$. Liczba powtórzeń eksperymentów symulacyjnych wynosi *m*=138, natomiast zbiory N_s, $s \in S$, mają długości: $m_{T_1} = 31$, $m_{T_2} = 28$.

Niech $\mathbf{x}_{sl}^{(n)} = \left[x_{sl}^{(n)}\left(1\right), x_{sl}^{(n)}\left(2\right), \ldots, x_{sl}^{(n)}\left(m_{T_s}\right) \right]^T$ będzie próbą zawierającą zaobserwowane długości przedziałów czasu przesyłania pakietu $M_s\left(n\right) \subseteq M_s$, $n \in N_s$, przez link *l*, $l \in L_s$, należący do ścieżki *s*, $s \in S$. Na rysunku 2 przedstawiono wyniki analizy statystycznej procesu przesyłania komunikatów wzdłuż linków ze zbiorów L_s, $s \in S$.

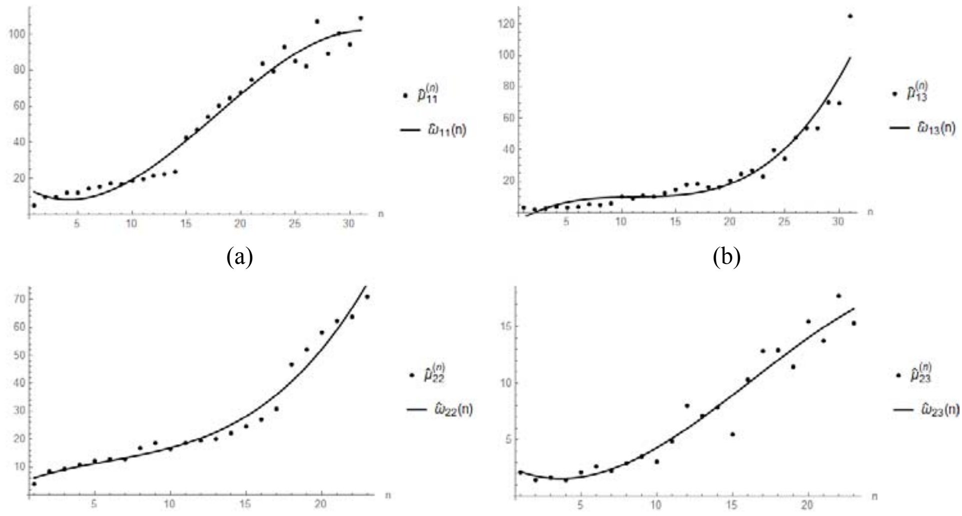
Niech $\mathbf{x}_s^{(n)} = \sum_{l \in L_s} \mathbf{x}_{sl}^{(n)}$ będzie próbą zawierającą zaobserwowane długości przedziałów czasu przesyłania pakietu $M_s\left(n\right) \subseteq M_s$, $n \in N_s$, przez ścieżkę *s*, $s \in S$.

Na rysunku 3 przedstawiono wyniki analizy statystycznej procesu przesyłania komunikatów wzdłuż ścieżek ze zbioru *S*.

6. PODSUMOWANIE

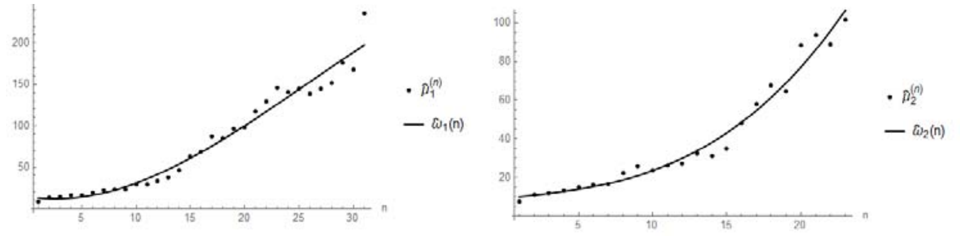
W pracy przedstawiono model probabilistyczny procesu przesyłania komunikatów w systemach rozproszonych, uwzględniający niepewność występującą w przepływach danych we współdzielonych linkach sieci komputerowych. Uwzględniając fakt, że proces ten podlega gwałtownym i nieprzewidywalnym zmianom, przyjęto, że modelami probabilistycznymi przepływów danych zarówno we współdzielonych linkach, jak i ścieżkach sieciowych są niestacjonarne ze względu na wartość oczekiwaną procesy stochastyczne. Do estymacji parametrów tych procesów zastosowano metodę najmniejszych kwadratów.

Jednym z obiecujących kierunków dalszych prac jest zastosowanie do modelowania matematycznego przepływów danych w sieciach komputerowych losowych układów dynamicznych [13], które umożliwiają wykorzystanie osiągnięć zarówno procesów stochastycznych jak i układów chaotycznych.



(c) (d)

Rys. 2. Wyniki analizy statystycznej procesu przesyłania komunikatów w linkach sieciowych systemu rozproszonego: (a) średnie $\hat{\mu}_{11}^{(n)}$ (punkty) z prób $\mathbf{x}_{11}^{(n)}$, dla $n \in N_1$, oraz wykres trendu $\hat{\omega}_{11}$ (linia ciągła) ciągu zmiennych losowych $\left(\hat{\mu}_{11}^{(n)}\right)_{n\in N_1}$; (b) średnie $\hat{\mu}_{13}^{(n)}$ (punkty) z prób $\mathbf{x}_{13}^{(n)}$, dla $n \in N_1$ oraz wykres trendu $\hat{\omega}_{13}$ (linia ciągła) ciągu zmiennych losowych $\left(\hat{\mu}_{13}^{(n)}\right)_{n\in N_1}$; (c) średnie $\hat{\mu}_{22}^{(n)}$ (punkty) z prób $\mathbf{x}_{22}^{(n)}$, dla $n \in N_2$, oraz wykres trendu $\hat{\omega}_{22}$ (linia ciągła) ciągu zmiennych losowych $\left(\hat{\mu}_{22}^{(n)}\right)_{n\in N_2}$; (d) średnie $\hat{\mu}_{23}^{(n)}$ (*punkty*) z prób $\mathbf{x}_{23}^{(n)}$, dla $n \in N_2$, oraz wykres trendu $\hat{\omega}_{23}$ (*linia ciągła*) ciągu zmiennych losowych $\left(\hat{\mu}_{23}^{(n)}\right)_{n\in N_2}$



(a) (b)

Rys. 3. Wyniki analizy statystycznej procesu przesyłania komunikatów w ścieżkach sieciowych systemu rozproszonego: (a) średnie $\hat{\mu}_{1}^{(n)}$ (*punkty*) z prób $\mathbf{x}_{1}^{(n)}$, dla $n \in N_1$, oraz wykres trendu $\hat{\omega}_{1}$ (*linia ciągła*) ciągu zmiennych losowych $\left(\hat{\mu}_{1}^{(n)}\right)_{n\in N_1}$; (b) średnie $\hat{\mu}_{2}^{(n)}$ (*punkty*) z prób $\mathbf{x}_{2}^{(n)}$, $n \in N_2$, oraz wykres trendu $\hat{\omega}_{2}$ (*linia ciągła*) ciągu zmiennych losowych $\left(\hat{\mu}_{2}^{(n)}\right)_{n\in N_2}$

□

LITERATURA

1. Committee on Network Science for Future Army Applications. Network Science. National Academies Press, 2005.
2. Lewis T. G.: Network Science: Theory and Applications. John Wiley & Sons, Hoboken, 2009.
3. Dabrowski C., Hunt F.: Using Markov Chain Analysis to Study Dynamic Behavior in Large-Scale Grid Systems. Proceedings of the 7th Australasian Symposium on Grid Computing and e-Research, Wellington, New Zealand, Jan. 2009.
4. Deane J.H.B., Jefferies D.J., Smythe C.: Chaotic Traffic Flow in Local Area Networks. Proceedings of the 11th European Conference on Circuit Theory and Design, Davos, Switzerland, 1993, s. 843–848.
5. Mills K. , Dabrowski C.. Investigating Global Behavior in Computing Grids. In de Meer H., Sterbenz J. P. G. (Eds.): Self-Organizing Systems. Lecture Notes in Computer Science, Volume 4124, 2006, s. 120–136.
6. Paxson V., Floyd S.: Difficulties in Simulating the Internet, IEEE/ACM Transactions on Networking, Vol. 9, 2001, No 4, s. 392-403.
7. Srikant R.: The Mathematics of Internet Congestion Control, Birkhäuser, 2004.
8. Willinger W.: Paxson V.. Where Mathematics Meets the Internet. Notices of the AMS, September 1998, Vol. 45, No. 8, s. 961-970.
9. Box G.E.P., Jenkins G.M., Reinsel G.C.: Time Series Analysis: Forecasting and Control. Wiley, 2008.
10. Pacut A.: Prawdopodobieństwo: teoria, modelowanie probabilistyczne w technice. WNT, 1985.
11. Ljung L.: System Identification: Theory for the User. Prentice Hall, 1998.
12. Fishman G.S.: Discrete-Event Simulation. Springer, 2001.
13. Bhattacharya R., Majumdar M.: Random Dynamical Systems: Theory and Applications. Cambridge University Press, 2007.

Przyjęto do druku dnia 12.01.2016 r.

PROBABILISTIC MODELING OF THE MESSAGE PASSING PROCESS IN DISTRIBUTED SYSTEMS

Zbigniew WESOŁOWSKI

ABSTRACT *The article discusses an issue of the probabilistic modeling of the message passing process in distributed systems. It has been assumed that the probabilistic models of bitrates in network links are non-stationary due to the expected value of stochastic processes. Statistical analysis is carried out on the basis of data generated by the stochastic simulator of the data flow process in computer networks. The data generated by the simulator have been interpreted as realizations of stochastic processes. The paper includes an example of the application of the presented approach to research the message passing process in a simple distributed system.*

Keywords: *probabilistic modeling, distributed systems, statistical analysis non-stationary time series*

Dr inż. Zbigniew WESOŁOWSKI jest pracownikiem naukowo-dydaktycznym Wydziału Cybernetyki Wojskowej Akademii Technicznej. Aktualnie zajmuje się badaniem niezawodności systemów oraz modelowaniem i symulacyjnym badaniem efektywności systemów rozproszonych.