

Konrad SKOWRONEK*

DISSYPACJA ENERGII W RZECZYWISTYM ŹRÓDLE NAPIĘCIA OBCIĄŻONYM LOSOWO

W pracy przeanalizowano zagadnienie dyssypacji energii w modelowanym obwodzie elektrycznym z elementem losowym na przykładzie losowego rezystora. Po przeglądzie źródeł losowości występujących w rzeczywistych układach i systemach wykazano potężną zależność wszystkich strat dyssypacyjnych w obwodach elektrycznych zawierających co najmniej jedno źródło losowości. Może to ułatwić pobranie informacji z innego, niż losowy element, fragmentu obwodu.

1. WSTĘP

Współcześnie jedną z podstawowych przyczyn rozbieżności między teoretycznymi a praktycznymi modelami układów elektrycznych jest brak uwzględniania rzeczywistych charakterów procesów elektromagnetycznych, a w tym - sygnałów losowych. Sygnał deterministyczny jako model rzeczywistego tworzymy z wygody, tradycji a także z braku szerszej wiedzy. Jest to jednak zawsze efekt stworzenia koncepcji czysto teoretycznej. Pełną informację na temat właściwości urządzeń i systemów można uzyskać jedynie tworząc modele losowe. Przykładem takiego postępowania powinna być na przykład ocena właściwości energetycznych w rzeczywistych urządzeniach i systemach.

Teoretycznie (!) wszystkie istniejące sygnały są losowe, jednak ich badacz zainteresowany jest wybranymi przez siebie charakterystykami. Sprawdzenie tego stwierdzenia polega na weryfikacji, teoretycznie przygotowanej, hipotezy. Doświadczalnie łatwo jest udowodnić, że każdy z parametrów i sygnałów powinien zostać opisany w przestrzeni zmiennych i procesów losowych. Losowy opis elementów obwodu elektrycznego można utworzyć między innymi w oparciu o ich właściwości konstrukcyjne.

Dla elementów skupionych R , L , C , wchodzących w skład pasywnych obwodowych modeli strumieni energii, można skonstruować zależności dla prądów, napięć i mocy w podstawowych układach połączeń tych elementów.

W ramach publikacji przeanalizowano energetyczne skutki losowości dla stochastycznych parametrów elementów obwodu na przykładzie rzeczywistego źródła napięcia z losowym obciążeniem $R(t)L$.

* Politechnika Poznańska.

2. PRZYCZYNY LOSOWOŚCI OBCIĄŻEŃ

Z tego co powiedziano we wstępie wynika, że każdy z parametrów i każda ze zmiennych równań modelujących układ mogą być opisane w kategorii procesów losowych. Można wyróżnić takie podstawowe źródła wymuszeń losowych, jak generatory energii elektrycznej, obciążenia elektryczne i elektromechaniczne, układy sterowania i przesył energii elektrycznej.

Właściwości elementów obwodów stanowią dużą i ważną grupę zakłóceń, uważa się je za zakłócenia wewnętrzne [1]. Właściwości losowe, wynikające z zastosowanych materiałów i technologii wykonania, są między innymi przyczyną powstawania tak zwanych szumów własnych elementów.

Szumy te mają czysto stochastyczną naturę i nadal są trudne do charakteryzowania i opanowania. Przeważnie przedstawia się je w postaci dodatkowych, działających w obwodzie, źródeł napięcia lub prądu. W pewnych przypadkach znaczenie szumów jest pozytywne. Przykładowo, współcześnie sztucznie tworzone i wprowadzane do obwodów szumy o kontrolowanych właściwościach probabilistycznych umożliwiają przetwarzanie sygnałów bardzo słabych.

Wymuszenia losowe w obwodach elektrycznych mogą być też związane z losowymi obciążeniami elektrycznymi, będącymi modelami obciążeń mechanicznych, cieplnych, itd. Przykładem innych źródeł wymuszeń losowych mogą być układy sterowania, w których występują naturalne odchyłki we wszystkich torach sygnałowych. Innymi charakterystycznymi przyczynami wymuszeń stochastycznych są zjawiska związane z wytwarzaniem energii elektrycznej. Do podstawowych współczesnych „losowych” źródeł energii elektrycznej należą dziś elektrownie wiatrowe i fotowoltaiczne; ich losowa praca, związana na przykład z losowymi właściwościami wiatru, jest aktualnie tematem wielu prac badawczych. Również napięcie wyjściowe modułów fotowoltaicznych podlega losowym wahaniom chwilowym, krótko-, średnio- i długookresowym.

Praktycznie zawsze obciążenie mechaniczne napędów elektrycznych charakteryzuje duża losowość. Parametry procesów stochastycznych modelujących obciążenia mechaniczne i prąd obciążenia silnika elektrycznego zależą od wielu losowych wymuszeń, na przykład napięć zasilających. Typowym i często spotykanym przykładem losowego obciążenia są warunki pracy ciągów transportowych. Również częstotliwość i wartość napięcia w sieci zasilającej wykazują losowość – na przykład rozkład częstotliwości jest normalny o dyspersji rzędu 0.01 - 0,09 Hz, a sam proces stacjonarny. Wahania wartości napięcia charakteryzuje dyspersja cząstkowa nie przekraczająca 2% wartości znamionowej napięcia, a odchylenie wartości oczekiwanej 4% U_n . Często funkcje gęstości prawdopodobieństwa dla krzywych obciążeń można opisać kombinacją liniową rozkładów normalnych.

Podobnie można modelować zakłócenia wywołane pozostałymi grupami czynników. Wiele przeprowadzonych pomiarów [2, 3] pozwala postawić hipotezę o normalnym charakterze zdecydowanej większości obciążeń losowych w napędach.

3. OBWÓD ELEKTRYCZNY Z ZASTĘPCZYM REZYSTOREM STOCHASTYCZNYM

Jak wiadomo z teorii obwodów elektrycznych, elementy R , L i C mogą być liniowe lub nieliniowe, stacjonarne lub niestacjonarne. Powyższe stwierdzenie, jak zawsze, dotyczy tych właściwości określanych dla wartości średnich, rzadziej dla pozostałych parametrów probabilistycznych.

Dlatego w ogólnym przypadku prawo Ohma można zapisać, w przypadku rozpatrywania dyssypacji energii, jako:

$$u(t) = R(t)i(t) \quad (1)$$

Badanie właściwości probabilistycznych $u(t)$ jest w tym przypadku trudnym zadaniem. Pewne uwagi na ten temat można znaleźć na przykład w [4].

Przykładowo, dla liniowej stacjonarnej rezystancji i stochastycznego wymuszenia prądowego $i(t)$ równanie (1) można zapisać:

$$u(t) = Ri(t) \quad (2)$$

W powyższym przypadku chwilowe, losowe wartości wymuszenia mnożone są przez stałą wartość współczynnika proporcjonalności R .

Również mierzone wartości realizacji i estymacji są tak przekształcane.

Stąd dla liniowej rezystancji R stochastyczna odpowiedź $u(t)$ charakteryzują funkcje momentów zwykłych rzędu k oraz momentów centralnych rzędu k odpowiednio [4]:

$$m_u^k(t_1, t_2, \dots, t_n) = R^k m_{i_1, i_2, \dots, i_n}^k(t_1, t_2, \dots, t_n) \quad (3)$$

$$\mu_u^k(t_1, t_2, \dots, t_n) = R^k \mu_{i_1, i_2, \dots, i_n}^k(t_1, t_2, \dots, t_n) = \quad (4)$$

$$E\{[u(t_1) - m_1(t_1)]^1 [u(t_2) - m_2(t_2)]^2 \dots [u(t_n) - m_n(t_n)]^k\}$$

Dla scentrowanego (z zerową wartością oczekiwaną) losowego wymuszenia $i_0(t)$ o charakterze stacjonarnego procesu Gaussa z funkcją autokorelacji $R_i(\tau)$ i odchyleniem standardowym $\sigma_i(t)$ otrzymuje się wartość funkcji korelacji $R_u(\tau)$ losowego napięcia $u(t)$ na rezystorze:

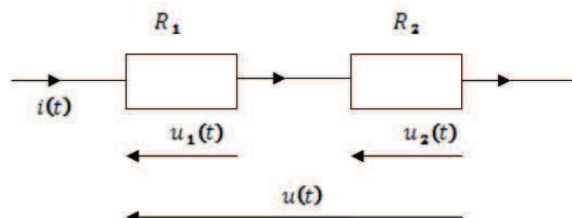
$$R_u(\tau) = R^2 R_i(\tau) \quad (5)$$

oraz wariancję:

$$\sigma_u^2 = D_u^2(t) = R^2 D_i^2(t) \quad (6)$$

Dla dwóch połączonych szeregowo rezystorów o rezystancjach R_1 i R_2 (rys. 1.) otrzymuje się (II prawo Kirchhoffa):

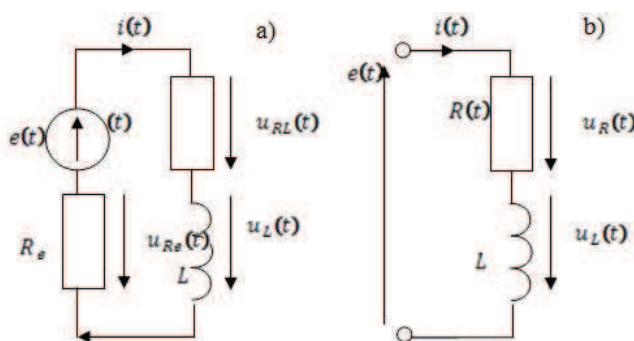
$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = (R_1 + R_2)i(t) \quad (7)$$



Rys. 1. Szeregowe połączenie rezystorów

Wszystkie sygnały (przebiegi) w równaniu (7) są procesami stochastycznymi o parametrach obliczanych według zależności (3-7).

Losowość parametrów tylko jednego elementu obwodu przekłada się na losowość wszystkich procesów elektromagnetycznych tego obwodu. Wynika to między innymi ze stochastycznych twierdzeń Thevenina i Nortona, skonstruowanych dla odpowiednich założeń.



Rys. 2. a) Stochastyczny obwód elektryczny z zastępczą cewką rzeczywistą z losową dyssypacją energii, b) obwód po przekształceniu

Niech deterministyczna gałąź $RL(t)L$ zasilana jest z deterministycznego źródła rzeczywistego (w sensie dyssypacji energii) o podstawowym schemacie zastępczym, wyznaczonym z twierdzenia Thevenina (rys. 2a.). Momenty rozkładu dla tego źródła, według zależności (3) i (4) są znane.

Korzystając z właściwości sumy procesu stochastycznego i stałej można określić elementy schematu zastępczego obwodu (rys. 2b.):

$$R(t) = R_e + R_L(t) \quad (8)$$

przy czym:

$$m_R(t) = m_{RL}(t) + R_e \quad (9)$$

$$R_R(t_1, t_2) = R_{RL}(t_1, t_2) \quad (10)$$

Dla dowolnego ciągłego procesu stochastycznego $R_{RL}(t)$, podobnie jak dla nielosowych równań różniczkowych (r.r.), średnio-kwadratowe losowe rozwiązanie $i(t)$ otrzymuje się ze stochastycznego niejednorodnego r.r. postaci [4]:

$$i'(t) + \alpha(t)i(t) = y(t) \quad i(t=0) = I_0 \quad (11)$$

W równaniu (11) losowy jest zarówno współczynnik $\alpha(t)$, jak i prąd $i(t)$. Współczynnik $\alpha(t)$ dany zależnością:

$$\alpha(t) = \frac{R_R(t)}{L} \quad (12)$$

jest tak zwaną stochastyczną stałą tłumienia. Oznacza to, że sposób wyznaczenia parametrów probabilistycznych tej stałej związany jest z ich estymacją. W praktyce pomiarowe określenie wartości oczekiwanej $m_\alpha(t)$ opiera się, jak dotąd, na obliczeniu wartości średniej.

Charakterystyki probabilistyczne $\alpha(t)$ i $y(t)$ konstruuje się z charakterystyk $R_R(t)$ i $u_R(t)$ jak dla (2). Otrzymuje się wówczas wartości oczekiwane $m_\alpha(t)$ i $m_y(t)$ oraz funkcje korelacyjne $R_\alpha(\tau)$, $R_y(\tau)$ i $R_{\alpha y}(\tau)$.

Stochastyczny proces $i(t)$ określony jest wyrażeniem [4]:

$$i(t) = I_0 \exp\left[-\int_0^t \alpha(v)dv\right] + \int_0^t y(u) \exp\left[-\int_u^t \alpha(s)ds\right] du \quad (13)$$

Zgodnie z (13) w ogólnym przypadku potrzebna jest znajomość postaci funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f_i(\alpha)$.

Jeśli $i(t) = i_0(t) = I_0$ i ma charakter normalny w odniesieniu do skorelowanych procesów stacjonarnych $\alpha(t)$ i $y(t)$, zależność (13) przyjmuje postać [5]:

$$i(t) = \int_0^t y(u) \exp\left[-\int_u^t \alpha(s)ds\right] du \quad (14)$$

4. LOSOWA DYSSYPACJA ENERGII W ŹRÓDLE

Dla wyżej określonego prądu losowego $i(t)$ możliwe jest określanie stochastycznych charakterystyk mocy chwilowej $p_{Re}(t)$ dyssypowanej w źródle:

$$p_{Re}(t) = u_{Re}(t)i(t) \quad (15)$$

gdzie $u_{Re}(t)$, $i(t)$ są, dla danej ustalonej chwili, zmiennymi losowymi.

Zależność (15) sprawia podobne problemy obliczeniowe, jak zależność (1). Można ją więc obliczać tylko przy pewnych „mocnych” założeniach, gdyż – ogólnie – iloczyn dowolnych n -wymiarowych procesów stochastycznych wymaga znajomości $2n$ -wymiarowej funkcji gęstości prawdopodobieństwa [6].

W stochastycznych liniowych obwodach elektrycznych zależność między chwilowymi wartościami prądów i napięć określa prawo Ohma, które można przedstawiać w postaci operatorowej tylko w określonych przypadkach (przy założeniu istnienia transformaty Laplace'a z prawdopodobieństwem 1).

Dlatego dla rezystora o rezystancji R_e moc chwilową określa równanie:

$$p_{Re}(t) = R_e i^2(t) = R_e w_e(t) \quad (16)$$

Proces stochastyczny $w_e(t)$ jako słabo stacjonarny [8] można opisać zależnością:

$$w_e(t) = [i(t) - m_i(t)]^2 + 2m_i(t)[i(t) - m_i(t)] + m_i^2(t) \quad (17)$$

W równaniu (17) proces $[i(t) - m_i(t)]$ ma wartość oczekiwaną 0.

Niestety, nawet dla gaussowskiego charakteru $u_{Re}(t)$ i $i(t)$ proces $w_e(t)$ jest niegaussowski. Jeżeli jednak dla powyższego przykładu proces $i(t)$ jest stacjonarnym procesem Gaussa z wartością oczekiwaną $m_i(t) = 0$ oraz funkcją korelacyjną $R_i(\tau)$, to można określić funkcję korelacji procesu $w_e(t)$ jako [7, 8]:

$$R_{pRe}(\tau) = 2R_e^2 [R_i(\tau)]^2 \quad (18)$$

oraz:

$$m_{pRe}(t) = R_e \sigma_i^2 = \text{const} \quad (19)$$

Funkcja korelacji mocy chwilowej dyssypowanej w źródle wynosi:

$$R_{pRe}(t_1, t_2) = E\{p_{Re}(t_1)p_{Re}(t_2)\} = R_e^2 E\{[i(t_1)]^2 [i(t_2)]^2\} \quad (20)$$

Ponieważ dla dowolnych chwil t_x oraz t_y i procesów gaussowskich obowiązuje [9]:

$$E\{[i(t_x)]^2 [i(t_y)]^2\} \quad (21)$$

to:

$$R_{pRe}(t_1, t_2) = R_e^2 [m_i(t_1)]^2 [m_i(t_2)]^2 + 2R_e^2 m_{ii}(t_1, t_2) \quad (22)$$

czyli:

$$R_{pRe}(t_1, t_2) = R_e^2 [\sigma_i^4 + 2R_e^2(\tau)] \quad (23)$$

Dla podanych wcześniej założeń (m.in. stacjonarność oraz scentralizowanie $i(t)$) otrzymuje się ($t_1 = t_2$):

$$\sigma_{pRe}^2 = 2R_e^2 \sigma_i^4 \quad (24)$$

Podobnie więc, jak dla przypadku losowego źródła napięcia [4] losowe obciążenie źródła deterministycznego skutkuje potęgową zależnością wariancji strat dyssypacyjnych w tym źródle od wariancji wymuszenia w dowolnym miejscu obwodu.

5. PODSUMOWANIE

Wybór podejścia do rozwiązywania zagadnień analizy losowych obwodów elektrycznych zależy w największym stopniu od celu analizy. Często jednak na przeszkodzie przyjęciu właściwej metody badań staje nieznaną korzyści, jakie daje analiza stochastyczna.

Przedstawiony przykład analizy wskazuje, że pominięcie w rozważaniach nietypowego zachowania się tylko jednego elementu obwodu może prowadzić do istotnych błędów w wielu odległych od źródła zakłóceń częściach tego obwodu.

Pokazany przykład dowodzi, że można mierzyć charakterystyki probabilistyczne zakłóceń przez pomiar mocy dyssypowanej na elementach nie będących źródłem tych zakłóceń z lepszą rozdzielczością.

LITERATURA

- [1] Spiralski L., i in., Zakłócenia w aparaturze elektronicznej, Radioelektronik Sp z o.o., Warszawa, 1995.
- [2] Szklarski L., Jaracz K., Viteček A., Optymalizacja układów napędowych, PWN Warszawa, 1989.
- [3] Szklarski L., Jaracz K., Wybrane zagadnienia dynamiki napędów elektrycznych, PWN Warszawa, 1986.
- [4] Skowronek K., Obwody elektryczne w ujęciu stochastycznym, Wyd. PP, 2011.
- [5] Bobrowski D., Wstęp do losowych równań różniczkowych zwyczajnych, PWN Warszawa, 1987.
- [6] Pugaczew W.S., Teoria funkcji przypadkowych i jej zastosowanie do zagadnień sterowania automatycznego, Wyd. MON Warszawa, 1960.
- [7] Sobczyk K., Stochastyczne równania różniczkowe, WNT Warszawa, 1996.
- [8] Sobczyk K., Spencer Jr B.F., Stochastyczne modele zmęczenia materiałów, WNT Warszawa, 1996.
- [9] Papoulis A., Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne, WNT Warszawa, 1972.

ENERGY DISSIPATION IN THE REAL VOLTAGE SOURCE WITH RANDOM LOAD

This paper examines the issue of energy dissipation in a circuit modeled in part on the example of a random resistor. After a review of existing sources of randomness in the actual systems and the systems shown compounded dependence of all dissipative losses in electrical circuits containing at least one source of randomness. This may facilitate the collection of information from other than a random element, part of the circuit.