

Modyfikacja sposobu obliczania niepewności pomiaru

Paweł Fotowicz

Główny Urząd Miar, ul. Elektoralna 2, 00-139 Warszawa

Streszczenie: Wspólny Komitet ds. Przewodników w Metrologii JCGM zaproponował zmianę podejścia dotyczącą obliczania niepewności pomiaru przy wykorzystaniu prawa propagacji niepewności. Celem jest zbliżenie uzyskiwanych wyników obliczania niepewności standardowej wielkości wyjściowej z wynikiem otrzymywanym przy zastosowaniu zasady propagacji rozkładów za pomocą metody Monte Carlo. W artykule przedstawiono skutki przyjęcia nowych zasad obliczania niepewności standardowej podczas wyznaczania błędu przyrządu pomiarowego.

Słowa kluczowe: niepewność pomiaru, prawo propagacji niepewności, propagacja rozkładów

1. Wprowadzenie

Działający przy Międzynarodowym Biurze Miar, Wspólny Komitet ds. Przewodników w Metrologii JCGM (Joint Committee for Guides in Metrology) przygotowuje zmianę w podejściu dotyczącym obliczania niepewności pomiaru [1]. Zmiana ma polegać na ujednoczeniu koncepcji wyznaczania niepewności, przedstawionej już w Suplemencie [2], z rozwiązaniami opisanymi w podstawowym dokumencie [3]. Ujednoczenie koncepcji polegać ma na jednakowym podejściu przy obliczaniu niepewności standardowej. Jej miarą ma być odchylenie standardowe rozkładu związanego z określoną wielkością wejściową. O ile takie podejście stosowane jest przy wyznaczaniu niepewności obliczanej metodą typu B, to nieco inaczej jest w przypadku metody typu A. Tym samym, w sposobie wyznaczania niepewności standardowej ma być zniesiona różnica pomiędzy tymi dwiema metodami obliczeniowymi. Proponuje się jedynie kategoryzację na wielkości wejściowe obliczane na podstawie informacji dostępnej bezpośrednio z danych pomiarowych lub pochodzącej z wiedzy o pomiarze. W obu przypadkach informacja ta jest przedstawiana w postaci rozkładu prawdopodobieństwa, którego podstawowy parametr opisujący rozproszenie (odchylenie standardowe) jest miarą niepewności standardowej. Dzięki takiemu podejściu wynik obliczania niepewności standardowej związanej z wielkością wyjściową, przy zastosowaniu prawa propagacji niepewności, zbliża się do wyniku wyznaczania tej niepewności metodą propagacji rozkładów zalecaną w [2]. Uzyskuje się tym samym jednolitość w obliczeniach.

Tematyka powyższego ujednoczenia obliczeń wiąże się również z podejściem probabilistycznym w dziedzinie wyrażania

niepewności pomiaru, które było szeroko dyskutowane [4, 5]. Sugerowano podejście bayesowskie [6, 7] oraz wykorzystanie do obliczeń metody numerycznej Monte Carlo [8, 9].

2. Podejście dotychczasowe

Przewodnik [3] zaleca, by przy obliczeniach wykonywanych metodą typu A, wykorzystywać statystykę w postaci odchylenia standardowego eksperymentalnego średniej:

$$s(\bar{q}) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})^2}{(n-1)n}} = \frac{s(q)}{\sqrt{n}} \quad (1)$$

gdzie q_k oznacza pojedynczą obserwację, a n ich liczbę w próbie losowej, przy czym $s(q)$ to odchylenie standardowe eksperymentalne. Uzyskana wartość jest miarą rozrzutu wartości średniej z próby losowej i stanowi niepewność standardową obliczaną metodą typu A:

$$u_A(x) = s(\bar{q}) \quad (2)$$

3. Nowe podejście

Nowe podejście polega na zastosowaniu odchylenia standardowego związanego z rozkładem t -Studenta:

$$u(x) = \sqrt{\frac{v}{v-2}} s(\bar{q}) \quad (3)$$

gdzie v jest liczbą stopni swobody związaną z wielkością wejściową.

W przypadku pojedynczej serii pomiarowej liczba stopni swobody wynosi $v = n - 1$. W literaturze można spotkać również zależność $v = n - 1,5$ stosowaną dla małych liczości próbek [13], ale autorzy Przewodnika [3] nie zalecają tego rozwiązania.

Autor korespondujący:

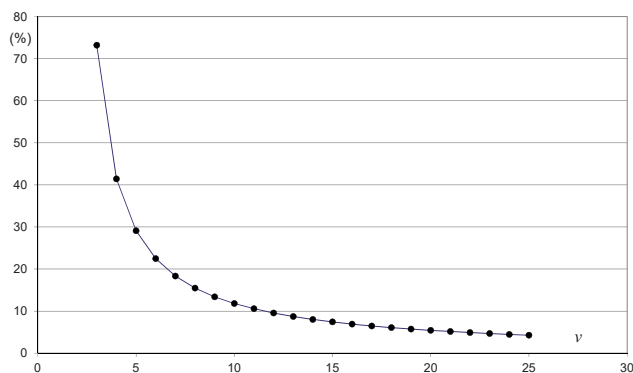
Paweł Fotowicz, uncert@gum.gov.pl

Artykuł recenzowany

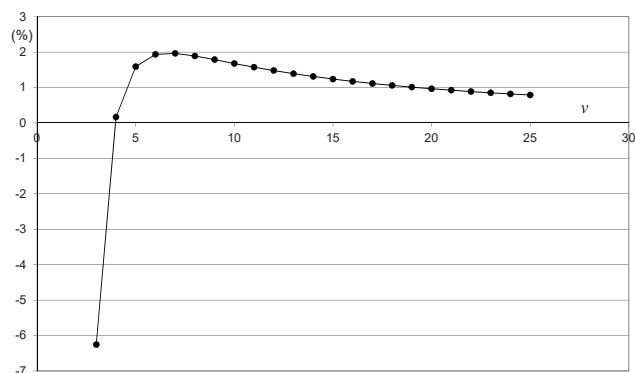
nadesłany 26.06.2016 r., przyjęty do druku 02.08.2016 r.



Zezwala się na korzystanie z artykułu na warunkach licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 3.0



Rys. 1. Względne zmiany wartości niepewności standardowej obliczanej na podstawie danych pomiarowych przy zastosowaniu nowego i dotychczasowego podejścia
 Fig. 1. Relative changes in the value of standard uncertainty calculated on the basis of measurement data using new and existing approach



Rys. 2. Względne różnice wyników obliczeń niepewności standardowej za pomocą formuły definicyjnej (3) i formuły przybliżonej (4)
 Fig. 2. Relative differences in calculation of standard uncertainty using a definitional (3) and an approximate (4) formula

Niepewność standardowa określona zależnością (3) jest miarą niepewności wielkości wyznaczanej na podstawie danych pomiarowych. W przypadku wielu serii pomiarowych można zastosować wypadkową liczbę stopni swobody. Miara ta w stosunku do dotychczasowego rozwiązania powiększona jest o czynnik związany z liczbą stopni swobody, tym większy im mniejsza jest ta liczba. Ilustruje to, wykonany na podstawie własnych obliczeń, wykres (rys. 1), przedstawiający względną różnicę między wartościami niepewności standardowej obliczanymi przy użyciu formuły (3) i (2) w zależności od liczby stopni swobody. Dla małych ich wartości, od $v = 3$ do $v = 11$, różnice te są większe od 10%.

4. Konsekwencje przyjęcia nowego rozwiązania

Jedną z podstawowych konsekwencji przyjęcia nowego rozwiązania przy obliczaniu niepewności standardowej na podstawie danych pomiarowych jest zwiększenie jej wartości i zbliżenie do wartości obliczanej metodą Monte Carlo na podstawie symulacji rozkładu t -Studenta. Dzięki temu zabiegowi wyniki obliczania niepewności standardowej związanej z wielkością wyjściową metodą propagacji rozkładów również zbliżają się do wartości tej samej niepewności obliczanej na podstawie prawa propagacji niepewności. W klasycznym Przewodniku [3] niepewność ta nazywana była złożoną niepewnością standardową. Będzie możliwe uzyskanie jednolitości obliczeń przy zastosowaniu obu metod. Jednak pewnym ograniczeniem stosowania formuły (3) jest warunek matematyczny postaci: $v \geq 3$, co eliminuje możliwość obliczania niepewności standardowej dla prób losowych o liczebności $n = 3$. Temu problemowi można zaradzić stosując przelicznik:

$$u(x) = \frac{t(v)}{k_N} s(\bar{q}) \quad (4)$$

gdzie $t(v)$ to kwantyl rozkładu Studenta obliczony dla dowolnej liczby stopni swobody, a k_N to kwantyl rozkładu normalnego.

Przykładowo (na podstawie własnych obliczeń), dla kwantyli rzędu $p = 95\%$ względne różnice w obliczeniach niepewności standardowej przy użyciu zależności (3) i (4) na ogół nie przekraczają 2%, tylko dla $v = 3$ są bliskie 7% (rys. 2).

Przyjęcie definicji niepewności standardowej dla wielkości wejściowej w postaci równania (3) umożliwi również zastępowanie w obliczeniach rozkładu t -Studenta rozkładem normalnym $N(\mu, \sigma)$, gdyż w przybliżeniu:

$$t_v \approx N\left(0, \sqrt{\frac{v}{v-2}}\right) \quad (5)$$

gdzie t_v to zmienna losowa o rozkładzie t -Studenta z liczbą stopni swobody v .

5. Niepewność rozszerzona i współczynnik rozszerzenia

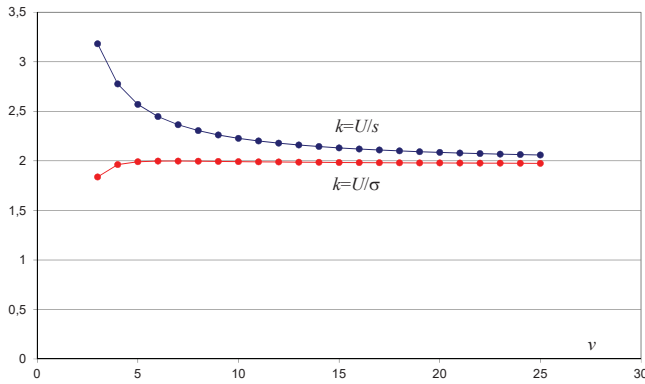
Jednym z postulatów zmodyfikowanego podejścia dotyczącego wyznaczania niepewności pomiaru jest zachowanie jako podstawy obliczeniowej tzw. prawa propagacji niepewności. Prawo to dla niezależnych wielkości wejściowych definiuje niepewność standardową związaną z wielkością wyjściową w postaci:

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) \quad (6)$$

i jako takie nie może być wykorzystywane przy obliczeniach przeprowadzanych metodą Monte Carlo. W metodzie tej bowiem wszystkie obliczenia wykonywane są przy użyciu jedynie równania pomiaru. Dotyczy to zarówno wyznaczania niepewności standardowej, jak i przedziału rozszerzenia. Dla równań liniowych, będących podstawą modelowania pomiaru zalecaną w Przewodniku [3], połowę tego przedziału stanowi niepewność rozszerzona U , która definiowana jest jako iloczyn współczynnika rozszerzenia k i niepewności standardowej wielkości wyjściowej $u(y)$. Generalnie współczynnik rozszerzenia związany jest z kwantylem rzędu p rozkładu wielkości wyjściowej. Jednakże na jego wartość (w metodzie typu A) ma również wpływ sposób przyjęcia miary niepewności standardowej. Gdy jest nią odchylenie standardowe eksperymentalne średniej s (jak w dotychczasowym podejściu), to dla prawdopodobieństwa 95% wartość współczynnika większa jest od 2. Jednakże, gdy zastosujemy nowe podejście w postaci odchylenia standardowego rozkładu Studenta σ , to dla tego samego prawdopodobieństwa 95% otrzymamy współczynnik rozszerzenia mniejszy od 2 [10]. Obie sytuacje ilustruje rys. 3, wykonany na podstawie własnych obliczeń.

W metodzie typu B obliczania niepewności pomiaru niejednokrotnie wielkości wejściowej przypisuje się rozkład prostokątny. Łącząc zatem informacje dotyczące wielkości wyznaczanych na podstawie danych pomiarowych i płynących z poza pomiaru można przewidywać, że rozkładem wynikowym będzie rozkład stanowiący splot rozkładu normalnego z prostokątnym, tworzący rozkład płasko-normalny [11]. W takiej sytuacji niepewność rozszerzona może być wyznaczona na podstawie:

$$U = k_{PN} \cdot u(y) \quad (7)$$



Rys. 3. Współczynnik rozszerzenia k dla niepewności rozszerzonej U wyznaczonej dla prawdopodobieństwa $p = 95\%$
Fig. 3. Coverage factor k for the expanded uncertainty U determined for the probability $p = 95\%$

gdzie współczynnik k_{PN} przybiera postać kwantyla rozkładu płasko-normalnego. Dla prawdopodobieństwa rozszerzenia $p = 95\%$ wartości tego współczynnika mogą przyjmować wartości z przedziału od $k_{PN} = 1,96$ do $k_{PN} = 1,65$, czyli w skrajnych przypadkach jak dla rozkładu normalnego lub prostokątnego.

6. Przykładowy budżet niepewności

Wprowadzana zmiana będzie miała wpływ na obliczenia budżetu niepewności, szczególnie dla składowej opisywanej rozkładem Studenta. Dla zilustrowania tej sytuacji posłużymy się przykładowym budżetem [12]. Jest nim budżet wzorcowania mikrometru, przedstawiony w postaci tabeli 1. Równanie pomiaru, dotyczące błędu wskazania mikrometru, zawiera cztery składowe, z których każda opisana innym rozkładem prawdopodobieństwa:

Tabela 1. Budżet niepewności wzorcowania mikrometru
Table 1. Uncertainty budget for micrometer calibration

Symbol wielkości	Estymata wielkości	Niepewność standardowa	Rozkład prawdopodobieństwa	Współczynnik wrażliwości	Udział niepewności
l	20,001 mm	0,32 μm	Studenta ($v = 4$)	1	0,32 μm
δl	0 mm	0,41 μm	trójkątny	1	0,41 μm
l_w	20,0002 mm	0,05 μm	normalny	-1	-0,05 μm
δl_t	0 mm	0,14 μm	prostokątny	-1	-0,14 μm
e	0,0008 mm				0,54 μm

Tabela 2. Budżet niepewności wzorcowania mikrometru po modyfikacji
Table 2. Modifying uncertainty budget for micrometer calibration

Symbol wielkości	Estymata wielkości	Niepewność standardowa	Rozkład prawdopodobieństwa	Współczynnik wrażliwości	Udział niepewności
l	20,001 mm	0,45 μm	Studenta ($v = 4$)	1	0,45 μm
δl	0 mm	0,41 μm	trójkątny	1	0,41 μm
l_w	20,0002 mm	0,05 μm	normalny	-1	-0,05 μm
δl_t	0 mm	0,14 μm	prostokątny	-1	-0,14 μm
e	0,0008 mm				0,62 μm

$$e = l + \delta l - l_w - \delta l_t \quad (8)$$

gdzie: l – długość płytki zmierzona mikrometrem, δl – rozdzielczość pomiaru mikrometrem, l_w – długość płytki wzorcowej, δl_t – poprawka temperaturowa.

Pierwsza składowa opisana jest rozkładem Studenta z liczbą stopni swobody $v = 4$. Odchylenie standardowe eksperymentalne średniej, zdefiniowane wzorem (1), daje w wyniku wartość 0,32 μm . Natomiast dla odchylenia standardowego rozkładu przypisanego tej wielkości, określonego wzorem (3), daje wartość 0,45 μm . Stosując tę wartość jako miarę niepewności standardowej związanej z pierwszą składową, otrzymamy zmodyfikowany budżet niepewności (tab. 2). Na tej podstawie niepewność standardowa związana z wielkością wyjściową wyniesie $u(e) = 0,62 \mu\text{m}$ i będzie większa od złożonej niepewności standardowej związanej z tą wielkością, która wynosi $u_c(e) = 0,54 \mu\text{m}$ (tab. 1). Te same wartości niepewności, co w tab. 2, można uzyskać stosując do obliczeń metodę Monte Carlo.

7. Podsumowanie

Celem przewidywanych zmian w *Przewodniku wyrażania niepewności pomiaru* jest ujednoczenie sposobu jej obliczania i uzyskanie porównywalności wyników tych obliczeń niezależnie od zastosowanej techniki obliczeniowej, z jednoczesnym utrzymaniem w mocy podstawowego rozwiązania, jakim jest prawo propagacji niepewności. Promowana obecnie przez JCGM metoda propagacji rozkładów, jako metoda odniesienia do wykonywanych obliczeń niepewności pomiaru, przy realizacji techniką Monte Carlo powoduje rozbieżności w obliczeniach. Wprowadzona modyfikacja obliczania niepewności standardowej w postaci odchyłeń standardowych rozkładów związanych wielkościami wejściowymi wyeliminuje te rozbieżności.

Prawo propagacji niepewności stanowi podstawowy sposób obliczania niepewności standardowej związanej z menzurandem, jest zrozumiałe i proste w zastosowaniu, za pomocą prostej formuły analitycznej. Natomiast propagacja rozkładów wymaga zastosowania złożonej procedury numerycznej opartej o generator liczb losowych i przez to może być mniej chętnie stosowana w praktyce laboratoryjnej. Jednakże możliwość eliminacji rozbieżności wyników obliczeń niepewności rozszerzonej przy zastosowaniu obu technik obliczeniowych poprawi jakość działań związanych z opracowaniem danych pomiarowych.

Bibliografia

1. Bich W., Revision of the 'Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement'. Why and how. „Metrologia”, Vol. 51, 2014, S155–S158, DOI: 10.1088/0026-1394/51/4/S155.
2. Supplement 1 to the GUM – Propagation of distributions using a Monte Carlo method. JCGM 101:2008.
3. Guide to the expression of uncertainty in measurement. JCGM 100:2008.
4. Rossi G.B., A probabilistic model for measurement processes, “Measurement”, Vol. 34, 2003, 85–99, DOI: 10.1016/S0263-2241(03)00026-5.
5. Rossi G.B., Crenna F., A probabilistic approach to measurement-based decisions, “Measurement”, Vol. 39, 2006, 101–119, DOI: 10.1016/j.measurement.2005.10.011.
6. Forbes A.B., Sousa J.A., The GUM, Bayesian inference and the observation and measurement equations, “Measurement”, Vol. 44, 2011, 1422–1435, DOI: 10.1016/j.measurement.2011.05.007.
7. Elster C., Bayesian uncertainty analysis compared with the application of the GUM and its supplements, „Metrologia”, Vol. 51, 2014, S159–S166, DOI: 10.1088/0026-1394/51/4/S159.
8. Forbes A.B., An MCMC algorithm based on GUM Supplement 1 for uncertainty evaluation, “Measurement”, Vol. 45, 2012, 1188–1199, DOI: 10.1016/j.measurement.2012.01.018.
9. Harris P.M., Cox M.G., On a Monte Carlo method for measurement uncertainty evaluation and its implementation, „Metrologia”, Vol. 51, 2014, S176–S182, DOI: 10.1088/0026-1394/51/4/S176.
10. Fotowicz P., Propagation of distributions versus law of uncertainty propagation, Series of Advances in Intelligent Systems and Computing, Vol. 440, Challenges in Automation, Robotics and Measurement Techniques. Springer International Publishing, 2016, 771779, DOI: 10.1007/978-3-319-29357-8_67.
11. Fotowicz P., Methods for calculating the coverage interval based on the Flatten-Gaussian distribution, “Measurement”, Vol. 55, 2014, 272–275, DOI: 10.1016/j.measurement.2014.05.006.
12. Fotowicz P., Obliczanie niepewności pomiaru zgodne z definicją przedziału rozszerzenia na przykładzie opracowania wyniku wzorcowania mikrometru, „Pomiary Automatyka Robotyka”, Nr 10, 2010, 48–52.
13. Granowski V.A., Siraja T.H., Metody obróbki eksperymentalnych danych pri izmiereniach, Energoatom-zdat oddz. Leningrad 1990.

Modifying the Approach for Calculating the Measurement Uncertainty

Abstract: Joint Committee for Guides in Metrology JCGM proposed the change of an approach for calculating the measurement uncertainty using the law of propagation of uncertainty. The purpose is a comparison between the results of a standard uncertainty calculation of the output quantity with the use of the law of propagation and applying the propagation of distributions using a Monte Carlo method. In the article a results of the adoption of new approach for calculating the standard uncertainty of the measuring instrument error is presented.

Keywords: measurement uncertainty, law of uncertainty propagation, propagation of distributions

dr inż. Paweł Fotowicz

uncert@gum.gov.pl

Absolwent Politechniki Warszawskiej. Studia ukończył na Wydziale Mechaniki Precyzyjnej w 1981 roku. Do 1999 roku pracował w Instytucie Metrologii i Systemów Pomiarowych PW, specjalizując się w problematyce laserowych technik pomiarowych, będąc współautorem sześciu patentów. Od 1999 roku pracuje w Głównym Urzędzie Miar, zajmując się zagadnieniami teoretycznymi metrologii, głównie teorią niepewności pomiaru. Jest autorem ponad stu publikacji – referatów i artykułów w czasopiśmie krajowych i zagranicznych.

