

Marek FLIGIEL¹

KRYTERIA KSZTAŁTOWANIA NAJWYGODNIEJSZEJ KONSTRUKCJI NOŚNEJ W PODSTAWOWYM STANIE OBCIĄŻENIA ROZCIĄGANIA I ZGINANIA

Streszczenie. W artykule rozpatruje się kryteria optymalnego kształtowania najwygodniejszej konstrukcji nośnej dla przypadku prostego rozciągania i zginania. Jako wielkości kryterialne przyjmuje się minimalną wartość potencjalnej energii deformacji i możliwie równą względną objętościową wartość potencjalnej energii deformacji w całej objętości elementu konstrukcyjnego oraz długość działania sił wewnętrznych konstrukcji nośnej. Jako kryterium ilościowe długości działania sił wewnętrznych konstrukcji nośnej przyjęto całkę z funkcji bezwzględnych naprężeń określoną dla stałej objętości konstrukcji.

Słowa kluczowe: wielkości kryterialne, najwygodniejsza konstrukcja nośna, długość działania sił

CRITERIA OF THE FORMATION OF THE MOST CONVENIENT LOAD-BEARING STRUCTURE IN THE BASIC LOAD STATE: TENSION AND BENDING

Summary. In this study, the criteria of an optimal formation of the most convenient load-bearing structure for the case of simple tension and bending are considered. As the criteria quantities, the following are accepted: the minimum value of the potential energy of deformation and a possibly equal relative volumetric value of the potential energy of deformation in the entire volume of a structural element and the activity duration of the internal forces of the load-bearing structure. The integral of the function of absolute stresses, which is determined for the constant volume of the structure, was accepted as a quantitative criterion of the activity duration of the internal forces of the load-bearing structure.

Keywords: criteria quantities, the most convenient load-bearing structure, duration of the activity of forces

1. WPROWADZENIE

Jednym z kryteriów określających jakość konstrukcji jest jej materiałochłonność i sztywność. Ma to szczególne znaczenie w konstrukcjach, w których relacja masa–sztywność ma zasadniczy wpływ na wytrzymałość i dynamikę konstrukcji, np. w robototechnice,

¹ Department of Mechanical Engineering Koszalin University of Technology, Koszalin, Poland,
e-mail: marek.fligiel@tu.koszalin.pl

w konstrukcjach latających, w układach drgających itp. Najwygodniejszą konstrukcją nośną jest najbardziej sztywna konstrukcja wykonana z zadanej ilości materiału o określonych własnościach funkcjonalnych oraz przekazująca obciążenia zewnętrzne czynne i bierne po możliwie krótkich wewnętrznych drogach ich płynięcia [1-3]. Pojęcie najwygodniejszej konstrukcji nośnej odnosi się zarówno do pojedynczego elementu konstrukcyjnego, jak i do całej złożonej konstrukcji nośnej.

W pracy rozpatruje się kryteria optymalnego kształtowania najwygodniejszej konstrukcji nośnej dla przypadków obciążeń statycznych w zakresie stosowalności prawa Hooke'a dla rozciągania i zginania. Jako kryterium największej sztywności przyjęto minimalną wartość potencjalnej energii deformacji i możliwie równą względną objętościową wartość potencjalnej energii deformacji w całej objętości elementu konstrukcyjnego [4]. Następnym kryterium jest długość działania sił wewnętrznych konstrukcji nośnej. Długość działania sił wewnętrznych konstrukcji nośnej Q jest rozumiana jako płynięcie sił wewnętrznych po możliwie krótkich wewnętrznych drogach. Jako kryterium ilościowe długości działania sił wewnętrznych konstrukcji nośnej przyjmujemy całkę z funkcji bezwzględnych naprężeń p , określoną dla objętości $V_0 = \text{const}$ całej konstrukcji [2]:

$$Q = \int_{V_0} |p| dV = \min \quad (1)$$

Jeżeli stan naprężeń wewnętrznych jest stanem złożonym, to całka (1) przyjmie postać:

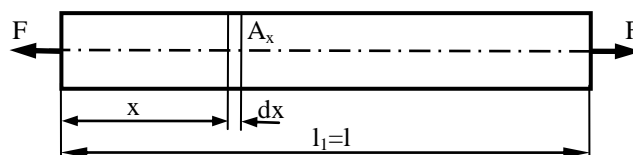
$$Q = \int_{V_0} \sigma_{red} dV = \min \quad (2)$$

gdzie: σ_{red} jest naprężeniem zredukowanym wyznaczonym na podstawie jednej z hipotez wyteżeniowych.

2. NAJWYGODNIEJSZA KONSTRUKCJA PRZY ROZCIĄGANIU LUB ŚCISKANIU

2.1. Pręt o stałym przekroju poprzecznym

Rozpatrzmy jednowymiarowy element konstrukcyjny pokazany na rysunku 1, jakim jest pręt o długości $l_1 = l = \text{const}$, polu przekroju $A_x = A_1 = \text{const}$, objętości $V_{01} = A_1 \cdot l_1 = \text{const}$, rozciągany statyczną siłą $F = \text{const}$.



$$Q_1 = Fl = \text{const}$$

$$U_1 = \frac{F^2 l}{2EA}$$

$$u_1 = \frac{F^2}{2EA^2}$$

Rys. 1. Długość działania sił wewnętrznych Q_1 , całkowita energia odkształcenia sprężystego U_1 , energia względna w jednostce objętości u_1

Fig. 1. Duration of the activity of internal forces Q_1 , total energy of elastic deformation U_1 , relative energy in volume unit u_1

Długość działania sił wewnętrznych Q_1 dla siły $N_x=F$ jest określona na podstawie całki (1):

$$Q_1 = \int_{V_0} \sigma_x dV = \int_0^l \left| \frac{N_x}{A_1} \right| A_1 dx \quad (3)$$

skąd po scałkowaniu otrzymamy:

$$Q_1 = Fl \quad (4)$$

Całkowita energia odkształcenia sprężystego U_1 i względna u_1 w jednostce objętości pręta odpowiednio wynosi:

$$U_1 = \frac{F^2 l}{2EA_1}, \quad u_1 = \frac{F^2}{2EA_1^2}. \quad (5)$$

Załóżmy, że pręt jest wykonany z materiału o module Younga E i jest rozciągany siłą $F=10$ [kN] oraz ma przekrój prostokątny o wymiarach: szerokość $b_1=0,06$ [m], wysokość $h_1=0,12$ [m], długość $l_1=1,2$ [m].

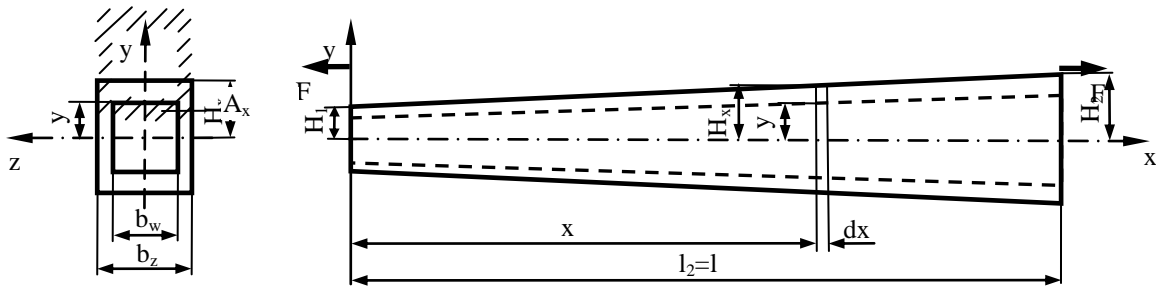
Dla powyższych danych mamy:

- objętość: $V_{01}=8,64 \cdot 10^{-3}$ [m³],
- długość działania sił: $Q_1=12\ 000$ [Nm],
- całkowitą energię odkształcenia sprężystego: $U_1=8,3 \cdot 10^3/E$ [MJ],
- energię względną w jednostce objętości: $u_1=964,5 \cdot 10^3/E$ [MJ/m³],
- wydłużenie sprężyste: $\Delta l_1=1,6 \cdot 10^6/E$ [m],
- naprężenia normalne: $\sigma_1=1,39$ [MPa].

Z zależności (4) i (5) wynika, że względna energia u_1 w całej objętości jest równomiernie rozłożona oraz długość działania sił wewnętrznych Q_1 jest funkcją iloczynu siły rozciągającej (ściskającej) i długości pręta. Pręt rozciągany (ściskany) o stałym przekroju poprzecznym jest elementem konstrukcyjnym najbardziej sztywnym o równomiernie rozłożonej względnej objętościowo potencjalnej energii deformacji.

2.2. Pręt o zmiennym liniowo przekroju

Rozpatrzmy długość działania sił i energię sprężystą w pręcie o zmiennym liniowym przekroju, pokazanym na rysunku 2. Pręt o długości $l_2=l=\text{const}$ ma kształt stożka ściętego o przekroju prostokątnym z wybraniem w środku. Prostokąt w dowolnym przekroju x ma następujące wymiary: zewnętrzną szerokość $b_z=\text{const}$ i wewnętrzną $b_w=\text{const}$, zewnętrzną wysokość $2H_x(x)$, a wewnętrzną $2 \cdot y(x)$. Poszukiwana jest funkcja zmiany wysokości $y=y(x)$, przy której pręt będzie najwygodniejszą konstrukcją, tj. spełniającą kryterium najmniejszej długości działania sił wewnętrznych i największej sztywności. Wymiary lewej podstawy są następujące: zewnętrzne $b_z \times 2H_1=\text{const}$ i wewnętrzne $b_w \times 2 \cdot y(0)$; prawej: zewnętrzne $b_z \times 2H_2=\text{const}$ i wewnętrzne $b_w \times 2 \cdot y(l_2)$.



Rys. 2. Pręt rozciągany o liniowo zmiennej wysokości przekroju poprzecznego
Fig. 2. Bar being stretched with a linearly changeable height of the cross section

Infinitymalna objętość pręta jest równa $dV=A_x \cdot dx$. Z geometrii przekroju pręta o współrzędnej x wynika, że pole przekroju poprzecznego jest określone zależnością:

$$A_x = 2 \frac{[(H_2 - H_1)x + H_1]l}{l} [b_z - (b_z - b_w)]l y \quad (6)$$

skąd:

$$dV = 2 \frac{[(H_2 - H_1)x + H_1]l}{l} [b_z - (b_z - b_w)]l y dx \quad (7)$$

Naprężenia normalne w przekroju o współrzędnej x wynoszą:

$$\sigma_x = \frac{Fl}{2 \{ [(H_2 - H_1)x + H_1]l [b_z - (b_z - b_w)]l y \}} \quad (8)$$

a długość działania sił wewnętrznych jest równa:

$$Q_2 = \int_{V_0} \sigma_x dV = \int_0^l \frac{Fl \{ [(H_2 - H_1)x + H_1]l [b_z - (b_z - b_w)]l y \}}{2l \{ [(H_2 - H_1)x + H_1]l [b_z - (b_z - b_w)]l y \}} dx = Fl \quad (9)$$

Dla danej siły rozciągającej (ściskającej) F długość działania sił wewnętrznych Q_2 nie zależy od pola przekroju poprzecznego A_x i funkcji wysokości $y(x)$, tj. od wysokości prostokątnego przekroju poprzecznego pręta, zależy natomiast od długości pręta.

W celu uproszczenia przekształceń do dalszej analizy założymy, że pręt jest rozciągany taką samą siłą $F=10$ [kN], ma taką samą długość $l_2=l=1,2$ [m] i objętość $V_0=V_{01}=V_{02}=8,64 \cdot 10^{-3}$ [m³] oraz jest wykonany z tego samego materiału co w poprzednim przykładzie. Pozostałe wymiary są następujące: szerokość $b_z=0,08$ [m], $b_w=0,04$ [m] wysokość $H_1=0,08$ [m] i $H_2=0,16$ [m]. Podstawiając powyższe dane, dostaniemy:

$$\sigma_x = \frac{12000}{0,01536 + 0,0128x - 0,096y} \text{ [Pa]} \quad (10)$$

$$dV = \frac{0,01536 + 0,0128x - 0,096y}{1,2} dx = (0,128 + 0,0106)x - 0,08y dx \quad (11)$$

Potencjalna energia deformacji U_2 i względna u_2 w jednostce objętości zawarta w pręcie jest odpowiednio równa:

$$U_2 = \frac{1}{2E} \int_{V_0} \sigma_x^2 dV = \frac{1}{2E} \int_0^{1,2} \frac{14410^6}{(0,01536 + 0,0128x - 0,096y)} dx \text{ [J]} \quad (12)$$

$$u_2 = \frac{\sigma_x^2}{2E} = \frac{1}{2E} \frac{14410^6}{(0,01536+0,0128x-0,096y)^2} \text{ [J/m}^3\text{]} \quad (13)$$

Z zależności (12) wynika, że rozkład potencjalnej energii deformacji w objętości jest funkcją wysokości $y(x)$. Ponieważ długość działania sił wewnętrznych Q_2 nie zależy od $y=y(x)$, więc do znalezienia funkcji $y=y(x)$ dającej ekstremum energii odkształcenia sprężystego z ograniczeniem równościowym na objętość pręta $V_0=V_{01}=V_{02}=8,64 \cdot 10^{-3} \text{ [m}^3\text{]}$ wykorzystamy funkcjonal Lagrange'a. Ograniczenie zapiszemy w postaci równościowej, skąd otrzymamy funkcję:

$$\Phi(x) = \int_0^{1,2} (0,0128+0,0106)x - 0,08y dx - V_0 = 0 \quad (14)$$

Zakładając funkcjonal Lagrange'a dla wyznaczenia ekstremum warunkowego potencjalnej energii deformacji z ograniczeniem (14), dostaniemy:

$$L = \frac{1}{2E} \int_0^{1,2} \frac{12010^6}{(0,01536+0,0128x-0,096y)^2} dx + \lambda \int_0^{1,2} (0,0128+0,0106)x - 0,08y dx - V_0 \quad (15)$$

Z ekstremum warunkowego funkcjonu (15) mamy:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0,01536+0,0128x-0,096y-8,6410^{-3} = 0 \quad (16)$$

skąd po przekształceniach otrzymamy funkcję:

$$y = y(x) = 0,07+0,133x \quad (17)$$

Dla powyższych danych i funkcji (17) mamy:

- objętość: $V_{02}=8,64 \cdot 10^{-3} \text{ [m}^3\text{]}$,
- długość działania sił: $Q_2=12000 \text{ [Nm]}$,
- całkowitą energię odkształcenia sprężystego: $U_2=8,3 \cdot 10^3/E \text{ [MJ]}$,
- energię względną w jednostce objętości: $u_2=964,5 \cdot 10^3 \text{ [MJ/m}^3\text{]}$,
- wydłużenie sprężyste: $\Delta l_2=1,6 \cdot 10^6/E \text{ [m]}$,
- naprężenia normalne: $\sigma_2=1,39 \text{ [MPa]}$.

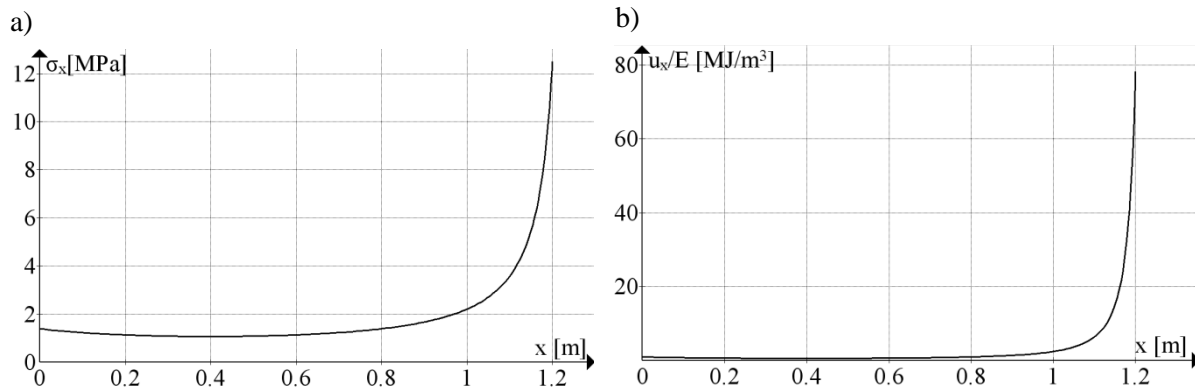
Z powyższych obliczeń wynika, że wartości kryterialne najwygodniejszej konstrukcji dla przekroju prostokątnego liniowo zmiennego są takie same jak dla pręta o stałym przekroju.

2.3. Pręt o nieliniowości geometrycznej przekroju

Jako następny przykład przyjmijmy pręt jak na rysunku 2, o zmiennej parabolicznie wysokości $y=0,07+ax^2$. Dla objętości pręta $V_3=V_0=8,64 \cdot 10^{-3} \text{ [m}^3\text{]}$ współczynnik kierunkowy $a=0,16(6)$, skąd funkcja $y=0,07+0,16(6)x^2$.

Dla danych i funkcji $y=0,07+0,16(6)x^2$ mamy:

- objętość: $V_0=8,64 \cdot 10^{-3} \text{ [m}^3\text{]}$,
- długość działania sił: $Q_3=12000 \text{ [Nm]}$.



Rys. 3. Pręt o nieliniowości geometrycznej: a) zmiana naprężeń wzdłuż pręta, b) zmiana względnej objętościowej potencjalnej energii deformacji wzdłuż pręta

Fig. 3. Bar with geometrical non-linearity: a) change of stresses along the bar, b) change of relative volumetric potential energy of deformation along the bar

Całkowitą energię odkształcenia sprężystego wyznaczamy z zależności:

$$U_3 = \frac{1}{2E} \int_0^{1.2} \sigma_x^2 dV = \frac{1}{2E} \int_0^{1.2} \frac{12000}{(8,64 \cdot 10^{-3} + 0,0128x - 0,016x^2)^2} dx \text{ [J]} \quad (18)$$

Po podstawieniu danych do (18) i scałkowaniu całkowita energia odkształcenia sprężystego wynosi $U_3 = 1,7 \cdot 10^6 / E$ [MJ] i jest większa od energii prętów rozpatrywanych w rozdziałach 2.1 i 2.2.

Naprężenia σ_x i jednostkowa potencjalna energia deformacji u_x są określone zależnościami:

$$\sigma_x = \frac{12000}{8,64 \cdot 10^{-3} + 0,0128x - 0,016x^2} \text{ [Pa]} \quad (19)$$

$$u_x = \frac{\sigma_x^2}{2E} = \frac{1}{2E} \frac{14410^6}{(8,64 \cdot 10^{-3} + 0,0128x - 0,016x^2)^2} \text{ [J/m}^3\text{]} \quad (20)$$

Na wykresach rysunku 3a i 3b pokazano zmianę naprężeń $\sigma_x(x)$ wzdłuż pręta i względnej objętościowej potencjalnej energii deformacji $u_x(x)$. Rozkład względnej objętościowej potencjalnej energii deformacji w pręcie o nieliniowym przekroju poprzecznym nie jest stały, zmienia się wzdłuż długości pręta. Pręt nie spełnia kryterium równej względnej potencjalnej energii deformacji w objętości, a więc nie spełnia jednego z kryteriów najwygodniejszej konstrukcji nośnej.

Wydłużenie bezwzględne wynosi:

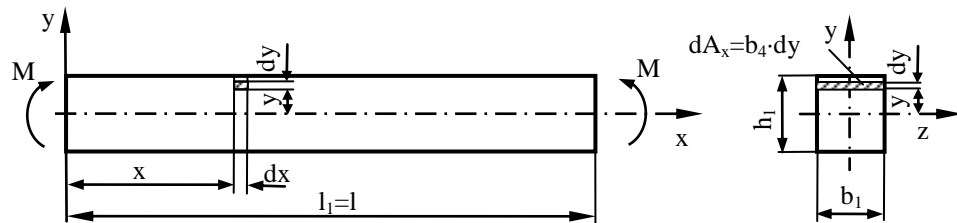
$$\Delta l_3 = \frac{1}{E} \int_0^{1.2} \frac{12000}{8,64 \cdot 10^{-3} + 0,0128x - 0,016x^2} dx \text{ [Pa]} \quad (21)$$

Po podstawieniu danych i scałkowaniu otrzymamy $\Delta l_3 = 4,17 \cdot 10^6 / E$ [m]. Wydłużenie całkowite również jest większe od wydłużenia prętów rozpatrywanych w rozdziałach 2.1 i 2.2.

3. NAJWYGODNIEJSZA KONSTRUKCJA PRZY ZGINANIU

3.1. Belka o niezmiennym przekroju prostokątnym zginana stałym momentem

Rozpatrzmy element konstrukcyjny pokazany na rysunku 4, jakim jest belka o przekroju prostokątnym, długości $l_1=l=\text{const}$, polu przekroju $A_x=A_1=b_1 \cdot h_1$, objętości $V_0=V_{01}=A_1 \cdot l_1=b_1 \cdot h_1 \cdot l=\text{const}$, zginana stałym momentem $M=\text{const}$.



Rys. 4. Belka o niezmiennym prostokątnym przekroju zginana stałym momentem

Fig. 4. Beam with an invariable rectangular cross section of bending with constant moment

Dla przekroju prostokątnego i momentu gnącego $M_g=M$ pokazanego na rysunku 4 długość działania sił wewnętrznych Q_1 jest określona na podstawie całki (1):

$$Q_1 = \int_{V_0} \sigma_x dV = 2 \int_V \left| \frac{M_g y}{J_z} \right| dV. \quad (22)$$

Dwójka przed znakiem całki wynika ze znaków naprężeń, górne linie sił są ściskane, dolne rozciągane. Całka (22) dla takiego rozkładu naprężeń i symetrii przekroju względem głównych centralnych osi bezwładności jest równa zero, stąd obliczenia po wartości bezwzględnej dla jednej strony ściskanego lub rozciąganego przekroju.

Dla górnej i dolnej warstwy linii sił nieskończenie mała objętość pręta jest równa $dV=dA_x \cdot dx=b_1 \cdot dy \cdot dx$, a moment bezwładności przekroju $J_z=b_1 \cdot h_1^3/12$, stąd:

$$Q_1 = \frac{24M}{h_1^3} \int_0^{h_1/2} dy \int_0^{l_1} dx \quad (23)$$

$$Q_1 = \frac{3M l_1}{h_1} = \frac{3M b_1 l}{V_0} \quad (24)$$

Na podstawie (24) możemy stwierdzić, że długość działania sił wewnętrznych Q_1 dla momentu gnącego $M_g=M=\text{const}$ zależy od wysokości h_1 przekroju prostokątnego i długości belki l lub, przy spełnieniu warunku $V_1=V_0=b_1 \cdot h_1 \cdot l=\text{const}$, od szerokości b_1 i długości belki l .

Względna objętościowa energia odkształcenia sprężystego jest równa:

$$u_1 = \frac{\sigma_x^2}{2E} = \frac{77M^2 y^2}{Eb_1^2 h_1^6} = \frac{77M^2 l^2 y^2}{EV_0^2 h_1^4} \quad (25)$$

Na wartość energii u_1 w największym stopniu wpływa wysokość przekroju. Akumulacja jednostkowej objętościowej energii wzdłuż wysokości jest funkcją hiperboliczną. Również dla stałej objętości V_0 i dla $y=\text{const}$ akumulacja jednostkowej energii najbardziej się zmienia wraz ze zmianą wysokości przekroju.

Całkowitą energię odkształcenia sprężystego wyznaczamy z zależności:

$$U_1 = \frac{1}{2EJ_z} \int_0^l M_s^2 dx = \frac{6M^2 l}{Eb_1 h_1^3} = \frac{6M^2 l^2}{EV_0 h_1^2} \quad (26)$$

Wartość energii U_1 zmienia się hiperbolicznie wraz ze wzrostem wysokości przekroju.

Średnia wartość względnej objętościowej potencjalnej energii deformacji jest równa:

$$U_{sr} = \frac{6M^2 l^2}{EV_0^2 h_1^2} \quad (27)$$

i zmienia się również według hiperboli drugiego stopnia.

Zależność, dla $V_0 = \text{const}$, między całkowitą potencjalną energią deformacji U_1 i długością działania sił Q_1 jest następująca:

$$U_1 = \frac{2Ml^2}{Eh_1} \frac{Q_1}{V_0} \quad (28)$$

a pomiędzy Q_1 i U_1 :

$$Q_1 = U_1 V_0 \frac{Eh_1}{2Ml^2}. \quad (29)$$

Z zależności (29) wynika, że wraz ze zwiększaniem się długości l pręta długość działania sił Q_1 maleje przy pozostałych niezmiennych wielkościach, natomiast zmniejszając wysokość h_1 , również możemy osiągnąć zmniejszenie wartości Q_1 . Dla energii odkształcenia sprężystego U_1 , opisaną zależnością (28), powyższe zmiany powodują wzrost wartości energii. Przy konstruowaniu belki o stałej objętości V_0 bardziej celowe jest jej wydłużenie niż zmniejszanie wysokości, ponieważ przyrosty całkowitej energii odkształcenia sprężystego U_1 i długość działania sił Q_1 będą szybciej się zmieniać, a tym samym taka belka klasyfikowana według kryteriów podanych w rozdziale 1 będzie zawsze wygodniejszą konstrukcją. Zmiana wysokości belki ma odwrotny wpływ na energię U_1 . Powyższe zmiany h_1 i l prowadzą do przeciwstawnych zmian kryteriów najwygodniejszej konstrukcji.

W celu uproszczenia przekształceń przyjmujemy następujące dane: $b_1 = 0,08$ [m], $h_1 = 0,09$ [m], $l = 1,2$ [m], $V_0 = 8,64 \cdot 10^{-3}$ [m³].

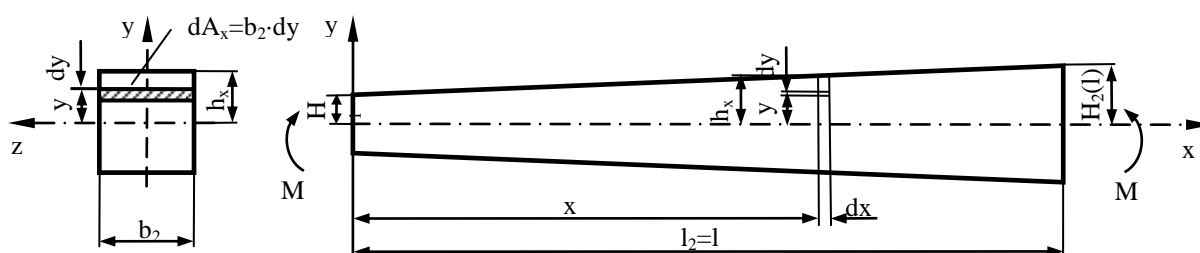
Dla powyższych danych mamy:

- z zależności (24), długość działania sił wewnętrznych: $Q_1 = 40 M$ [Nm],
- z zależności (26), potencjalną energią deformacji: $U_1 = 123,457 \cdot M^2 / E$ [kJ],
- z zależności (25), względną objętościową energią deformacji: $u_1 = 226,4 \cdot 10^2 \cdot M^2 \cdot y^2 / E$ [MJ/m³].

3.2. Belka o zmiennym przekroju prostokątnym zginana stałym momentem

W procesie konstruowania w większości przypadków długość belki wynika z własności funkcjonalnych konstrukcji, dlatego jako zmienną można przyjąć wysokość belki lub jej szerokość. Jako zmienną przyjmujemy wysokość belki.

Rozpatrzmy belkę pokazaną na rysunku 5. Belka ma przekrój prostokątny o zmiennej wysokości h_x , długości $l_2 = l = \text{const}$, infinitezymalnym polu przekroju $dA_x = b_2 \cdot dy$ i objętości $dV = A_x \cdot dx = b_2 \cdot dy \cdot dx$ oraz całkowitej objętości $V_0 = \text{const}$, jest zginana stałym momentem $M = \text{const}$.



Rys. 5. Belka o zmiennym przekroju prostokątnym zginana stałym momentem

Fig. 5. Beam with a variable rectangular cross section of bending with constant moment

Dla przekroju prostokątnego o zmiennej wysokości h_x i momentu gnącego $M_g = M = \text{const}$ pokazanego na rysunku 5 długość działania sił wewnętrznych Q_2 wyznaczmy z zależności:

$$Q_2 = \int_{V_0} \sigma_x |dV = 2 \int_{V_0} \frac{M_g y}{J_z} |dV = \frac{24M}{b_2} \int_{V_0} \frac{y}{(2h_x)^3} |dV \quad (30)$$

skąd po wstawieniu infinitesimalnych wielkości otrzymamy:

$$Q_2 = 3M \int_0^l \int_0^{h_x} \frac{y}{h_x^3} dy \quad (31)$$

Dla danego przekroju o współrzędnej x wysokość h_x jest stała i równa $h_x = H_1 + a \cdot x$. Współczynnik kierunkowy a funkcji połowy wysokości całkowitego przekroju jest współczynnikiem poszukiwanym, przy którym wartość długości działania sił wewnętrznych Q_2 i potencjalna energia deformacji U_2 przy stałej objętości V_0 będą ekstremalne. Wstawiając $h_x = H_1 + a \cdot x$ do całki (31), otrzymamy:

$$Q_2 = 3M \int_0^l \int_0^{H_1+ax} \frac{y}{h_x^3} dy \quad (32)$$

Po scałkowaniu i przekształceniach otrzymamy zależność na określenie długości działania sił wewnętrznych:

$$Q_2 = \frac{3M}{2a} \ln \frac{H_1 + al}{H_1} \quad (33)$$

Potencjalną energię deformacji wyznaczmy z całki:

$$U_2 = \frac{M^2}{2E} \int_0^l \frac{1}{J_z(x)} dx = \frac{6M^2}{E} \int_0^l \frac{1}{b_2 (2h_x)^3} dx \quad (34)$$

Po podstawieniu h_x i scałkowaniu wyrażenia (34) dostaniemy zależność:

$$U_2 = \frac{3M^2 a}{8Eb_2} \left[\frac{1}{H_1} - \frac{1}{(H_1 + al)^2} \right] \quad (35)$$

Względna objętościowa potencjalna energia deformacji jest określona zależnością:

$$u_1 = \frac{\sigma_x^2}{2E} = \frac{9M^2 y^2}{8Eb_2^2 (H_1 + ax)^6} \quad (36)$$

gdzie naprężenia w dowolnym przekroju są równe $\sigma_x = \frac{3My}{2b_2(H_1 + ax)^3}$.

Objętość jest równa:

$$V_2 = 2b_2 \int_0^l \int_0^{H_1+ax} y \, dy = 2b_2 \left(H_1 l + \frac{al^2}{2} \right) \quad (37)$$

W celu określenia wartości współczynnika a i uproszczenia przekształceń do dalszej analizy założmy następujące dane: objętość $V_0 = V_{02} = 8,64 \cdot 10^{-3} \text{ [m}^3\text{]} = \text{const}$, szerokość $b_2 = 0,08 \text{ [m]}$, wysokość $H_1 = 0,08 \text{ [m]}$ i $l = 1,2 \text{ [m]}$. Podstawiając powyższe dane na podstawie (33-37), dostaniemy:

$$Q_2 = \frac{3M}{2a} \ln(1 + 1,5a) \quad (38)$$

$$U_2 = 4,6875 \frac{M^2 a}{E} \left[156,25 - \frac{l}{(0,08 + 1,2a)^2} \right] \quad (39)$$

$$u_1 = 175,78 \frac{M^2 y^2}{(0,08 + ax)^6 E} \quad (40)$$

$$V_2 = 0,01536 + 0,72a. \quad (41)$$

Funkcja równościowa ograniczenia na objętość $V_0 = \text{const}$ jest równa:

$$\Phi(x) = V_2 - V_0 = 6,7210^3 + 0,72a \quad (42)$$

Zestawiając funkcjonal Lagrange'a, otrzymamy:

$$L = \frac{3M}{2a} \ln(1 + 1,5a) + 4,6875 \frac{M^2 a}{E} \left[156,25 - \frac{l}{(0,08 + 1,2a)^2} \right] + \lambda(6,7210^3 + 0,72a) \quad (43)$$

i określając ekstremum warunkowe, z zależności $\frac{\partial L}{\partial a} = 6,7210^3 + 0,72a = 0$ wyznaczmy poszukiwany współczynnik kierunkowy a , który jest równy $a = -0,05833$. Ujemny współczynnik a oznacza, że belka zwięza się w kierunku dodatniej osi x .

Na podstawie współczynnika $a = -0,05833$ odpowiednio wyznaczamy:

- z zależności (38), długość działania sił wewnętrznych: $Q_2 = 53,47 \text{ M [Nm]}$,
- z zależności (39), potencjalną energię deformacji: $U_2 = 2691,65 \cdot M^2/E \text{ [J]}$,
- z zależności (40), względną objętościową energię deformacji u_1 dla:
 - $x=0$, $u_1(0) = 670,5 \cdot M^2 \cdot y^2/E \text{ [MJ/m}^3\text{]}$,
 - $x=1,2$, $u_1(1,2) = 175,3 \cdot 10^6 \cdot M^2 \cdot y^2/E \text{ [MJ/m}^3\text{]}$;
- z zależności (24), długość działania sił wewnętrznych: $Q_1 = 40 \text{ M [Nm]}$,
- z zależności (26), potencjalną energię deformacji: $U_1 = 123,457 \cdot M^2/E \text{ [kJ]}$,
- z zależności (25), względną objętościową energię deformacji: $u_1 = 226,4 \cdot 10^2 \cdot M^2 \cdot y^2/E \text{ [MJ/m}^3\text{]}$.

Z powyższych danych wynika, że przy stałej objętości V_0 belek wartości kryterialne, długość działania sił wewnętrznych Q i potencjalna energia odkształcenia U dla przekroju liniowo zmiennego są większe niż dla belki o stałym przekroju. Belki o stałym przekroju zginane stałym momentem są najwygodniejszymi elementami konstrukcyjnymi.

4. WNIOSKI

Na podstawie przeprowadzonych analiz prostego rozciągania i zginania prętów prostych można stwierdzić, że:

1. dla rozciąganego (ściskanego) pręta o dowolnym przekroju prostokątnym wartość kryterialna najmniejszej długości działania sił jest stała,
2. element rozciągany (ściskany) o stałym przekroju spełnia dwa kryteria najwygodniejszej konstrukcji,
3. pręt rozciągany o nieliniowości geometrycznej spełnia kryterium najmniejszej długości działania sił, ale nie spełnia kryterium największej sztywności i nie jest elementem ze względów konstrukcyjnych najwygodniejszym,
4. dla zginania prostego belki o stałym przekroju wartości kryterialne są minimalne, a więc taki element ze względów konstrukcyjnych jest najwygodniejszy,
5. zginane belki o zmiennym liniowo przekroju nie spełniają kryteriów najwygodniejszej konstrukcji nośnej.

Bibliografia

1. Fligiel M.: Optymalne kształtowanie struktury elementów konstrukcyjnych typu tarcza. *Acta Mechanica et Automatica*, vol. 3, No. 2, 2009, s. 22-24.
2. Fligiel M.: Formation of the most optimal supporting construction in a two-dimensional state of load. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, vol. 17, No. 3, 2012, University Press, Zielona Góra, Poland, p. 799-810.
3. Bendsøe M.P.: Optimal Material Distribution – Optimal shape design as a material distribution problem – *Struct. Optimization* 1, 1989, p. 193-202.
4. Zalewski W., Kuś S.: Wytrzymałościowe kształtowanie konstrukcji na minimum ciężaru. *Inżynieria i Budownictwo*, nr 9, 1995, s. 479-483.