Z E S Z Y T Y   N A U K O W E   P O L I T E C H N I K I   P O Z N A Ń S K I E J
Nr 72 Organizacja i Zarządzanie 2017

Kazimierz WORWA*

MINIMALIZACJA LICZBY PRZYSTANKÓW AUTOBUSOWYCH W PROBLEMIE ZARZĄDZANIA TRANSPORTEM SZKOLNYM

DOI: 10.21008/j.0239-9415.2017.072.17

W artykule przedstawiono opis i sformułowanie problemu określenia zbioru przystanków autobusowych o minimalnej liczności na potrzeby zarządzania transportem szkolnym. Rozpatrywany problem stanowi jeden z podproblemów składowych szerszego problemu, znanego w literaturze jako *schoool bus routing problem* (SBRP). Wychodząc z założenia, że mała liczba przystanków autobusowych obsługiwanych przez flotę autobusów szkolnych ułatwia efektywne prowadzenie procesu transportowego, w artykule sformułowano problem minimalizacji liczby wykorzystywanych przystanków autobusowych, z zapewnieniem transportu każdemu uprawnionemu do przewozu uczniowi. W artykule przedstawiono także metodę rozwiązania sformułowanego problemu. Aby zilustrować proponowaną metodę rozwiązania rozpatrywanego problemu optymalizacji, przedstawiono prosty przykład liczbowy.

Słowa kluczowe: marszrutyzacja floty autobusów szkolnych, optymalizacja

1. WPROWADZENIE

Jednym z obszarów współczesnej logistyki, rozumianej jako proces planowania, realizowania i kontrolowania sprawnego i efektywnego ekonomicznie przepływu surowców, materiałów, wyrobów gotowych lub ludzi, jest logistyka transportu, zajmująca się planowaniem i optymalizacją przemieszczania materiałów i ludzi. Do charakterystycznych dla logistyki transportu problemów należą zadania wyznaczania optymalnych tras dla grupy (floty) pojazdów, nazywanych problemami marszrutyzacji pojazdów (*vehicle routing problem,* VRP). Istotą problemu marszrutyzacji jest wyznaczenie optymalnych tras przewozowych dla określonej liczby środków

* Wydział Cybernetyki Wojskowej Akademii Technicznej.

transportu, których zadaniem jest obsłużenie potrzeb klientów znajdujących się w różnych lokalizacjach, przy spełnieniu pewnej liczby ograniczeń. W praktyce jako kryterium optymalizacji przyjmuje się często całkowity koszt transportu (wyrażony odległościowo, cenowo lub czasowo). Problem marszrutyzacji należy do podstawowej problematyki zarządzania operacyjnego flotą środków transportu, stanowiąc klasyczny przykład złożonego problemu logistycznego rozwiązywanego na podstawie wykorzystania wybranych metod badań analizy systemowej, ze szczególnym uwzględnieniem metod modelowania matematycznego i optymalizacji. Z uwagi na to, że koszty transportu i dystrybucji towarów i ludzi należą do bardzo znaczących elementów kosztów funkcjonowania w zasadzie wszystkich organizacji gospodarczych i społecznych, problematyka marszrutyzacji pozostaje ważna i aktualna na przestrzeni ostatnich kilkudziesięciu lat, a różne warianty problemów marszrutyzacji są powszechnie spotykane we współczesnej logistyce.

Ważnym i aktualnym przykładem problemu marszrutyzacji jest problem wyznaczania optymalnych tras autobusów szkolnych (*school bus routing problem,* SBRP). Podczas gdy typowe problemy marszrutyzacji pojazdów dotyczą głównie transportu towarów, problemy SBRP są ściśle związane z przewozem ludzi, np. uczniów. Spotykane w literaturze opisy praktycznych problemów SBRP różnią się pomiędzy sobą szczegółowymi założeniami, ograniczeniami i dodatkowymi warunkami, które muszą spełniać otrzymane w wyniku ich rozwiązania optymalne lub suboptymalne marszruty autobusów. Z powodu dużej liczby i złożoności tych ograniczeń problemy marszrutyzacji tras autobusów szkolnych są często bardziej skomplikowane niż typowe problemy marszrutyzacji pojazdów. Typowy problem marszrutyzacji floty autobusów (SBRP) może być scharakteryzowany w następujący sposób: grupie przestrzennie rozproszonych uczniów należy zapewnić transport szkolny (publiczny) z miejsc zamieszkania do szkoły lub ze szkoły do miejsc zamieszkania. Problemem jest wyznaczenie zbioru tras autobusów, wybranych z dostępnego taboru pojazdów (który może obejmować pojazdy różnych typów, w szczególności o różnej liczbie miejsc), zapewniającego transport wszystkim uprawnionym uczniom, z jednoczesnym zagwarantowaniem spełnienia dodatkowych warunków, takich jak minimalizacja kosztów transportu, minimalizacja czasu trwania procesu dowozu uczniów, minimalizacja liczby wykorzystanych autobusów itp. Problem marszrutyzacji floty autobusów szkolnych (SBRP) obejmuje dwa główne podproblemy składowe:

1) określenie zbioru przystanków, na których zatrzymują się autobusy, i przypisanie uczniów do poszczególnych przystanków, z uwzględnieniem ograniczenia dotyczącego odległości pomiędzy miejscami zamieszkania uczniów a przystankami;
2) wyznaczenie tras autobusów i rozkładów jazdy dla poszczególnych przystanków.

Pomimo, że problemy SBRP były jednymi z pierwszych problemów logistycznych rozwiązywanych z wykorzystaniem metod badań operacyjnych, nadal są bardzo aktualne i pozostają przedmiotem studiów i badań, o czym świadczą liczne współczesne publikacje, prezentujące nowe metody ich formalnego formułowania i rozwiązywania. W pracach (Spasovic et al., 2001, Spada et al., 2005, Worwa, 2014) analizowany jest problem marszrutyzacji floty autobusów szkolnych przez jego formalne sformułowanie oraz rozwiązanie w odniesieniu do studium przypadku, uwzględniającego realia przykładowej szkoły podstawowej w jednej z polskich gmin. Wyznaczone marszruty autobusów (gimbusów) umożliwiają minimalizację jednocześnie kosztu i czasów transportu. Celem rozważań zawartych w niniejszym artykule jest formalne sformułowanie oraz przedstawienie metody rozwiązania pierwszego z wymienionych wcześniej podproblemów składowych problemu marszrutyzacji floty autobusów szkolnych (SBRP), tj. problemu określenia sieci przystanków, na których zatrzymują się autobusy i przypisanie uczniów do poszczególnych przystanków, z uwzględnieniem ograniczenia dotyczącego odległości pomiędzy miejscami zamieszkania uczniów a przystankami. Rozważania zawarte w dalszej części artykułu są zorganizowane w następujący sposób: w rozdziałach 2 i 3 przedstawiono odpowiednio ogólny i matematyczny opis rozpatrywanego problemu. W rozdziale 5 przedstawiono przykład liczbowy, ilustrujący sformułowanie problemu i metodę jego rozwiązania, natomiast w rozdziale 6 podsumowano przedstawione rozważania.

2. OGÓLNY OPIS PROBLEMU OKREŚLENIA ZBIORU PRZYSTANKÓW AUTOBUSÓW SZKOLNYCH

Określenie lokalizacji przystanków autobusowych wymaga uwzględnienia miejsc zamieszkania przewożonych uczniów. Podstawowym warunkiem, jaki należy uwzględnić w procesie określania lokalizacji przystanków jest zapewnienie, aby odległość miejsca zamieszkania każdego ucznia od przydzielonego mu przystanku nie przekraczała określonej wartości, np. 1 km lub 10 minut marszu. W tym aspekcie oczywiste jest także wymaganie, aby sumaryczna liczba uczniów przypisanych do określonych przystanków każdej trasy autobusowej nie przekraczała dopuszczalnej liczby miejsc siedzących w autobusie. Warto nadmienić, że w większości opisywanych w literaturze problemów klasy SBRP określenie lokalizacji przystanków autobusowych i przypisanie uczniów do poszczególnych przystanków jest pomijane (zakłada się, że lokalizacja przystanków i przypisanie do nich uczniów są dane). Problem ten jest podejmowany jedynie w nielicznych pracach, np. w (Park, Kim, 2010), przy czym do jego rozwiązania wykorzystuje się najczęściej algorytmy heurystyczne, zaliczane do dwóch grup metod: LAR (*location-allocation-routing*) lub ARL (*allocation-routing-location*).

Zarówno w praktyce, jak i w literaturze uwzględnia się szereg ograniczeń, uwarunkowań i wymagań, które powinny być brane pod uwagę przy formułowaniu i rozwiązywaniu problemów klasy SBRP. Wśród najczęściej uwzględnianych grup ograniczeń można wymienić (Spada et al., 2005): ograniczenie maksymalnej dopuszczalnej liczby miejsc w autobusie, ograniczenie dopuszczalnego maksymalnego czasu jazdy autobusu, ograniczenie maksymalnego dopuszczalnego czasu przebywania każdego ucznia w autobusie (czas podróży do szkoły), ograniczenie maksymalnej dopuszczalnej odległości, którą uczeń może pokonać pieszo w drodze do określonego dla niego przystanku autobusowego, ograniczenia „okien czasowych" wyjazdów autobusów na trasy i przyjazdu do szkoły, ograniczenia liczby uczniów przypisanych do poszczególnych przystanków, ograniczenia minimalnej dopuszczalnej liczby uczniów, dla których tworzy się trasę itp. W charakterze funkcji kryterialnych (wskaźników jakości rozwiązania) w problemach SBRP wykorzystuje się często ogólny koszt transportu uczniów lub czas realizacji przewozów.

3. MATEMATYCZNE SFORMUŁOWANIE PROBLEMU OKREŚLENIA ZBIORU PRZYSTANKÓW AUTOBUSÓW SZKOLNYCH O MINIMALNEJ LICZNOŚCI

Zgodnie z wcześniejszymi uwagami zawarte w niniejszym rozdziale rozważania nie obejmują wszystkich aspektów typowego problemu SBRP, a jedynie dotyczą problemu określenia zbioru przystanków, na których zatrzymują się autobusy i przypisanie uczniów do poszczególnych przystanków, z uwzględnieniem ograniczenia dotyczącego odległości pomiędzy miejscami zamieszkania uczniów a przystankami.

Niech $\overline{\boldsymbol{P}}$ oznacza zbiór numerów potencjalnych przystanków autobusowych, $\overline{\boldsymbol{P}} = \{1,2,3,..., \overline{p},..., \overline{P}\}$, przy czym potencjalny przystanek autobusowy oznacza miejsce przy jednej z dróg, po których mogą poruszać się autobusy szkolne, pozwalające na zatrzymanie się autobusu z uwzględnieniem obowiązujących przepisów ruchu drogowego. W dalszych rozważaniach zakłada się, że zbiór przystanków autobusowych $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P} = \{1,2,3,..., p,..., P\}$, do których zostaną przypisani poszczególni uprawnieni do przewozu uczniowie, jest podzbiorem zbioru $\overline{\boldsymbol{P}}$, tj. $\boldsymbol{P} \subseteq \overline{\boldsymbol{P}}$. Niech $\boldsymbol{U}$ oznacza zbiór numerów wszystkich uczniów uprawnionych do przewozu, $\boldsymbol{U} = \{1,2,3,..., u,..., U\}$. Niech $D = [d_{\overline{p}u}]_{\overline{P} \times U}$ oznacza macierz odległości miejsc zamieszkania poszczególnych, uprawnionych do przewozu uczniów od poszczególnych potencjalnych przystanków, przy czym element $d_{\overline{p}u} \geq 0$ określa odległość od $\overline{p}$-tego przystanku miejsca zamieszkania u-tego ucznia, $\overline{p} \in \overline{\boldsymbol{P}},\ u \in \boldsymbol{U}$, przy czym odległość ta może być wyrażana w jednostkach odległości lub czasu.

Niech $\overline{X} = [\overline{x}_{\overline{p}u}]_{\overline{P} \times U}$ oznacza macierz, której elementy określają możliwości przypisania poszczególnych uprawnionych do przewozu, uczniów do potencjalnych przystanków, przy czym element $\overline{x}_{\overline{p}u} \geq 0$, $\overline{p} \in \overline{\boldsymbol{P}},\ u \in \boldsymbol{U}$, jest określony następująco:

$$\overline{x}_{\overline{p}u} = \begin{cases} 1 & jeżeli\ d_{\overline{p}u} \le d_{\max} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases} \tag{1}$$

gdzie wielkość d_{max} oznacza maksymalną, dopuszczalną odległość miejsca zamieszkania ucznia od jego przystanku. Elementy macierzy $\overline{X}$ mają następujące właściwości:

– $\sum_{u=1}^{U} \overline{x}_{\overline{p}u} \ge 0$, $\overline{p} \in \overline{\boldsymbol{P}}$, tzn. że do każdego potencjalnego przystanku, może być przypisanych jeden lub kilku uczniów; możliwa jest także sytuacja, że potencjalny przystanek pozostaje niewykorzystany, tzn. $\sum_{u=1}^{U} \overline{x}_{\overline{p}u} = 0$, co oznacza, że nie został do niego przypisany żaden uczeń;

– $\sum_{\overline{p}=1}^{\overline{P}} \overline{x}_{\overline{p}u} \ge 1$, $u \in \boldsymbol{U}$, tzn. że każdy, uprawniony po przewozu, uczeń musi być przypisany do co najmniej jednego potencjalnego przystanku; w przypadku, gdy miejsce zamieszkania określonego ucznia znajduje się w odległości nie większej niż d_{max} od więcej niż jednego przystanku, to $\sum_{\overline{p}=1}^{\overline{P}} \overline{x}_{\overline{p}u} > 1$.

W dalszych rozważaniach przystanek $\overline{p} \in \overline{\boldsymbol{P}}$ nazywany będzie:

– przystankiem czynnym, jeśli przypisany został do niego co najmniej jeden uczeń, tzn. gdy zachodzi $\sum_{u=1}^{U} \overline{x}_{\overline{p}u} = 0$;

– przystankiem biernym, jeśli nie został przypisany do niego żaden uczeń, tzn. gdy zachodzi $\sum_{u=1}^{U} \overline{x}_{\overline{p}u} = 0$.

Macierz $\overline{X}$ przypisania poszczególnych, uprawnionych do przewozu, uczniów do potencjalnych przystanków, której elementy spełniają warunek (1), stanowi podstawę do zdefiniowania zbioru $\boldsymbol{X}$ macierzy $X = [x_{\overline{p}u}]_{\overline{P} \times U}$, których elementy są określone następująco:

$$x_{\overline{p}u} = \begin{cases} 1 & jeżeli\ \ \overline{x}_{\overline{p}u} = 1 \\ 0 & jeżeli\ \overline{x}_{\overline{p}u} = 0 \ \text{ lub } \ \overline{x}_{\overline{p}u} = 1. \end{cases} \tag{2}$$

Macierze $X \in \boldsymbol{X}$ oraz macierz $\overline{X}$ mają takie same wymiary i są zero-jedynkowe, przy czym zgodnie z warunkiem (1), element $x_{\overline{p}u}$ macierzy X może być równy 1 tylko wówczas, jeśli odpowiadający mu element $\overline{x}_{\overline{p}u}$ macierzy $\overline{X}$ także jest równy 1. Możliwa jest jednak sytuacja, że pomimo, iż element $\overline{x}_{\overline{p}u}$ macierzy $\overline{X}$ także jest równy 1, to element $x_{\overline{p}u}$ macierzy X jest równy 0. Ponadto, jeśli element $\overline{x}_{\overline{p}u}$ macierzy $\overline{X}$ jest równy 0, tzn. że do $\overline{p}$-tego przystanku nie może być przypisany u-ty uczeń, to element $x_{\overline{p}u}$ macierzy X także musi być równy 0.

W dalszych rozważaniach elementy macierzy $X \in \boldsymbol{X}$ będą określały możliwe przypisania uczniów do poszczególnych przystanków. W rozpatrywanym w niniejszym rozdziale problemie określenia zbioru przystanków autobusów szkolnych macierz $X \in \boldsymbol{X}$ będzie traktowana jako macierz decyzyjna, a zbiór macierzy $\boldsymbol{X}$ będzie stanowił zbiór macierzy (rozwiązań) dopuszczalnych.

Macierz $X \in \boldsymbol{X}$ określa dopuszczalne przypisanie uprawnionych do przewozu uczniów do potencjalnych przystanków, jeśli jej elementy mają następujące właściwości:

– $x_{\overline{p}u} = \begin{cases} 1 & \textit{jeżeli do } \overline{p}\text{-tego przystanku został przypisany u-ty uczeń} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku;} \end{cases}$

– $\sum_{u=1}^{U} x_{\overline{p}u} \geq 0$, $\overline{p} \in \overline{\boldsymbol{P}}$, tzn. że do każdego potencjalnego przystanku $\overline{p} \in \overline{\boldsymbol{P}}$, może być przypisanych jeden lub kilku uczniów (wówczas taki przystanek staje się przystankiem czynnym); możliwa jest także sytuacja, że potencjalny przystanek $\overline{p} \in \overline{\boldsymbol{P}}$ pozostaje przystankiem niewykorzystanym (biernym), tzn. $\sum_{u=1}^{U} x_{\overline{p}u} = 0$, co oznacza, że nie jest do niego przypisany żaden uczeń;

– $\sum_{\overline{p}=1}^{\overline{P}} x_{\overline{p}u} = 1$, $u \in \boldsymbol{U}$, tzn. że każdy, uprawniony po przewozu, uczeń musi być przypisany do dokładnie jednego przystanku.

Wychodząc z założenia, że mała liczba przystanków, z których zabierani są uczniowie lub do których są oni dowożeni, ułatwia przeprowadzenie akcji transportu szkolnego. W dalszej części rozdziału rozpatrywany będzie problem minimalizacji liczby czynnych przystanków autobusowych.

Każda macierz przypisania uczniów do poszczególnych przystanków autobusowych $X \in \boldsymbol{X}$ jednoznacznie określa zbiór numerów czynnych przystanków, czyli takich, z których będą korzystać upoważnieni do przewozu uczniowie. Do identyfikacji czynnych przystanków autobusowych wykorzystany zostanie wektor $s(X)=\left(s_1(X), s_2(X),..., s_{\overline{p}}(X),..., s_{\overline{P}}(X)\right)$, taki, że

$$s_{\overline{p}}(X)=\begin{cases} 1 & \sum_{u=1}^{U} x_{\overline{p}u} > 0, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases} \tag{3}$$

przy czym $s_{\overline{p}}(X) \in \overline{\boldsymbol{P}}$. Wówczas zbiór czynnych przystanków autobusowych $\boldsymbol{P} \subseteq \overline{\boldsymbol{P}}$ można otrzymać przez zaliczenie do niego tych numerów przystanków ze zbioru $\overline{\boldsymbol{P}}$, którym odpowiadają niezerowe składowe wektora $s(X)$.

Na potrzeby dalszych rozważań wprowadzony zostanie operator $\otimes$ tzw. mnożenia macierzy zero-jedynkowych. Operator $\otimes$ działa podobnie do operatora mnożenia macierzy liczbowych, z tym że występujące w działaniu sumowanie realizuje zero-jedynkowy operator sumy $\oplus$, którego reguły działania określone są następująco:

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Niech $A=[a_{ij}]_{I\times J}$ oraz $B=[b_{li}]_{L\times I}$ oznaczają macierze zero-jedynkowe, tzn. takie, że

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1J} \\ a_{21} & a_{21} & ... & a_{2J} \\ & & ... & \\ a_{I1} & a_{I2} & ... & a_{IJ} \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1L} \\ b_{21} & b_{21} & ... & a_{2L} \\ & & ... & \\ b_{J1} & b_{J2} & ... & b_{JL} \end{bmatrix}$$

przy czym $a_{ij}, b_{li} \in \{0,1\},\ i=1,2,...I,\ j=1,2,...J,\ l=1,2,...L$.

Wówczas

$$A \otimes B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1J} \\ a_{21} & a_{21} & ... & a_{2J} \\ & & ... & \\ a_{I1} & a_{I2} & ... & a_{IJ} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1L} \\ b_{21} & b_{21} & ... & a_{2L} \\ & & ... & \\ b_{J1} & b_{J2} & ... & b_{JL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & ... & c_{1L} \\ c_{21} & c_{21} & ... & c_{2L} \\ & & ... & \\ c_{I1} & c_{I2} & ... & c_{IL} \end{bmatrix},$$

gdzie $c_{il} \in \{0,1\},\ c_{il}=\sum_{n=1}^{I} a_{in} b_{nl}$, przy czym operator $\sum$ realizuje sumowanie za pomocą zero-jedynkowego operatora sumy $\oplus$.

Przykład:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dla danego zbioru potencjalnych przystanków $\boldsymbol{P}$ oraz danej macierzy przypisania uczniów do poszczególnych przystanków autobusowych $X \in \boldsymbol{X}$, wektor $s(X)$ można wyznaczyć jako iloczyn logiczny macierzy X i $\overline{P}$-elementowego wektora kolumnowego 1, złożonego z samych „jedynek”, tj.

$$s(X) = [X \otimes 1]^T, \tag{4}$$

gdzie symbol T oznacza transponowanie wektora kolumnowego, otrzymanego w wyniku wykonania mnożenia $X \otimes \boldsymbol{1}$. Liczba czynnych przystanków *L(X)* może być określona następująco:

$$L(X) = \sum_{\overline{p}=1}^{\overline{P}} s_{\overline{p}}(X), \tag{5}$$

gdzie $s_{\overline{p}}(X)$ oznacza $\overline{p}-tą$ składową wektora $s(X)$ określonego zależnością (3).

Przykład:

Jeśli $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, to wówczas:

$$s(X) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

skąd, po transponowaniu otrzymanego wektora kolumnowego, mamy $s(X)=\left[1,1,1,1,0\right]$, czyli że $\boldsymbol{P}=\{1,2,3,4\}\subset\overline{\boldsymbol{P}}=\{1,2,3,4,5\}$. Liczba czynnych przystanków $L(X)=\sum_{\overline{p}=1}^{5}s_{\overline{p}}(X)=4$.

Na podstawie przyjętych założeń i oznaczeń problem określenia minimalnego zbioru przystanków autobusów szkolnych i przypisania do nich uprawnionych do przewozu uczniów może być sformułowany jako przedstawione poniżej zadanie optymalizacji jednokryterialnej.

Dla danych:

– zbioru numerów potencjalnych przestanków $\overline{\boldsymbol{P}}=\{1,2,3,...,\overline{p},...,\overline{P}\}$;
– zbioru numerów wszystkich uczniów uprawnionych do przewozu $\boldsymbol{U}=\{1,2,3,...,u,...,U\}$;
– maksymalnej, dopuszczalnej odległości d_{max} miejsca zamieszkania ucznia od jego przystanku wyznaczyć macierz $X=[x_{\overline{p}u}]_{\overline{P}\times U}$, minimalizującą funkcję

$$L(X)=\sum_{\overline{p}=1}^{\overline{P}}s_{\overline{p}}(X),\ X\in\boldsymbol{X}, \tag{6}$$

gdzie zbiór rozwiązań dopuszczalnych $\boldsymbol{X}$ określają, zgodnie z wcześniejszymi uwagami, następujące ograniczenia:

– $X=[x_{\overline{p}u}]_{\overline{P}\times U}$, przy czym elementy $x_{\overline{p}u}$ spełniają warunek (2) (7)

– $\sum_{u=1}^{U}x_{\overline{p}u}\geq 0,\ \ p\in\overline{\boldsymbol{P}},\ u\in\boldsymbol{U}$, (8)

– $\sum_{\overline{p}=1}^{\overline{P}}x_{\overline{p}u}=1,\ p\in\overline{\boldsymbol{P}},\ u\in\boldsymbol{U}$. (9)

4. METODA ROZWIĄZANIA PROBLEMU OKREŚLENIA MINIMALNEGO ZBIORU PRZYSTANKÓW AUTOBUSÓW SZKOLNYCH

W przestawionym dalej algorytmie wyznaczenia rozwiązania zadania optymalizacji (6)–(10) zostanie zastosowana operacja $p\circ q$ redukcji p-tego wiersza macierzy X do q-tego wiersza tej macierzy, $p,q\in\overline{\boldsymbol{P}}$, zdefiniowana następująco:

p	q	$p \circ q$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Przykład.

Niech

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wówczas, po redukcji pozostałych wierszy macierzy X do wiersza $q = 3$, otrzymuje się macierz

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

która z kolei, po redukcji jej wierszy do wiersza $q = 4$, daje macierz

$$X'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Do rozwiązania problemu (6)–(10) może zostać wykorzystany następujący algorytm:

1. Utwórz macierz $\overline{X} = [\overline{x}_{\overline{p}u}]_{\overline{P} \times U}$, $\overline{p} \in \boldsymbol{P}$, $u \in \boldsymbol{U}$. Ustaw $X = \overline{X}$.
2. Jeśli dla każdego $u \in \boldsymbol{U}$ zachodzi $\sum_{\overline{p}=1}^{\overline{P}} x_{\overline{p}u} = 1$, to $s(X) = [X \otimes 1]^T$. Koniec.

3. Utwórz zbiór $\boldsymbol{J} \subseteq \overline{\boldsymbol{P}}$ taki, że $j \in \boldsymbol{J}$ jeśli istnieje $u \in \boldsymbol{U}$, takie że $\sum_{\overline{p}=1}^{\overline{P}} x_{\overline{p}u} = 1$ i $\overline{x}_{ju} = 1$. Podstaw $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{J}$.
4. Jeśli zbiór ***J*** nie jest pusty, przejdź do kroku 5; w przeciwnym razie przejdź do kroku 11.
5. W zbiorze ***J*** wyznacz element, dla którego suma $\sum_{u=1}^{U} x_{nu}$ jest największa; jeśli takich elementów jest więcej niż jeden, weź dowolny z nich; dokonaj redukcji pozostałych wierszy macierzy *X* do wiersza wyznaczonego przez ten element; usuń ten element ze zbioru ***J***. Jeśli dla każdego $u \in \boldsymbol{U}$ zachodzi $\sum_{\overline{p}=1}^{\overline{P}} x_{\overline{p}u} = 1$ to $s(X) = [X \otimes 1]^T$. Koniec.
6. Jeśli zbiór ***J*** nie jest pusty przejdź do kroku 5; w przeciwnym razie przejdź do kroku 7.
7. W zbiorze $\boldsymbol{U} \setminus \boldsymbol{P}$ wyznacz element dla którego suma $\sum_{u=1}^{U} x_{nu}$ jest największa; jeśli takich elementów jest więcej niż jeden, weź dowolny z nich; dokonaj redukcji pozostałych wierszy macierzy *X* do wiersza wyznaczonego przez ten element; dodaj ten element do zbioru ***P***.
8. Jeśli dla każdego $u \in \boldsymbol{U}$ zachodzi $\sum_{\overline{p}=1}^{\overline{P}} x_{\overline{p}u} = 1$ to $s(X) = [X \otimes 1]^T$. Koniec.
9. Jeśli zbiór $\boldsymbol{U} \setminus \boldsymbol{P}$ nie jest pusty, przejdź do kroku 7; w przeciwnym razie $s(X) = [X \otimes 1]^T$. Koniec.

Przedstawiony algorytm rozwiązania problemu określenia minimalnego zbioru przystanków autobusów szkolnych jest algorytmem zachłannym, ponieważ na każdym etapie przekształcania macierzy *X* wybierany jest wiersz, zawierający największą liczbę „jedynek”.

5. PRZYKŁAD LICZBOWY

W celu zilustrowania działania proponowanego algorytmu rozwiązania problemu określenia minimalnego zbioru przystanków autobusów szkolnych zostanie rozpatrzony prosty przykład liczbowy.

Dane:

- zbiór numerów potencjalnych przestanków $\overline{\boldsymbol{P}} = \{1,2,3,4,5\}$;
- zbiór numerów wszystkich uczniów uprawnionych do przewozu $\boldsymbol{U} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$;
- maksymalna, dopuszczalna odległość miejsca zamieszkania ucznia od jego przystanku d_{max} = 15 minut;
- macierz $D = [d_{\overline{p}u}]_{\overline{P}\times U}$ odległości miejsc zamieszkania poszczególnych, uprawnionych do przewozu, uczniów, od poszczególnych potencjalnych przystanków:

$$D = \begin{bmatrix} 20 & 8 & 10 & 25 & 5 & 30 & 45 & 15 & 12 & 20 & 10 \\ 15 & 30 & 25 & 12 & 65 & 20 & 35 & 40 & 70 & 28 & 45 \\ 25 & 20 & 40 & 60 & 10 & 15 & 30 & 8 & 20 & 10 & 28 \\ 10 & 14 & 30 & 25 & 30 & 45 & 15 & 15 & 35 & 25 & 60 \\ 50 & 40 & 10 & 5 & 25 & 25 & 35 & 60 & 15 & 70 & 10 \end{bmatrix}.$$

Zgodnie z (1) macierz $\overline{X} = [\overline{x}_{\overline{p}u}]_{\overline{P}\times U}$, określająca potencjalne możliwości przypisania poszczególnych, uprawnionych do przewozu, uczniów do potencjalnych przystanków ma postać:

$$\overline{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zatem, po wykonaniu kroku 1 algorytmu macierz *X*, zgodnie z (2) ma postać:

$$X = \overline{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ w macierzy *X* istnieją kolumny zawierające po kilka „jedynek” przechodzimy do kroku 3 algorytmu. Zbiór $\boldsymbol{J}$ ma postać $\boldsymbol{J} = \{3,4\}$. Podobnie zbiór $\boldsymbol{P} = \{3,4\}$ ponieważ zbiór $\boldsymbol{J}$ nie jest pusty, przechodzimy do kroku 5 algorytmu. Ponieważ suma „jedynek” w wierszach numer 3 i 4 jest taka sama, wykonujemy redukcję względem pierwszego z tych wierszy, tzn. wiersza nr 3, otrzymując macierz:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zgodnie z krokiem 5 algorytmu po wykonaniu redukcji pozostałych wierszy macierzy X do wiersza nr 3 usuwamy numer tego wiersza ze zbioru $\boldsymbol{J}$. Po tej operacji $\boldsymbol{J} = \{4\}$. Ponieważ otrzymana macierz X zawiera kolumny z wielokrotnymi „jedynkami”, przechodzimy do kroku 6 algorytmu, zgodnie z którym wykonujemy redukcję względem wiersza nr 4, otrzymując macierz:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Po tej operacji zbiór $\boldsymbol{J}$ staje się pusty, tj. $\boldsymbol{J} = \{\}$. Zgodnie z krokiem 7 algorytmu w zbiorze $\boldsymbol{U} \setminus \boldsymbol{P} = \{1,2,5\}$ wyznaczamy wiersz o największej liczbie „jedynek”. Jest to wiersz numer 5. Po redukcji pozostałych wierszy macierzy X do wiersza nr 5 otrzymujemy:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Po wykonaniu tej operacji $\boldsymbol{P} = \{3,4,5\}$. Po przejściu do kroku 8 algorytmu stwierdzamy, że dla każdego $u \in \boldsymbol{U} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ zachodzi $\sum_{\bar{p}=1}^{5} x_{\bar{p}u} = 1.$

Zatem wektor czynnych przystanków autobusowych $s(X)$, zgodnie z zależnością (4), ma postać:

$$s(X)=[X\otimes 1]^T=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Zbiór przystanków o minimalnej liczności ma postać $\boldsymbol{P}=\{3,4,5\}$, czyli liczba przystanków wynosi $L(X)=\sum_{\overline{p}=1}^{\overline{P}} s_{\overline{p}}(X)=\sum_{\overline{p}=1}^{5} s_{\overline{p}}(X)=3$.

6. UWAGI KOŃCOWE

W artykule przedstawiono opis i sformułowanie problemu określenia zbioru przystanków autobusowych o minimalnej liczności na potrzeby zarządzania transportem szkolnym. Rozpatrywany problem stanowi jeden z podproblemów składowych szerszego problemu, znanego w literaturze jako *school bus routing problem* (SBRP). Wychodząc z założenia, że mała liczba przystanków autobusowych obsługiwanych przez flotę autobusów szkolnych ułatwia efektywne prowadzenie procesu transportu uczniów autobusami szkolnymi, w artykule sformułowano problem minimalizacji liczby wykorzystywanych przystanków autobusowych z zapewnieniem transportu każdemu uprawnionemu do przewozu uczniowi. Przedstawiono także metodę rozwiązania sformułowanego problemu, wykorzystującą autorski algorytm zachłanny. W celu zilustrowania proponowanej metody rozwiązania rozpatrywanego problemu optymalizacji przedstawiono prosty przykład liczbowy.

LITERATURA

Park, J., Kim, B.I. (2010). The school bus routing problem: A review. *European Journal of Operational Research,* 20(2), 311-319.

Spada, M., Bierlaire, M., Liebling, T.M. (2005). Decision-aiding methodology for the school bus routing and scheduling problem. *Transportation Science*, 39(3), 477-490.

Spasovic, L., Chien, S., Kelnhofer-Feeley, C., Wang, Y., Hu, Q. (2001). *A methodology for evaluating of school bus routing – A case study of Riverdale, New Jersey*. Transportation Research Board Paper (01-2088).

Worwa, K. (2014). A case study in school transportation logistics. *Research in Logistics & Production*, 4(1), 45-54.

MINIMIZATION OF THE NUMBER OF BUS STOPS IN THE SCHOOL BUS ROUTING PROBLEM

Summary

This paper contains a formal presentation and description of a method of solving the problem of both determining the set of bus stops and the assignment of students that are authorized to transport to these stops. This issue can be treated as a subproblem of the school bus routing problem (SBRP). Although the problems of the SBRP class are one of the earliest logistics problems solved using methods of operations research, they remain valid and are the subject of research, as evidenced by numerous contemporary publications. Unfortunately, in most of the problems of SBRP class described in the literature, the problem of determining the bus stops network and allocation of students to the particular stops is very often ignored. Basing on the assumption that a small number of bus stops, from which the students are taken or to which they are transported, facilitates the school transport process, the paper focuses on the problem of minimizing the number of active bus stops. The main result of this paper is a proposed greedy algorithm to solving the problem of determining the minimum number of school bus stops. To illustrate the functioning of the proposed algorithm, a simple numerical example has been presented.

Keywords: school bus routing problem, bus route optimization