ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XL (2004)

RAFAŁ LATAŁA (Warszawa)

Między Poincarém a Sobolewem

1. Wstęp. Nierówności Poincarégo i logarytmiczne Sobolewa są ważnymi i intensywnie rozwijanymi w ostatnich latach narzędziami w teorii koncentracji miary, teorii ergodycznej, równaniach różniczkowych i ich zastosowaniach (zob. np. [1, 3, 10, 11, 16, 17]). Zacznijmy od przypomnienia odpowiednich definicji.

Mówimy, że miara probabilistyczna μ na $\mathbb{R}^n$ spełnia *nierówność Poincarégo* ze stałą C, jeśli dla dowolnej funkcji gładkiej $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ takiej, że $\int_{\mathbb{R}^n} f^2 d\mu < \infty$ zachodzi

$$\operatorname*{Var}_{\mu}(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f^2 d\mu - \left(\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu\right)^2 \le C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\mu. \tag{1}$$

Powyżej i w dalszej części $|x|$ oznacza euklidesową normę wektora x z $\mathbb{R}^n$.

Podobnie mówimy, że miara probabilistyczna μ na $\mathbb{R}^n$ spełnia *nierówność logarytmiczną Sobolewa* ze stałą C, jeśli dla dowolnej funkcji gładkiej $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ takiej, że $\int_{\mathbb{R}^n} f^2 \ln^+ f^2 d\mu < \infty$ zachodzi

$$\operatorname*{Ent}_{\mu}(f^2) := \int_{\mathbb{R}^n} f^2 \ln f^2 d\mu - \int_{\mathbb{R}^n} f^2 d\mu \ln\Big(\int_{\mathbb{R}^n} f^2 d\mu\Big) \le C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\mu. \tag{2}$$

Nierówności Poincarégo i logarytmiczne Sobolewa posiadają szereg interesujących własności, jednak szczególnie dwie z nich sprawiają, że są one tak użyteczne w zastosowaniach. Są to własności tensoryzacji i koncentracji.

Własność tensoryzacji polega na tym, że jeśli dwie miary probabilistyczne μ_i na $\mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, 2$, spełniają nierówność (1) bądź (2) ze stałymi C_i, to również miara produktowa $\mu_1 \otimes \mu_2$ spełnia odpowiednią nierówność ze stałą $C = \max(C_1, C_2)$. W szczególności, jeśli nierówność (1) bądź (2) zachodzi dla miary μ, to zachodzi z tą samą stałą dla miary produktowej $\mu^{\otimes n}$.

Własność koncentracji ma nieco inny charakter dla każdej z powyższych nierówności. Nierówność Poincarégo (1) implikuje koncentrację wykładniczą funkcji lipschitzowskich. Dokładniej, dla dowolnej funkcji $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

L-lipschitzowskiej (tzn. takiej, że $|h(x) - h(y)| \leq L|x-y|$ dla wszystkich x, y) zachodzi

$$\forall_{t\geq 1} \quad \mu\{h - \int_{\mathbb{R}^n} h d\mu \geq tL\sqrt{C}\} \leq \exp(-t/3). \tag{3}$$

Ponieważ funkcja $-h$ jest również L-lipschitzowska, więc do niej również możemy stosować (3) i po dodaniu odpowiednich nierówności stronami otrzymamy

$$\forall_{t\geq 1} \quad \mu\{|h - \int_{\mathbb{R}^n} h d\mu| \geq tL\sqrt{C}\} \leq 2\exp(-t/3).$$

Natomiast z nierówności logarytmicznej Sobolewa (2) wynika koncentracja funkcji lipschitzowskich typu gaussowskiego, tzn.

$$\forall_{t\geq 0} \quad \mu\{h - \int_{\mathbb{R}^n} h d\mu \geq tL\sqrt{C}\} \leq \exp(-t^2) \tag{4}$$

dla dowolnej funkcji L-lipschitzowskiej $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Nierówności koncentracyjne (3) i (4) stały się podstawą, przeżywającej w ostatnich kilkunastu latach burzliwy rozwój, teorii koncentracji miary i znalazły liczne zastosowania w rachunku prawdopodobieństwa, statystyce, geometrii wypukłej, analizie funkcjonalnej i mechanice statystycznej. Doskonałe wprowadzenie do tej tematyki wraz ze szczegółową bibliografią można znaleźć w monografii Ledoux [14].

W kolejnych paragrafach zastanowimy się, jak daleko można uogólnić nierówności (1) i (2), by nie stracić omówionych powyżej własności. W szczególności odpowiemy na pytanie, jakiego typu nierówności implikują koncentrację funkcji lipschitzowskich z ogonem typu $\exp(-t^r)$ dla $1 < r < 2$.

2. Tensoryzacja. Tensoryzowalność nierówności (1) i (2) jest konsekwencją następującego faktu.

FAKT 1. *Dla dowolnych przestrzeni probabilistycznych* (Ω_k, μ_k), $k = 1, 2, \ldots, n$, *oraz dowolnej nieujemnej zmiennej losowej* Z *na* $(\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n, \mu)$, $\mu = \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n$, *spełnione są nierówności*

$$\operatorname*{Var}_{\mu}(Z) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_{\mu} \operatorname*{Var}_{\mu_k}(Z)$$

oraz

$$\operatorname*{Ent}_{\mu}(Z) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_{\mu} \operatorname*{Ent}_{\mu_k}(Z).$$

Przyjęliśmy tutaj następujące naturalne oznaczenia dla nieujemnych zmiennych losowych X na przestrzeni probabilistycznej (Ω, ν):

$$\mathbb{E}_\nu X := \int_\Omega X d\nu,$$

$$\operatorname*{Var}_\nu(X) := \mathbb{E}_\nu X^2 - (\mathbb{E}_\nu X)^2$$

oraz

$$\operatorname*{Ent}_\nu(X) := \mathbb{E}_\nu X \ln X - \mathbb{E}_\nu X \ln(\mathbb{E}_\nu X).$$

Warto również zauważyć, że zarówno $\mathrm{Var}_{\mu_k}(Z)$ jak i $\mathrm{Ent}_{\mu_k}(Z)$ można traktować jako zmienne losowe na $\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$, które nie zależą od k-tej współrzędnej.

Ponieważ zmienne $\mathrm{Var}_\mu(Z)$ i $\mathrm{Ent}_\mu(Z)$ są postaci $\mathbb{E}_\mu \varphi(Z) - \varphi(\mathbb{E}_\mu Z)$ dla odpowiednio dobranej funkcji φ, więc narzuca się następujące pytanie o możliwość uogólnienia Faktu 1.

PYTANIE. Jakie warunki musi spełniać funkcja $\varphi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, żeby dla dowolnych przestrzeni probabilistycznych (Ω_k, μ_k), $k = 1, 2, \ldots, n$, oraz dowolnej nieujemnej zmiennej losowej Z na $(\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n, \mu)$, $\mu = \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n$, zachodziła nierówność

$$\mathbb{E}_\mu \varphi(Z) - \varphi(\mathbb{E}_\mu Z) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_\mu(\mathbb{E}_{\mu_k} \varphi(Z) - \varphi(\mathbb{E}_{\mu_k} Z))? \tag{5}$$

Funkcje spełniające warunek (5) będziemy nazywali funkcjami posiadającymi *własność tensoryzacji.* Z Faktu 1 wynika, że $\varphi(x) = x^2$ i $\varphi(x) = x \ln x$ są takimi funkcjami.

Prawie pełną odpowiedź na postawione pytanie przynosi następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 1. *i) Jeśli $\varphi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ma ściśle dodatnią drugą pochodną oraz $\frac{1}{\varphi''}$ jest funkcją wklęsłą, to φ ma własność tensoryzacji.*

ii) Jeśli φ jest funkcją klasy C^2 na $[0,\infty)$ posiadającą własność tensoryzacji, to $\varphi(x) = ax + b$ lub φ ma własności podane w punkcie i).

Dowód części i) powyższego twierdzenia w pracy [13] był oparty na ideach pochodzących z pracy [15] i polegał na wykazaniu, że przy zadanych warunkach na φ funkcjonał $H_\varphi(Z) = \mathbb{E}\varphi(Z) - \varphi(\mathbb{E}Z)$, określony na zbiorze nieujemnych całkowalnych zmiennych losowych, jest wypukły. Ostatnio w pracy [8] podano wzór przedstawiający H_φ jako supremum funcjonałów liniowych, z którego natychmiast wynika własność tensoryzacji φ:

FAKT 2. *Jeśli $\varphi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ spełnia warunki punktu i) Twierdzenia 1, a Z jest nieujemną całkowalną zmienną losową taką, że $\mathbb{E}\varphi(Z) < \infty$, to*

$$\mathbb{E}\varphi(Z) - \varphi(\mathbb{E}Z) = \sup[\mathbb{E}((\varphi'(T) - \varphi'(\mathbb{E}T))(Z - T) + \varphi(T)) - \varphi(\mathbb{E}T)],$$

gdzie supremum jest brane po wszystkich nieujemnych całkowalnych zmiennych losowych T.

PRZYKŁAD. Funkcja $\varphi(x) = x^q$ ma własność tensoryzacji wtedy i tylko wtedy, gdy $1 \le q \le 2$.

Stosując własność tensoryzacji do funkcji $\varphi(x) = x^{2/p}$ i $Z = |f|^p$, otrzymujemy następujący wniosek.

WNIOSEK 1. *Jeśli (Ω, μ) jest produktem przestrzeni probabilistycznych (Ω_k, μ_k), zaś $f \in L^2(\Omega, \mu)$, to dla $1 \le p \le 2$*

$$\mathbb{E}_\mu f^2 - (\mathbb{E}_\mu |f|^p)^{2/p} \le \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_\mu (\mathbb{E}_{\mu_k} f^2 - (\mathbb{E}_{\mu_k} |f|^p)^{2/p}).$$

3. Nierówności $I(r)$. W tym paragrafie wprowadzimy nową klasę nierówności, pośrednich między nierównościami Poincarégo i logarytmicznymi Sobolewa oraz wykażemy ich podstawowe własności.

DEFINICJA. Powiemy, że miara probabilistyczna μ na $\mathbb{R}^n$ *spełnia nierówność* $I(r)$, $1 \le r \le 2$, ze stałą C, jeśli dla dowolnej funkcji gładkiej $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zachodzi

$$\forall_{1 \le p < 2} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f^2 d\mu - \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f^p d\mu\Big)^{2/p} \le C(2-p)^{2(1-\frac{1}{r})} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\mu. \tag{6}$$

FAKT 3. *i) Miara μ spełnia nierówność Poincarégo ze stałą C wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia nierówność $I(1)$ ze stałą C.*

ii) Jeśli miara μ spełnią nierówność logarytmiczną Sobolewa ze stałą C, to μ spełnia nierówność $I(2)$ ze stałą C.

iii) Jeśli miara μ spełnia $I(2)$ ze stałą C, to μ spełnia nierówność logarytmiczną Sobolewa ze stałą $2C$.

iv) Jeśli miara μ spełnia $I(r)$ ze stałą C, to μ spełnia $I(r')$ ze stałą C dla dowolnego $1 \le r' \le r$.

Dowód. Określmy dla $1 \le p < 2$

$$\mathrm{Var}(p)_\mu(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f^2 d\mu - \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^p d\mu\right)^{2/p}.$$

Część i) wynika stąd, że funkcja $p \to \mathrm{Var}(p)_\mu(f)$ jest nierosnąca na $[1,2)$. Część iii) jest natychmiastową konsekwencją tożsamości

$$\lim_{p \to 2-} \frac{\mathrm{Var}(p)_\mu(f)}{2-p} = \frac{1}{2} \mathrm{Ent}_\mu(f^2).$$

Część iv) jest oczywista. Aby udowodnić ii), należy skorzystać z tego, że funkcja $\alpha(p) = \frac{\mathrm{Var}(p)_\mu(f)}{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$ jest niemalejąca względem p, a zatem dla $1 \le p < 2$

$$\frac{\mathrm{Var}(p)_\mu(f)}{2-p} = \frac{\alpha(p)}{2p} \le \frac{\lim_{p\to 2-}\alpha(p)}{2} = \operatorname*{Ent}_\mu(f^2). \qquad \square$$

U w a g a. Nierówność $I(r)$ musi zachodzić dla wszystkich p (a przynajmniej dla p bliskich 2). Dla każdego ustalonego p nierówność (6) jest równoważna nierówności Poincarégo (ze stałą zależną od C, p i r).

4. Koncentracja. W tej części wykażemy, że wprowadzone w poprzednim paragrafie nierówności $I(r)$ implikują koncentrację interpolującą między przypadkiem wykładniczym a gaussowskim.

TWIERDZENIE 2. *Jeśli miara μ spełnia nierówność $I(r)$ ze stałą C, to dla dowolnej funkcji L-lipschitzowskiej $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zachodzi*

$$\mu\{h - \mathbb{E}_\mu h \ge tL\sqrt{C}\} \le \exp(-\frac{t^2}{3}),\ 0 \le t \le 1$$

oraz

$$\mu\{h - \mathbb{E}_\mu h \ge tL\sqrt{C}\} \le \exp(-\frac{t^r}{3}),\ t \ge 1.$$

D o w ó d. Przedstawimy dowód oparty na metodzie pochodzącej od Aidy i Stroocka [2]. W dowodzie przyjmujemy $a = 2(1-\frac{1}{r})$. Bez straty ogólności możemy założyć, że funkcja h jest gładka i ograniczona oraz $L = 1$, a zatem $|\nabla h(x)| \le 1$ dla wszystkich x. Niech $H(\lambda) = \mathbb{E}_\mu e^{\lambda h}$ dla $\lambda \ge 0$. Stosując nierówność (6) dla $f = \exp(\lambda h/2)$ dostajemy

$$H(\lambda) - H(\frac{p}{2}\lambda)^{2/p} \le \frac{C\lambda^2}{4}(2-p)^a \mathbb{E}_\mu |\nabla h|^2 e^{\lambda h} \le \frac{C\lambda^2}{4}(2-p)^a H(\lambda).$$

Zatem dla $1 \le p < 2$ i $0 \le \lambda \le \frac{2}{\sqrt{C}}(2-p)^{-a/2}$ mamy

$$H(\lambda) \le \frac{H(\frac{p}{2}\lambda)^{2/p}}{1 - \frac{C\lambda^2}{4}(2-p)^a}.$$

Iterując powyższą nierówność m razy dostajemy

$$H(\lambda) \le \frac{H((\frac{p}{2})^m\lambda)^{(2/p)^m}}{\prod_{k=0}^{m-1}(1 - \frac{C\lambda^2}{4}(2-p)^a(\frac{p}{2})^{2k})^{(2/p)^k}}.$$

Mamy (ponieważ $(p/2)^{2k} < 1$)

$$1 - \frac{C\lambda^2}{4}(2-p)^a(\frac{p}{2})^{2k} \ge (1 - \frac{C\lambda^2}{4}(2-p)^a)^{(p/2)^{2k}},$$

skąd

$$H(\lambda) \le H((\frac{p}{2})^m \lambda)^{(2/p)^m} (1 - \frac{C\lambda^2}{4}(2-p)^a)^{-\sum_{k=0}^{m-1}(p/2)^k}.$$

Ponieważ $(p/2)^m \to 0$ przy $m \to \infty$ oraz $H(\lambda) = 1 + \lambda \mathbb{E}_\mu h + o(\lambda)$ przy $\lambda \to 0+$, to

$$\lim_{m\to\infty} H((\frac{p}{2})^m \lambda)^{(2/p)^m} = \lim_{t\to 0+} (1 + t\lambda \mathbb{E}_\mu h)^{1/t} = \exp(\lambda \mathbb{E}_\mu h).$$

Zatem

$$\mathbb{E}_\mu \exp(\lambda(h - \mathbb{E}_\mu h)) \le (1 - \frac{C\lambda^2}{4}(2-p)^a)^{-2/(2-p)},$$

czyli, wobec nierówności Czebyszewa,

$$\mu(h - \mathbb{E}_\mu h \ge t\sqrt{C}) \le e^{-\lambda t\sqrt{C}}(1 - \frac{C\lambda^2}{4}(2-p)^a)^{-2/(2-p)}. \tag{7}$$

Przyjmując $p = 1$ oraz $\lambda = t/\sqrt{C}$ dla $0 \le t \le 1$ dostajemy

$$\mu(h - \mathbb{E}_\mu h \ge t\sqrt{C}) \le e^{-t^2}(1 - \frac{t^2}{4})^{-2}.$$

Dla $0 \le t \le 1$ mamy $1 - t^2/4 \ge \exp(-t^2/3)$ i stąd

$$\mu(h - \mathbb{E}_\mu h \ge t\sqrt{C}) \le e^{-t^2/3}.$$

Dla $t \ge 1$ kładziemy w nierówności (7) $p = 2 - t^{-2/(2-a)} = 2 - t^{-r}$ oraz $\lambda = t^{a/(2-a)}/\sqrt{C} = t^{-1+r}/\sqrt{C}$ i dostajemy

$$\mu(h - \mathbb{E}_\mu h \ge t\sqrt{C}) \le e^{-t^r}(1 - \frac{1}{4})^{-2t^r} = (\frac{16}{9e})^{t^r} \le e^{-t^r/3}. \qquad \square$$

Wobec Twierdzenia 2 nasuwają się dwa pytania: czy uzyskane oszacowanie jest optymalnego rzędu i czy istnieją nietrywialne przykłady miar spełniających nierówność $I(r)$ dla $1 < r < 2$? Pozytywną odpowiedź na oba pytania daje kolejne twierdzenie.

TWIERDZENIE 3. *Dla dowolnego* $1 \le r \le 2$ *miara probabilistyczna na prostej* μ_r *z gęstością* $(2\Gamma(1+\frac{1}{r}))^{-1}\exp(-|t|^r)$ *spełnia nierówność* $I(r)$ *ze stałą* C *niezależną od* r.

Uwaga. i) Miara μ_r ma ogon rzędu $\exp(-|t|^r/K)$, więc rzeczywiście koncentracja uzyskana w Twierdzeniu 2 jest optymalnego rzędu.

ii) Oczywiście μ_r nie spełnia nierówności $I(r')$ dla $r < r'$, gdyż implikowałaby ona szybszą zbieżność do 0 ogona miary μ_r.

Bazując na poprzednim twierdzeniu F. Barthe podał dowód pewnego kryterium dla miar na $\mathbb{R}^n$, gwarantującego spełnianie nierówności $I(r)$. Przypomnijmy, że miarę μ nazywamy *logarytmicznie wklęsłą*, jeśli $\mu(\lambda A + (1-\lambda)B) \ge \mu(A)^\lambda \mu(B)^{1-\lambda}$ dla dowolnych zbiorów zwartych A, B i $0 < \lambda < 1$

(w przypadku miar absolutnie ciągłych, zgodnie z twierdzeniem C. Borella [7], warunek ten jest równoważny wklęsłości logarytmu gęstości miary).

TWIERDZENIE 4. *Jeśli μ jest miarą logarytmicznie wklęsłą na $\mathbb{R}^n$ taką, że dla pewnego $1 \leq r \leq 2$ i stałej K, $\mu\{x \in \mathbb{R}^n : |x| > t\} \leq K \exp(-\frac{|t|^r}{K})$ dla wszystkich $t > 0$, to miara μ spełnia nierówność $I(r)$ ze stałą zależną tylko od K, n i r.*

5. Oszacowania stałych w przypadku jednowymiarowym. Pierwszy dowód Twierdzenia 3 był bardzo techniczny i skomplikowany. W pracy [5] Barthe i Roberto uzyskali znacznie ogólniejsze wyniki za pomocą bardziej przejrzystych metod. Zacznijmy jednak od twierdzenia Bobkowa i Götzego [9] podającego warunki dla miar na prostej równoważne nierówności logarytmicznej Sobolewa (a zatem również nierówności $I(2)$).

TWIERDZENIE 5. *Niech μ, ν będą miarami nieujemnymi na $\mathbb{R}$ takimi, że μ jest miarą probabilistyczną z medianą m, a ν jest absolutnie ciągła, przy czym $d\nu(x) = n(x)dx$. Niech C będzie najmniejszą stałą taką, że dla dowolnej funkcji gładkiej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*

$$\operatorname*{Ent}_{\mu}(f^2) \leq C \int_{\mathbb{R}} |f'|^2 d\nu.$$

Wówczas

$$\max(b_-, b_+) \leq C \leq 16 \max(b_-, b_+),$$

gdzie

$$b_+ = \sup_{x>m} \mu([x, \infty)) \ln(1 + \frac{1}{2\mu([x, \infty))}) \int_m^x \frac{1}{n} dx$$

oraz

$$b_- = \sup_{x<m} \mu((-\infty, x]) \ln(1 + \frac{1}{2\mu((-\infty, x])}) \int_x^m \frac{1}{n} dx.$$

Kolejne twierdzenie pochodzi z pracy [5] i podaje szacowania stałej C w nierówności (6) dla ustalonego p.

TWIERDZENIE 6. *Niech μ, ν, $n(x)$ i m będą jak w poprzednim twierdzeniu, $1 < p < 2$, zaś C będzie najmniejszą stałą taką, że dla dowolnej funkcji gładkiej nieujemnej f na prostej*

$$\int_{\mathbb{R}} f^2 d\mu - (\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu)^{2/p} \leq C \int_{\mathbb{R}} |f'|^2 d\nu.$$

Wówczas

$$\max(b_-(p), b_+(p)) \leq C \leq 20 \max(b_-(p), b_+(p)),$$

gdzie

$$b_+(p) = \sup_{x>m} \mu([x,\infty))(1-(1+\frac{1}{2\mu([x,\infty))})^{(p-2)/p})\int_m^x \frac{1}{n}dx$$

oraz

$$b_-(p) = \sup_{x<m} \mu((-\infty,x])(1-(1+\frac{1}{2\mu((-\infty,x])})^{(p-2)/p})\int_x^m \frac{1}{n}dx.$$

Przy pomocy powyższego twierdzenia nietrudno już wyprowadzić oszacowania stałych C w nierówności $I(r)$.

TWIERDZENIE 7. *Niech* μ, ν, $n(x)$ *i* m *będą jak w Twierdzeniu* 5, $1 < p < 2$, *zaś* C *będzie najmniejszą stałą taką, że dla dowolnej funkcji gładkiej nieujemnej* f *na prostej*

$$\sup_{1<p<2} \frac{\int_{\mathbb{R}} f^2 d\mu - (\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu)^{2/p}}{(2-p)^{2(1-\frac{1}{r})}} \le C\int_{\mathbb{R}} |f'|^2 d\nu.$$

Wówczas

$$\frac{1}{3}\max(c_-(r), c_+(r)) \le C \le 17\max(c_-(r), c_+(r)),$$

gdzie

$$c_+(r) = \sup_{x>m} \mu([x,\infty))(\ln(1+\frac{1}{2\mu([x,\infty))}))^{2(1-\frac{1}{r})}\int_m^x \frac{1}{n}dx$$

oraz

$$c_-(r) = \sup_{x<m} \mu((-\infty,x])(\ln(1+\frac{1}{2\mu((-\infty,x])}))^{2(1-\frac{1}{r})}\int_x^m \frac{1}{n}dx.$$

Powyższe twierdzenie łatwo implikuje Twierdzenie 3.

6. Inne zastosowania i otwarte pytania. Boucheron, Bousquet, Lugosi i Massart, bazując na własności tensoryzacji funkcji $\varphi(x) = |x|^q$, $1 \le q \le 2$, uzyskali szereg ogólnych oszacowań momentów funkcjonałów statystycznych postaci $Z = f(X_1, \ldots, X_n)$, gdzie $X_1, \ldots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi. Oszacowań tych nie można uzyskać bazując na tradycyjnie wykorzystywanej metodzie entropii, gdyż nie zakłada się skończoności $\mathbb{E}e^{\lambda Z}$. W ten sposób udało się uzyskać wiele interesujących oszacowań dla chaosów rademacherowskich dowolnych rzędów, procesów empirycznych i U-statystyk. Zainteresowanego czytelnika odsyłamy do pracy [8], tutaj natomiast podamy jedynie przykładowe twierdzenie obrazujące uzyskane przez nich wyniki.

Niech $X_1, \dots, X_n$ będą ciągiem niezależnych zmiennych losowych, a ciąg $X_1', \dots, X_n'$ będzie jego niezależną kopią. Dla ustalonej funkcji n zmiennych f określmy

$$Z = f(X_1, \dots, X_n), \; Z_i' = f(X_1, \dots, X_{i-1}, X_i', X_{i+1}, \dots X_n),$$

$$V_+ = \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{n}(Z - Z_i')_+^2 | (X_1, \dots, X_n)\Big),$$

$$V_- = \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{n}(Z - Z_i')_-^2 | (X_1, \dots, X_n)\Big).$$

TWIERDZENIE 8. *Dla dowolnej liczby całkowitej $q \geq 2$ zachodzi*

$$\mathbb{E}(Z - \mathbb{E}Z)_+^q \leq (3q)^{q/2} \mathbb{E} V_+^{q/2}$$

oraz

$$\mathbb{E}(Z - \mathbb{E}Z)_-^q \leq (3q)^{q/2} \mathbb{E} V_-^{q/2}.$$

W poprzednim paragrafie podano oszacowania stałych w nierównościach $I(r)$ dla miar na prostej. Podobne wyniki nie są znane w przypadku wielowymiarowym, nawet dla nierówności Poincarégo czy logarytmicznej Sobolewa. Twierdzenie 4 jest jednym z nielicznych znanych wyników dla nieproduktowych miar wielowymiarowych, jednak stałe, które w nim występują, zależą od wymiaru przestrzeni. Pozostaje otwarte pytanie, czy można (być może przy dodatkowych założeniach) pozbyć się tej zależności. Szczególnym przypadkiem tego zagadnienia jest poniższe pytanie pochodzące od Kannana, Lovásza i Simonovitsa [12].

PYTANIE. Załóżmy, że μ jest logarytmicznie wklęsłą miarą na $\mathbb{R}^n$ taką, że $\int_{\mathbb{R}^n} x_i d\mu = 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j d\mu = \delta_{i,j}$ dla $1 \leq i, j \leq n$. Czy wówczas μ spełnia nierówność Poincarégo (1) ze stałą C nie zależącą od miary μ ani wymiaru n?

Pozytywna odpowiedź na powyższe pytanie miałaby szereg istotnych konsekwencji w geometrii wypukłej (por. [4, 6]).

Inne istotne pytanie dotyczy tego jakie własności miary na prostej (bądź w $\mathbb{R}^k$) implikują niezależne od n oszacowania koncentracji miar produktowych $\mu^{\otimes n}$, tzn. funkcji

$$f(t) = \inf_{n,h} \mu^{\otimes n}\{h - \int_{\mathbb{R}^n} h d\mu^{\otimes n} > t\},$$

gdzie infimum jest wzięte po wszystkich 1-lipschitzowskich funkcjach $h \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Wyniki zebrane w niniejszej notce dotyczą szacowania funkcji f przez $\exp(-t^r)$, $1 \leq r \leq 2$.

Literatura

[1] C. Ané, S. Blachère, D. Chafaï, P. Fougères, I. Gentil, F. Malrieu, C. Roberto, G. Scheffer, *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques*, Panoramas et Synthèses 10, Société Mathématique de France, Paris 2000.

[2] S. Aida, D. Stroock, *Moment estimates derived from Poincaré and logarithmic Sobolev inequalities*, Math. Res. Lett. 1 (1994), 75–86.

[3] A. Arnold, P. Markowich, G. Toscani, A. Unterreiter, *On convex Sobolev inequalities and the rate of convergence to equilibrium for Fokker-Planck type inequalities*, Commm. Partial Differential Equations 26 (2001), 43–100.

[4] K. Ball, F. Barthe, A. Naor, *Entropy jumps in the presence of a spectral gap*, Duke Math. J. 119 (2003), 41–63.

[5] F. Barthe, C. Roberto, *Sobolev inequalities for probability measures on the real line*, Studia Math. 159 (2003), 481–497.

[6] S. Bobkov, A. Koldobsky, *On the central limit property of convex bodies*, w Geometric aspects of functional analysis, Lecture Notes in Math. 1807, 44–52, Springer, Berlin 2003.

[7] C. Borell, *Convex measures on locally convex spaces*, Ark. Math. 12 (1974), 239–252.

[8] S. Boucheron, O. Bousquet, G. Lugosi, P. Massart, *Moment inequalities for functions of independent random variables*, preprint.

[9] S. G. Bobkov, F. Götze, *Exponential integrability and transportation cost related to logarithmic Sobolev inequalities*, J. Funct. Anal. 163 (1999), 1–28.

[10] A. Guionnet, B. Zegarlinski, *Lectures on logarithmic Sobolev inequalities*, Séminaire de Probabilités XXXVI, Lecture Notes in Math. 1801, 1–134, Springer, Berlin 2003.

[11] B. Helffer, *Semiclassical analysis, Witten Laplacians, and statistical mechanics*, Ser. Partial Differential Equation Appl. 1, World Sci., River Edge, NJ, 2002.

[12] R. Kannan, L. Lovász, M. Simonovits, *Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma*, Discrete and Comput. Geom. 13 (1995), 541–559.

[13] R. Latała, K. Oleszkiewicz, *Between Sobolev and Poincaré*, w: *Geometric aspects of functional analysis*, Lecture Notes in Math. 1745, 147–168, Springer, Berlin 2000.

[14] M. Ledoux, *The concentration of measure phenomenon*, Americal Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[15] K. Oleszkiewicz, *Własność hiperkontrakcji i uogólnione nierówności Chinczyna-Kahane'a*, praca magisterska, Uniwersytet Warszawski 1994.

[16] G. Royer, *Une initiation aux inégalités de Sobolev logaritmiques*, Cours Spécialisés 5, Société Mathématique de France, Paris 1999.

[17] C. Villani, *Topics in Optimal Transportation*, Graduate Studies in Mathematics 58, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.