

**Waldemar MINKINA, Daniel KLECHA**POLITECHNIKA CZĘSTOCHOWSKA, INSTYTUT ELEKTRONIKI I SYSTEMÓW STEROWANIA  
ul. Armii Krajowej 17, 42-200 Częstochowa**Program do obliczania promieniowania temperaturowego obiektów****Prof. dr hab. inż. Waldemar MINKINA**

Ukończył w roku 1977 Wydział Elektryczny Politechniki Częstochowskiej, doktorat w 1983 r. w Instytucie Metrologii Elektrycznej Politechniki Wrocławskiej, habilitacja w 1995 r. na Wydziale Automatyki Politechniki Lwowskiej, tytuł profesora nauk technicznych w 2006 r. na AGH w Krakowie. Jest autorem i współautorem 7 książek i monografii, ponad 140 publikacji oraz 14 patentów i zgłoszeń patentowych. Specjalizuje się w problematyce dotyczącej szeroko rozumianej termometrii, termografii komputerowej, pomiarów cieplnych.

e-mail: [minkina@el.pcz.czest.pl](mailto:minkina@el.pcz.czest.pl)**Mgr inż. Daniel KLECHA**

Na Wydziale Elektrycznym Politechniki Częstochowskiej uzyskał w roku 2012 tytuł zawodowy magistra inżyniera Elektrotechniki oraz inżyniera Informatyki w roku 2013. Obecnie doktorant tego samego wydziału w Zakładzie Techniki Mikroprocesorowych, Automatyki i Pomiarów Ciepłych. Zajmuje się zagadnieniami analizy rozkładu pól temperatury z wykorzystaniem termografii komputerowej. Do tego celu tworzy autorskie oprogramowanie np. w środowisku Visual Studio 2010 Express z wykorzystaniem języka C#.

e-mail: [daniel.klecha@gmail.com](mailto:daniel.klecha@gmail.com)**Streszczenie**

W artykule dokonano analizy wzorów na obliczanie natężenia promieniowania (egzycytacji) w określonym paśmie długości fali. Aby zautomatyzować proces obliczeń stworzono w języku C# autorski program komputerowy. Rozwiązano przykładowe zadania porównując obliczenia odręczne z otrzymanymi w stworzonej aplikacji.

**Słowa kluczowe:** termowizja, funkcja ciała czarnego, prawo Plancka.**A program for calculation of temperature radiation of objects****Abstract**

The paper focuses on the analysis of equations for calculation of the radiation temperature of objects in the specified wavelength range. The application is written in Visual Studio 2010 Express which uses the language C#. It automates the calculations of the radiation intensity. The presented examples show that the results obtained from software and manual calculations are the same. The program uses the equation for Planck's law and the Stefan-Boltzmann law in the calculations [1]. Additionally, a chart presenting the radiation intensity for selected temperature is created. In the calculation the user can specify the following parameters: the object temperature, the wavelength range, the emissivity and surface area of the object. Use of the software allows for easy identification of the percentage of visible light, relative to the total radiation emitted by the object. The application can be used as a simple research tool and as an educational element to visualize the temperature characteristics of objects. It can be a popular tool because it does not need to be installed and requires only free Windows NET Framework to work.

**Keywords:** infrared thermography, blackbody radiation function, Planck's law.**1. Wstęp**

Promieniowanie ciepłe emituje każde ciało, którego temperatura jest wyższa do 0 K, czyli temperatury zera absolutnego. Obiekty, których temperatura jest niższa od 500 °C emitują promieniowanie podczerwone. Powyżej tej temperatury część promieniowania leży już w zakresie promieniowania widzialnego, co sprawia, że jest on postrzegany w świetle widzialnym jako gorący. Zależnie od temperatury ciało przybiera inną barwę, co pozwala w przybliżonym stopniu określić jego temperaturę [1]. Informacja o tym jaki procent całkowitego promieniowania stanowi promieniowanie widzialne wydaje się być interesująca, tym bardziej, że do tych obliczeń stworzono odpowiednie tablice [2]. Stosując przedstawioną niżej autorską aplikację, można szybciej i dokładniej dokonać odnośnych obliczeń. Pod koniec XIX wieku naukowcy starali się określić wzór opisujący natężenie promieniowania obiektu będącego funkcją długości fali oraz temperatury.

W roku 1900 właściwy wzór został przedstawiony przez Maxa Plancka. Planck opracował swój wzór na widmowe natężenie promieniowania dla ciała czarnego w sposób intuicyjny, niejako

zgadując jego poprawną formułę. Przez swoje odkrycie z roku 1900 wyprzedził on o kilka lat naukę i technikę [2].

**2. Równania określające natężenie promieniowania**

Podstawowym wzorem wykorzystywanym do obliczenia natężenia promieniowania ciała czarnego jest prawo Plancka [3, 4, 5]:

$$M_0(\lambda, T) = \frac{c_1}{\lambda^5 \left[ \exp\left(\frac{c_2}{\lambda \cdot T}\right) - 1 \right]} \quad (1)$$

gdzie:  $c = 299\,792\,458 \pm 1,2$  m/s - prędkość światła w próżni;  $h = (6,626176 \pm 0,000036) \cdot 10^{-34}$  W·s<sup>2</sup> - stała Plancka;  $k = (1,380662 \pm 0,000044) \cdot 10^{-23}$  Ws/K - stała Boltzmanna;  $c_1 = 2 \cdot \pi \cdot h \cdot c^2$  - pierwsza stała promieniowania;  $c_2 = h \cdot c / k$  - druga stała promieniowania.

Całkowanie wzoru Plancka w pełnym zakresie prowadzi do otrzymania wzoru określającego prawo Stefana-Boltzmana [1, 4]:

$$M_o(\lambda, T) = \sigma_o \cdot T^4 \quad (2)$$

gdzie:  $\sigma_o = \frac{2 \cdot \pi^5 \cdot k^4}{15 \cdot h^3 \cdot c^2} = (5,67032 \pm 0,00071) \cdot 10^{-8}$  W/(m<sup>2</sup> · K<sup>4</sup>)

- stała Stefana-Boltzmana promieniowania ciała czarnego.

Niekiedy istnieje potrzeba obliczenia udziału promieniowania ciała w danym przedziale (paśmie) długości fali  $\lambda_1 \div \lambda_2$  w odniesieniu do całkowitego natężenia promieniowania ciała czarnego, wysyłanego we wszystkich długościach fal. Można tego dokonać poprzez całkowanie wzoru Plancka (1) w tym zakresie długości fali [3, 5, 6]:

$$M_o(\lambda_1 \div \lambda_2, T) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_o(\lambda, T) d\lambda = \int_0^{\lambda_2} M_o(\lambda, T) d\lambda - \int_0^{\lambda_1} M_o(\lambda, T) d\lambda =$$

$$\int_{\lambda=0}^{\lambda_2} M_o(\lambda, T) d\lambda \cdot \frac{\int_{\lambda=0}^{\lambda_2} M_o(\lambda, T) d\lambda}{\int_{\lambda=0}^{\lambda_2} M_o(\lambda, T) d\lambda} - \frac{\int_{\lambda=0}^{\lambda_1} M_o(\lambda, T) d\lambda}{\int_{\lambda=0}^{\lambda_2} M_o(\lambda, T) d\lambda} =$$

$$\sigma_o \cdot T^4 \cdot [F(\lambda_2 \cdot T) - F(\lambda_1 \cdot T)] \quad (3)$$

gdzie  $F(\lambda_i \cdot T) = \frac{\int_0^{\lambda_i} M_o(\lambda, T) d\lambda}{\sigma_o \cdot T^4}$  jest bezwymiarową, stabilizowaną

funkcją udziału natężenia promieniowania ciała czarnego, w przedziale fali  $0 \div \lambda_i$ , w odniesieniu do całkowitego natężenia

promieniowania ciała czarnego, wysyłanego we wszystkich długościach fali. Zwana jest krótko funkcją promieniowania ciała czarnego (ang. blackbody radiation function). Wartość tej funkcji można obliczyć analitycznie za pomocą wzoru przybliżonego [5]:

$$x = \frac{c_2}{\lambda_i \cdot T}$$

- jeśli  $x \geq 2$ , to:

$$F(\lambda_i \cdot T) = \frac{15}{\pi^4} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\exp(-xj)}{j^4} \cdot \{[(jx + 3) \cdot jx + 6] \cdot jx + 6\} \quad (4)$$

- jeśli  $x < 2$ , to:

$$F(\lambda_i \cdot T) = 1 - \frac{15}{\pi^4} \cdot x^3 \cdot \left( \frac{1}{3} - \frac{x}{8} + \frac{x^2}{60} - \frac{x^4}{5040} + \frac{x^6}{272160} - \frac{x^8}{13305600} \right)$$

Wartości funkcji promieniowania ciała czarnego dla wybranych argumentów podano w tabeli 1 [5]. Wykorzystanie tablic ułatwia obliczenia jednak wiąże się to z pewnym przybliżeniem wyników.

Tab. 1. Wartości funkcji promieniowania ciała czarnego  $F(\lambda_i \cdot T)$  dla wybranych argumentów  $\lambda_i \cdot T$ ,  $\mu\text{mK}$  [5]  
 Tab. 1. The values of the blackbody radiation function  $F(\lambda_i \cdot T)$  for selected arguments  $\lambda_i \cdot T$ ,  $\mu\text{mK}$  [5]

$\lambda_i \cdot T$ , $\mu\text{mK}$	$F(\lambda_i \cdot T)$	$\lambda_i \cdot T$ , $\mu\text{mK}$	$F(\lambda_i \cdot T)$
555,6	$0,170 \cdot 10^{-7}$	1666,7	0,02537
666,7	$0,756 \cdot 10^{-6}$	1777,8	0,03677
722,2	$0,106 \cdot 10^{-4}$	1888,9	0,05059
888,9	$0,738 \cdot 10^{-4}$	2000,0	0,06672
1000,0	$0,321 \cdot 10^{-3}$	2111,1	0,08496
1111,1	0,00101	2222,2	0,10503
1222,2	0,00252	2333,3	0,12665
1333,3	0,00531	2444,4	0,14953
1444,4	0,00983	2555,6	0,17337
1555,6	0,01643	2666,7	0,19789

Tab. 2. Wartości natężenia promieniowania ciała czarnego  $M_o(\lambda_1 \div \lambda_2, T)$ ,  $\text{W/m}^2$ , dla wybranych szerokości pasma czułości detektora  $\lambda_1 \div \lambda_2$  oraz temperatury  $T$   
 Tab. 2. The values of the intensity of blackbody radiation  $M_o(\lambda_1 \div \lambda_2, T)$ ,  $\text{W/m}^2$ , for selected detector bandwidth sensitivity  $\lambda_1 \div \lambda_2$  and temperature  $T$

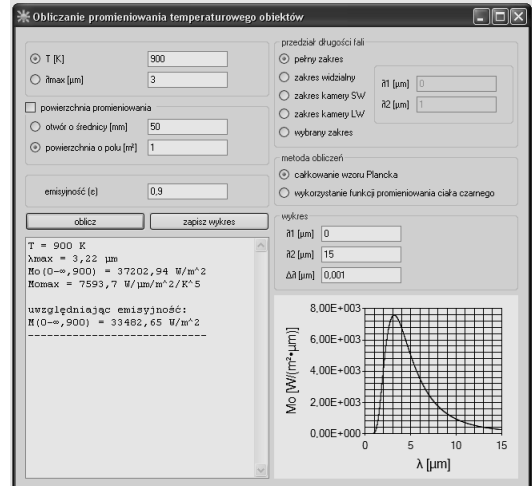
$T$ , K	$\lambda_1 \div \lambda_2$		
	3÷5	8÷14	0÷∞
300	5,85	173	459
310	8,33	200	524
373	50,9	429	1097
500	526	1160	3543
750	5800	3340	17940

### 3. Program komputerowy

W celu zautomatyzowania obliczeń związanych z wyznaczeniem natężenia promieniowania w określonym zakresie utworzono aplikację komputerową, napisaną w środowisku Visual Studio 2010 Express z wykorzystaniem języka c#.

Danymi wejściowymi do programu są: przedział długości fali, emisyjność oraz powierzchnia promieniowania obiektu. Obliczenie natężenia promieniowania jest możliwe do wykonania dwoma sposobami. W pierwszym całkowany jest wzór Plancka metodą trapezów. Stosując inne metody całkowania np. metodę prostokątów czy Simpsona uzyskano bardzo zbliżone wyniki. Drugi sposób polega na wykonaniu obliczeń, wykorzystując prawo Stefana-Boltzmana – wzór (3).

Dodatkowym atutem programu jest generowanie wykresu natężenia promieniowania dla określonej temperatury z zaznaczeniem pasma w którym natężenie jest obliczane.



Rys. 1. Aplikacja komputerowa  
 Fig. 1. The desktop application

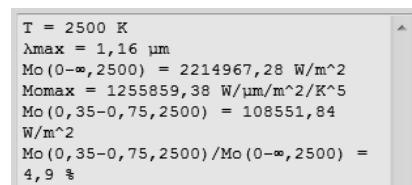
### 4. Przykładowe obliczenia

Aby przedstawić działanie aplikacji wykorzystano przykłady dostępne w monografii [3].

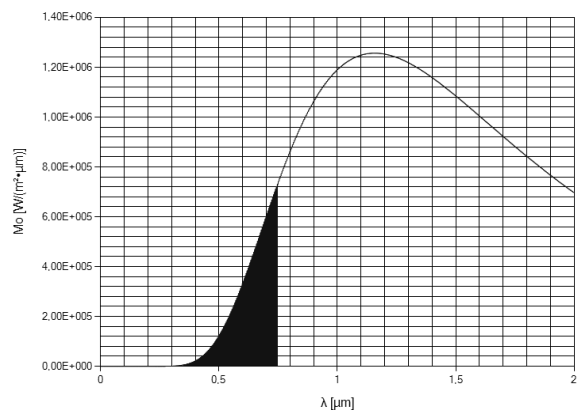
**Przykład 1.** Obliczyć, jaki procent wysyłanego promieniowania przez włókno wolframowe żarówki o temperaturze  $T = 2500$  K leży w zakresie promieniowania widzialnego.

**Rozwiązanie:** Promieniowanie widzialne znajduje się w przedziale długości fali od  $\lambda_1 = 0,35 \mu\text{m}$  do  $\lambda_2 = 0,75 \mu\text{m}$ . Wykorzystując tabelę 1 oraz przyjmując temperaturę obiektu  $T = 2500$  K otrzymuje się odpowiednio: dla  $\lambda_1 \cdot T = 0,35 \cdot 2500 = 875 \mu\text{m} \cdot \text{K}$  a stąd funkcja promieniowania ciała czarnego wyniesie  $F(\lambda_1 \cdot T) = 0,00006$ , zaś dla  $\lambda_2 \cdot T = 0,75 \cdot 2500 = 1875 \mu\text{m} \cdot \text{K}$ , a stąd  $F(\lambda_2 \cdot T) = 0,05050$ . Uwzględniając wzór (3) otrzymuje się  $F(\lambda_2 \cdot T) - F(\lambda_1 \cdot T) = 0,5044$ . Zatem około 5,04 % energii wysyłanej przez włókno wolframowe żarówki o  $T = 2500$  K leży w zakresie promieniowania widzialnego.

Wykorzystując do przykładu możliwości aplikacji, po zadaniu odpowiednich danych wejściowych, otrzymuje się wyniki jak na rysunku 2 oraz 3.



Rys. 2. Wyniki dla przykładu 1  
 Fig. 2. The results for example 1



Rys. 3. Wykres dla przykładu 1  
 Fig. 3. The chart for example 1

Wyniki z obu obliczeń są zbliżone do siebie. Należy mieć jednak na uwadze, że program całkuje wzór Plancka będący wzorem idealnym, dlatego wynik 4,90% jest dokładniejszy.

Dla porównania przeanalizowano przypadek w którym ciało będzie posiadało temperaturę  $T = 850$  K. Z obliczeń wynika, że wtedy natężenie promieniowania w zakresie widzialnym będzie wyniosło  $0,01$  W/m<sup>2</sup>, co było bliskie zeru procent zakresu całkowitego. Niemniej jednak taki obiekt byłby już postrzegany w zakresie widzialnym jako gorący.

**Przykład 2.** Obliczyć procentowy udział promieniowania dwóch obiektów (ciał czarnych) o temperaturach  $T_1 = 300$  K oraz  $T_2 = 500$  K wysyłanego do detektora kamery termowizyjnej, pracującego w zakresie widmowym  $\lambda_1 = 8$   $\mu\text{m}$  oraz  $\lambda_2 = 14$   $\mu\text{m}$  ( $\lambda_1 \div \lambda_2 = 8 \div 14$   $\mu\text{m}$ ), w odniesieniu do detektora pracującego w pełnym zakresie widmowym  $\lambda_1 \div \lambda_2 = 0 \div \infty$   $\mu\text{m}$ .

**Rozwiązanie:** Na podstawie tabeli 2 należy najpierw wyznaczyć wartości natężenia promieniowania ciała czarnego dla podanych pasm czułości detektora oraz temperatury. Wynoszą one odpowiednio  $M_o(8 \div 14, 300) = 173$  W/m<sup>2</sup> oraz  $M_o(8 \div 14, 500) = 1160$  W/m<sup>2</sup>. Następnie, wykorzystując dane z tabeli 2, można wyznaczyć wartość natężenia promieniowania ciała czarnego dla  $\lambda_1 \div \lambda_2 = 0 \div \infty$   $\mu\text{m}$  oraz tych samych temperatur. Otrzymuje się:  $M_o(0 \div \infty, 300) = 459$  W/m<sup>2</sup> oraz  $M_o(0 \div \infty, 500) = 3543$  W/m<sup>2</sup>. Poszukiwane procentowe udziały promieniowania tych obiektów w poszczególnych pasmach promieniowania oraz temperaturach wynoszą odpowiednio:  $M_o(8 \div 14, 300)/M_o(0 \div \infty, 300) = (173/459) \cdot 100 = 37,7\%$  oraz  $M_o(8 \div 14, 500)/M_o(0 \div \infty, 500) = (1160/3543) \cdot 100 = 32,7\%$ .

Ponownie porównano obliczenia z wynikami z aplikacji komputerowej, otrzymując wyniki jak na rysunku 4.

```

T = 300 K
λmax = 9,66 μm
Mo(0-∞, 300) = 459,3 W/m^2
Mcmx = 31,25 W/μm/m^2/K^5
Mo(8-14, 300) = 172,6 W/m^2
Mo(8-14, 300)/Mo(0-∞, 300) = 37,58 %
-----
T = 500 K
λmax = 5,8 μm
Mo(0-∞, 500) = 3543,95 W/m^2
Mcmx = 401,88 W/μm/m^2/K^5
Mo(8-14, 500) = 1159,73 W/m^2
Mo(8-14, 500)/Mo(0-∞, 500) = 32,72 %

```

Rys. 4. Wyniki dla przykładu 2  
Fig. 4. The results for example 2

W tym przypadku wyniki obliczeń wykonanych za pomocą obydwóch metod są porównywalne.

**Przykład 3.** Obliczyć wartość mocy cieplnej wysyłanej przez obiekt o emisyjności 0,9 oraz powierzchni promieniowania równej 2 m<sup>2</sup>, którego temperatura wynosi 750 K. Dodatkowo, określić wartość natężenia promieniowania, docierającego do detektora długofalowej kamery termowizyjnej, pracującej w zakresie  $\lambda_1 \div \lambda_2 = 8 \div 14$   $\mu\text{m}$ .

**Rozwiązanie:** Na podstawie tabeli 2 należy wyznaczyć wartość natężenia promieniowania ciała czarnego dla  $\lambda_1 \div \lambda_2 = 0 \div \infty$   $\mu\text{m}$  dla temperatury 750 K. Otrzymuje się:  $M_o(0 \div \infty, 750) = 17940$  W/m<sup>2</sup>. Tą samą wartość można uzyskać bezpośrednio ze wzoru (2). Wartość mocy cieplnej wynosi:  $P = 17940 \cdot 2 = 35880$  W. Po uwzględnieniu emisyjności ostatecznie otrzymuje się:  $35880 \cdot 0,9 = 32292$  W. Aby obliczyć natężenie promieniowania docierające do detektora kamery długofalowej, należy także skorzystać z tabeli 2. Otrzymuje się:  $M_o(8 \div 14, 750) = 3340$  W/m<sup>2</sup>. Po uwzględnieniu emisyjności obiektu otrzymuje się:  $3390 \cdot 0,9 = 3006$  W/m<sup>2</sup>.

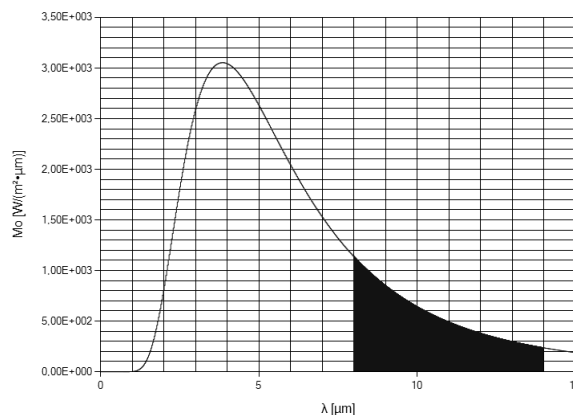
Wprowadzając dane zadania do autorskiego programu komputerowego otrzymuje się wyniki jak na rysunku 5. Można również przeanalizować przebieg funkcji natężenia promieniowania dla ciała czarnego o temperaturze takiej jak temperatura obiektu (rysunek 6).

```

T = 750 K
λmax = 3,86 μm
Mo(0-∞, 750) = 17941,23 W/m^2
Mcmx = 3051,74 W/μm/m^2/K^5
Mo(8-14, 750) = 3335,14 W/m^2
Mo(8-14, 750)/Mo(0-∞, 750) = 18,59 %
-----
uwzględniając emisyjność:
M(0-∞, 750) = 16147,11 W/m^2
M(8-14, 750) = 3001,63 W/m^2
-----
uwzględniając pole powierzchni:
P(0-∞, 750) = 32294,22 W
P(8-14, 750) = 6003,26 W
-----

```

Rys. 5. Wyniki dla przykładu 3  
Fig. 5. The results for example 3



Rys. 6. Wykres dla przykładu 3  
Fig. 6. The chart for example 3

Wyniki końcowe są zgodne w obydwóch sposobach rozwiązania przykładu.

## 5. Wnioski

Stworzony program komputerowy jest intuicyjny, łatwy w obsłudze, a co najważniejsze umożliwia otrzymanie w krótkim czasie prawidłowych wyników, bez potrzeby korzystania z dodatkowych tabel. Atutem programu jest także możliwość wizualizacji przebiegu natężenia promieniowania (egzycjancji) ciała czarnego dla określonej temperatury z wyróżnionym zakresem dla którego następują obliczenia.

## 6. Literatura

- [1] Minkina W.: Pomiary termowizyjne – przyrządy i metody. Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 2004.
- [2] Rudnicki Z.: Radiacyjny przepływ ciepła w piecach przemysłowych. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1998.
- [3] Kiejna A.: Stulecie wzoru i stałej Plancka. Postępy Fizyki, t. 51 (2000) z. 6, str. 294-302.
- [4] Minkina W. (red.): Wybrane problemy współczesnej termografii i termometrii w podczerwieni. Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 2011.
- [5] Więcek B., De Mey G.: Termowizja w podczerwieni: podstawy i zastosowania. Wydawnictwo PAK, Warszawa 2011.
- [6] Bayazitoglu Y., Özisik M. N.: Elements of heat transfer. McGraw-Hill Book Company, New York 1988.

otrzymano / received: 17.06.2013

przyjęto do druku / accepted: 01.08.2013

artykuł recenzowany / revised paper