

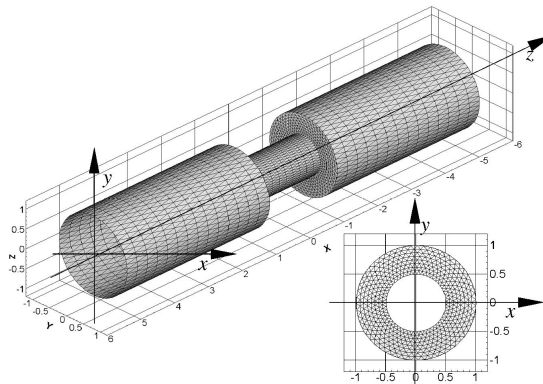
Tomasz Janusz TELESZEWSKI,
Sławomir Adam SORKO

Politechnika Białostocka, WBiIŚ, ul. Wiejska 45E, 15-351 Białystok,
E-mail: t.teleszewski@pb.edu.pl, s.sorko@pb.edu.pl

Wyznaczanie przepływów Stokesa w przewodach profilowanych metodą elementów brzegowych

1 Wstęp

W pracy przedstawiono zagadnienie wyznaczania laminarnego, ustalonego przepływu cieczy lepkiej (przepływ Stokesa) w profilowanych przewodach osiowo-symetrycznych przy użyciu metody elementów brzegowych (MEB). Określenie „przewód profilowany” jest rozumiane dalej jako przewód o przekroju kołowym, w którym występują nagłe zmiany promienia przewodu (uskoki wymiaru poprzecznego) (rys. 1), dyfuzory i konfuzory oraz inne lokalne przewężenia i poszerzenia przewodu o różnym kształcie. Prezentowana metoda rozwiązania zagadnienia przepływowego przy użyciu elementów brzegowych umożliwia analizę przepływu przez osiowo-symetryczne przewody o zmiennym profilu w przekroju wzdłużnym coraz częściej pojawiające się w inżynierskich konstrukcjach mikroskalowych, zagadnieniach przepływowych w biologii i medycynie oraz w inżynierskich zagadnieniach projektowania i optymalizacji układów i systemów hydraulicznych. Klasyczne obszarowe metody numeryczne, takie jak metoda elementów skończonych [1,2,3,4], metoda objętości skończonych [5,6,7] i metoda różnic skończonych [8], wymagają budowy siatek obliczeniowych. Przykłady stosowania nowoczesnych metod do rozwiązywania zagadnień przepływowych niewymagających budowy siatek znajdują się w publikacjach [9,10,11].



Rys. 1. Przewód osiowo-symetryczny z nagłym uskokiem przekroju

Fig. 1. Axi-symmetrical conduit with sudden change cross-section dimension

Ustalony, laminarny, izotermiczny przepływ cieczy lepkiej opisują równania: równanie Stokesa i równanie ciągłości [12]:

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \wp, \text{ gdzie } \wp = \frac{1}{\mu} \nabla p \equiv \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (1)$$

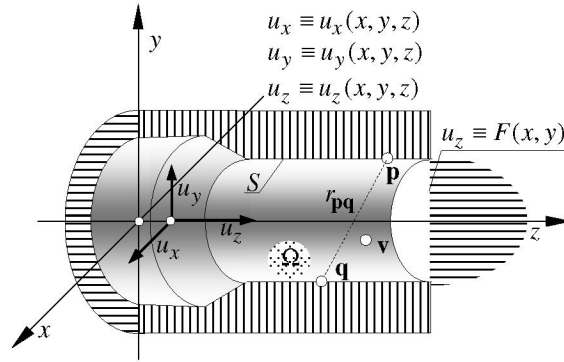
$$\nabla^2 \mathbf{u} = 0, \quad (1a)$$

gdzie $\mathbf{u} \equiv (u_x, u_y, u_z)$ jest prędkością ruchu cieczy, μ oznacza lepkość dynamiczną, a $\partial p / \partial z$ jest gradientem ciśnienia wzdłuż osi przewodu, (równanie (1) opisuje przepływ Stokesa z pominięciem wektora sił masowych) z warunkiem brzegowym wynikającym z postulatu przyczepności płynu do ścianek materialnych ograniczających przepływ (warunek braku poślizgu cieczy na ściance, rys. 2):

$$\mathbf{u}|_s = 0 \quad (1^*)$$

oraz warunkiem opisującym rozkład prędkości w przekroju wlotowym i wylotowym przewodu:

$$u_z(x, y)|_s = f(x, y) \quad (1^{**})$$



Rys. 2. Przepływ przez przewód osiowo-symetryczny ze zmianą przekroju poprzecznego (oznaczenia do analizy zagadnienia przepływowego metodą elementów brzegowych)

Fig. 2. Flow through axis-symmetrical conduit with change cross-section dimension (denotements for flow problem analysis by the boundary element method)

2 Całkowe sformułowanie zagadnienia obliczeniowego

Całkując równanie (1), otrzymuje się całkowe sformułowanie zagadnienia w postaci:

$$u_m(\mathbf{p}) = -\frac{1}{8\pi\mu} \iint_S \left[u_m(\mathbf{q})E_{mm}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + u_n(\mathbf{q})E_{nm}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + u_k(\mathbf{q})E_{km}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right] dS_{\mathbf{q}} + \frac{1}{8\pi} \iint_S \left[f_m(\mathbf{q})G_{mm}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + f_n(\mathbf{q})G_{nm}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + f_k(\mathbf{q})E_{km}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right] dS_{\mathbf{q}} \quad (2)$$

gdzie: $u_m(\mathbf{q})$; $u_n(\mathbf{q})$; $u_k(\mathbf{q})$ i $f_m(\mathbf{q})$; $f_n(\mathbf{q})$; $f_k(\mathbf{q})$ są odpowiednio składowymi prędkościami i wektora naprężeń lepkich w punktach: punkcie ustalonym $\mathbf{p} \equiv (x_p, y_p, z_p)$ w obszarze (Ω)

i punkcie bieżącym $\mathbf{q} \equiv (x_q, y_q, z_q)$ całkowania po brzegu (S). W równaniach (2) rozwiązania podstawowe $G_{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ i $E_{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ są odpowiednio równe [13, 14]:

$$G_{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \delta_{mn} \left(\frac{1}{r_{pq}} \right) + \frac{\chi_{mpq} \cdot \chi_{npq}}{r_{pq}^3}, \quad r_{pq} = |\mathbf{p} - \mathbf{q}|, \quad (2^1)$$

gdzie χ_{mpq}, χ_{npq} oznaczają różnice współrzędnych punktów ustalonego (\mathbf{p}) i bieżącego (\mathbf{q}) zgodne z indeksami funkcji $G_{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, natomiast δ_{mn} jest delta Kroneckera, oraz:

$$E_{mnk}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\delta_{mk} P_n + \left. \frac{\partial G_{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial \chi_k} \right|_{\mathbf{q}} + \left. \frac{\partial G_{kn}(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial \chi_m} \right|_{\mathbf{q}} = -6 \frac{\chi_{mpq} \cdot \chi_{npq} \cdot \chi_{kpq}}{r_{pq}^5} \quad (2^2)$$

$$P_n = 2 \frac{\chi_{mpq}}{r_{pq}^3}. \quad (2^3)$$

W równaniach (2) składowe wektora naprężenia będącego skutkiem działania tensora naprężenia $\sigma_{mn}(\mathbf{p}) = \tau_{mn}(\mathbf{p}) - p \delta_{mn}$ na normalną do powierzchni działania sił powierzchniowych są równe:

$$f_m(\mathbf{p}) = \sigma_{mn}(\mathbf{p}) n_n \mathbf{p} \quad ; \quad \sigma_{mn}(\mathbf{p}) = \mu \left(\frac{\partial u_m(\mathbf{p})}{\partial \chi_{np}} + \frac{\partial u_n(\mathbf{p})}{\partial \chi_{mp}} \right). \quad (3)$$

Sprowadzając zagadnienie opisane równaniami całkowymi (1) do wartości brzegowych w funkcji przyjętych warunków brzegowych (1*) i (1**), otrzymuje się trzy niezależne równania całkowe względem składowych wektora naprężeń lepkich:

$$\begin{aligned} & \iint_S \left[f_m(\mathbf{q}) G_{mm}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + f_n(\mathbf{q}) G_{nm}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + f_k(\mathbf{q}) E_{km}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right] dS_{\mathbf{q}} = \\ & -4\pi u_m(\mathbf{p}) + \frac{1}{\mu} \iint_S \left[u_m(\mathbf{q}) E_{mm}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + u_n(\mathbf{q}) E_{nm}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + u_k(\mathbf{q}) E_{km}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right] dS_{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (4)$$

$\mathbf{p}, \mathbf{q} \in S$

Po wyznaczeniu gęstości $f_m(\mathbf{q})$ na brzegu (S), składowe prędkości u_x, u_y, u_z , w obszarze (Ω) ($\mathbf{p} \in \Omega, \mathbf{q} \in S$) można opisać związkami całkowymi:

$$\begin{aligned} u_x(\mathbf{p}) = & -\frac{1}{8\pi\mu} \iint_{(S)} \left[f_x(\mathbf{q}) G_{xx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + f_y(\mathbf{q}) G_{yx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + f_z(\mathbf{q}) G_{zx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right] dS_{\mathbf{q}} \\ & + \frac{1}{8\pi} \iint_{(S)} \left[u_x(\mathbf{q}) E_{xx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + u_y(\mathbf{q}) E_{yx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + u_z(\mathbf{q}) E_{zx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right] dS_{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} u_y(\mathbf{p}) = & -\frac{1}{8\pi\mu} \iint_{(S)} \left[f_x(\mathbf{q}) G_{xy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + f_y(\mathbf{q}) G_{yy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + f_z(\mathbf{q}) G_{zy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right] dS_{\mathbf{q}} \\ & + \frac{1}{8\pi} \iint_{(S)} \left[u_x(\mathbf{q}) E_{xy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + u_y(\mathbf{q}) E_{yy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + u_z(\mathbf{q}) E_{zy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right] dS_{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (5b)$$

$$u_z(\mathbf{p}) = -\frac{1}{8\pi\mu} \iint_{(S)} \left[f_x(\mathbf{q})G_{xz}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + f_y(\mathbf{q})G_{yz}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + f_z(\mathbf{q})G_{zz}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right] dS_{\mathbf{q}} \\ + \frac{1}{8\pi} \iint_{(S)} \left[u_x(\mathbf{q})E_{xz}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + u_y(\mathbf{q})E_{yz}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + u_z(\mathbf{q})E_{zz}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right] dS_{\mathbf{q}} \quad (5c)$$

Równania całkowe (2) rozwiązuje się dyskretnie. Najprostszym przypadkiem realizacji metody elementów brzegowych jest przybliżenie powierzchni brzegowej elementami powierzchniowymi z lokalizacją w punktach kolokacji na elementach gęstości funkcji wynikające ze zdyskretyzowanych warunków brzegowych. W analizowanym zagadnieniu dyskretyzacja dotyczy powierzchni przewodu oraz przekroju wlotowego i wylotowego, a w punktach kolokacji tożsamy z środkami geometrycznym elementów trójkątnych zadano stałe wartości funkcji brzegowych.

Po wyznaczeniu składowych prędkości funkcję prądu Skokesa w przepływie osiowo-symetrycznym definiowaną jako:

$$u_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad , \quad u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad \text{gdzie: } u_r = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \quad , \quad (6)$$

wyznacza się dyskretnie przez numeryczne całkowanie związków $d\Phi = ru_z dz$ i $d\Phi = ru_r dr$ w ortogonalnych płaszczyznach, osiowej i normalnej.

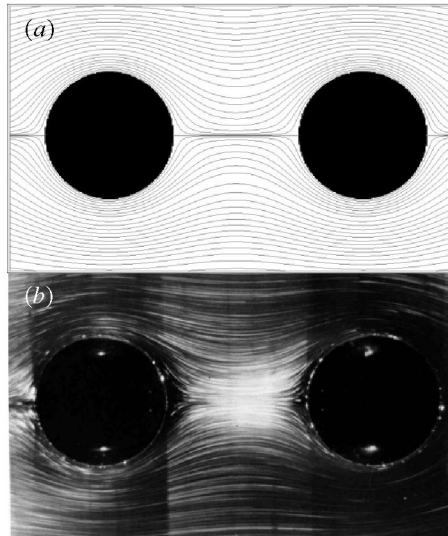
3 Porównanie numerycznego rozwiązania osiowo-symetrycznego przepływu Stokesa z rozwiązaniem analitycznym i eksperymentem

Podstawowym zagadnieniem testowym w zakresie laminarnych osiowo-symetrycznych laminarnych przepływów jest opływ kuli jednorodnym strumieniem cieczy [12]. Zagadnienie to ma również bogatą dokumentację w sferze pomiarów i wizualizacji przepływu.

Jakkolwiek przyjęty do porównania obliczeniowej poprawności proponowanego algorytmu obliczeniowego przypadek jest przepływem zewnętrznym (opływem bryły materialnej cieczą lepką), to w kategoriach brzegowych równań całkowych przepływ wewnętrzny w przewodach i kanałach jest opisywany tymi samymi równaniami całkowymi z identycznym warunkiem brzegowym, wynikającym z postulatu przyczepności cieczy lepkiej do ścianek ograniczających przepływ.

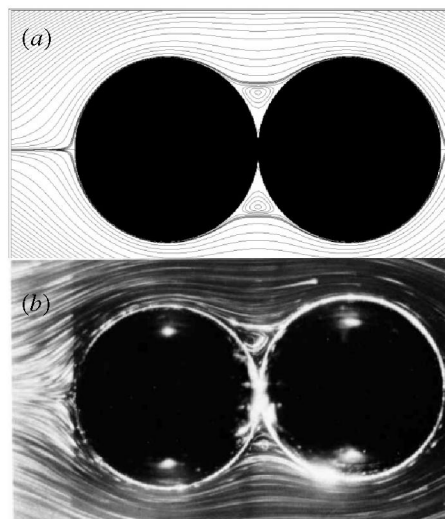
W celu walidacji metody elementów brzegowych porównano rezultaty obliczeń MEB linii prądu z fotografiami linii prądu otrzymanymi eksperymentalnie [15]. Wybrano dwa warianty opływu dwóch jednakowych kul. W pierwszym przykładzie odległość pierwszej kuli od drugiej równa jest średnicy pojedynczej kuli (rys.3). Cechą charakterystyczną tego przepływu jest brak wirów między kulami. Drugi przykład dotyczy opływu dwóch kul, między którymi odległość jest równa zero (rys.4). Cechą charakterystyczną drugiego wariantu są wiry powstałe między kulami.

Graficzne porównania linii prądu wyznaczonych MEB z eksperymentem przedstawiono na rysunkach 3a-b, natomiast dla drugiego wariantu na rysunkach 4a-b.



Rys. 3. Przepływ Stokesa - opływ dwóch kul: a) rozwiązanie numeryczne,
b) eksperyment; fotografia S. Taneda [15]

Fig. 3. Stokes flow over spheres: a) BEM solution, b) visualization result of Taneda
[15]



Rys. 4. Przepływ Stokesa - opływ dwóch kul: a) rozwiązanie numeryczne,
b) eksperyment; fotografia S. Taneda [15]

Fig. 4. Stokes flow over spheres: a) BEM solution, b) visualization result of Taneda
[15]

Trendy linii prądu będące rezultatem eksperymentu [15] są zgodne z rezultatami obliczeń metodą elementów brzegowych. Niewielka rozbieżność linii prądu między eksperymentem, a rezultatem numerycznym wynika z tego, że obliczenia wykonano dla teoretycznego przepływu Stokesa, gdzie liczba Reynoldsa wyniosła $Re=0.00$, natomiast wizualizację przepływu zrealizowano przy $Re=0,013$.

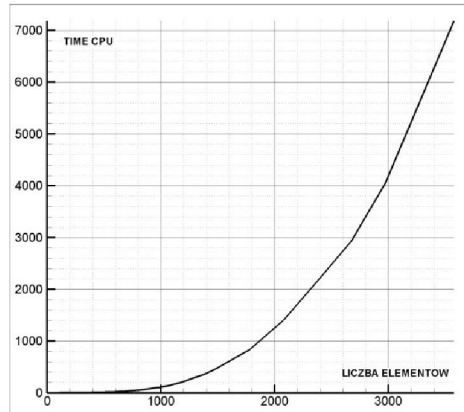
W celu weryfikacji prezentowanej metody MEB porównano rezultaty obliczeń MEB ze znanym rozwiązaniem analitycznym opływu kuli [12]:

$$u_r = -u_\infty \left[\frac{3}{2} \left(\frac{R}{r} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \cos(\theta) \quad , \quad u_\theta = u_\infty \left[\frac{3}{4} \left(\frac{R}{r} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \sin(\theta) \quad , \quad (7)$$

gdzie: (θ) jest kątem środkowym w płaszczyźnie osiowej w kierunku napływu strumienia swobodnego cieczy z prędkością $u_\infty = const$.

Maksymalny błąd metody brzegowych równań całkowych, wyznaczony jako różnica prędkości z rozwiązania analitycznego i rozwiązania dyskretnego odniesiona do prędkości rozwiązania teoretycznego, nie przekracza wartości 1,00% dla brzegu złożonego z 1000 trójkątnych elementów i 0,60% dla brzegu zbudowanego z 2000 elementów. Wraz ze wzrostem podziału powierzchni brzegu, błąd MEB maleje.

Obliczenia wykonano na klasycznym komputerze PC wyposażonym w procesor Intel i7 2.93 GHz 64bit i 4MB pamięci RAM. Na rysunku 5 przedstawiono zależność czasu wykonywania obliczeń od liczby paneli na brzegu kuli.



Rys. 5. Zależność czasu obliczeń od liczby elementów na brzegu kuli

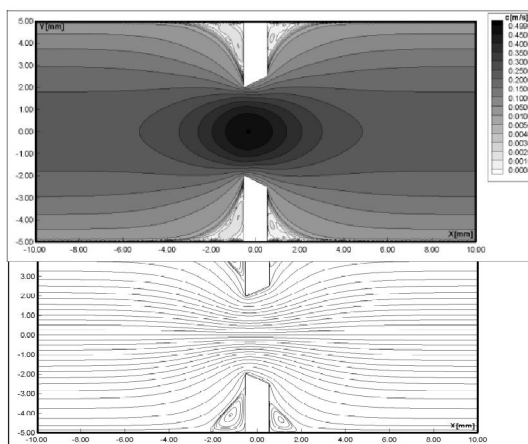
Fig. 5. CPU time as a function of the number of elements for boundary

4 Przykłady obliczeniowe

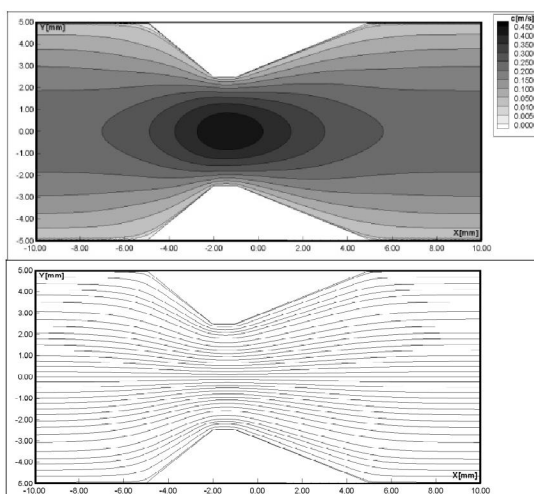
Poniżej przedstawiono przykłady obliczeniowe przepływów Stokesa w przewodach prostoosiowych o przekroju kołowym z zadaną osiowo-symetryczną przeszkodą. Do obliczeń przyjęto przewód o średnicy 10 mm przez który przepływa gliceryna ($\mu=1,499$ Pa s). Wszystkie obliczenia wykonano przy jednostkowej liczbie Reynoldsa dla brzegu zbudowanego z 1000 paneli.

*Wyznaczanie przepływów Stokesa w przewodach
profilowanych metodą elementów brzegowych*

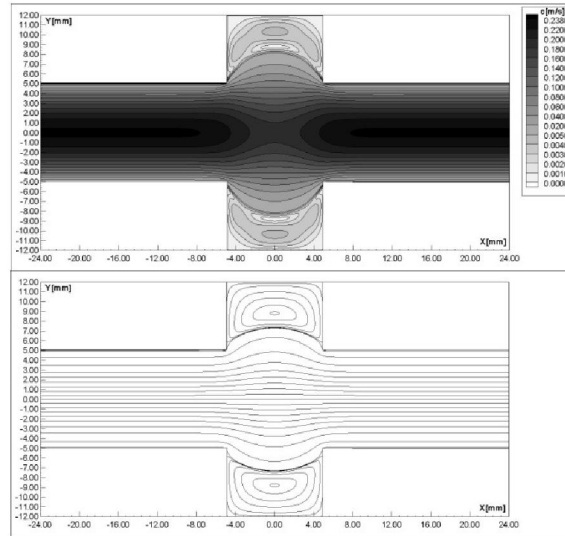
Na rysunku 6a przedstawiono linie prądu w przepływie Stokesa przez kryżę, natomiast na rysunku 6b pole prędkości. Cechą charakterystyczną tego przepływu są wiry zlokalizowane przed i za kryżą. W drugiej symulacji wyznaczono linie prądu (rys. 7a) oraz pole prędkości (rys. 7b) przepływu Stokesa przez zwężkę Venturiego, której kształt eliminuje zawirowania. Trzeci przykład dotyczy przepływu przez gwałtowne rozszerzenie z wirami zlokalizowanymi w rozszerzeniu (rys. 8 a,b). W ostatniej symulacji wyznaczono linie prądu (rys. 9a) oraz pole prędkości (rys. 9b) przepływu przez łagodne rozszerzenie, którego kształt nie powoduje powstania wiru wewnątrz rozszerzenia.



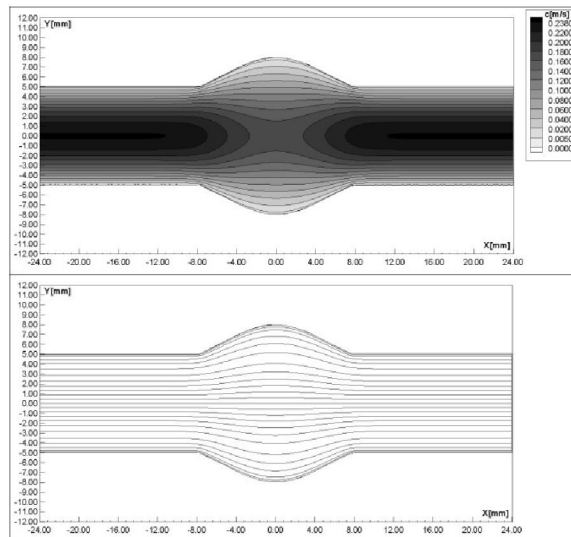
*Rys. 6. Przepływ przez kryżę: a) pole prędkości, b) linie prądu,
Fig. 6. Flow through metering orifice: a) velocity field, b) streamlines*



*Rys. 7. Przepływ przez zwężkę: a) pole prędkości, b) linie prądu
Fig. 7. Flow through metering nozzle: a) velocity field, b) streamlines*



Rys. 8. Przepływ przez gwałtowne rozszerzenie: a) linie prądu, b) pole prędkości
Fig. 8. Flow through deep caving: a) streamlines, b) velocity field



Rys. 9. Przepływ przez łagodne rozszerzenie: a) linie prądu, b) pole prędkości
Fig. 9. Flow through rounded caving: a) streamlines, b) velocity field

5 Podsumowanie

Przedstawiona metoda zastosowania elementów brzegowych do wyznaczania osiowo-symetrycznych przepływów Stokesa w profilowanych przewodach o przekroju kołowym pozwala w sposób efektywny wyznaczać linie prądu, pola prędkości, rozkłady ciśnień i wirowości bez budowy skomplikowanych i pracochłonnych przestrzennych siatek wewnątrz przewodu. Dyskretyzacji podlega jedynie brzeg przekroju podłużnego przewodu. Eliminacja trójwymiarowej siatki przekłada się również na redukcję czasu trwania obliczeń numerycznych. Wadą prezentowanej metody jest zawężenie zagadnienia jedynie do przepływów osiowo-symetrycznych. Należy tu zaznaczyć, że analityczne rozwiązania przepływów Stokesa opracowane są jedynie dla najprostszych przypadków. Opracowana metoda szczególnie może być przydatna do wstępnego projektowania i wyznaczania parametrów przepływu kryz, dysz i zwężek Venturiego, projektowania optymalnych kształtów redukcji oraz rozszerzeń w instalacjach lub sieciach transportujących płyny lepkie, a także do symulacji przepływów w mikrokanałach [16], tam, gdzie koszty eksperymentu są wysokie, np. przepływy krwi w tętniczkach [17] dla bardzo małych liczb Reynoldsa.

Literatura

1. Chung T.J.: *Finite Element Analysis in Fluid Dynamics*. Mc-Graw-Hill, New York 1978
2. Zieniewicz O.C., Taylor R.L.: *The Finite Element Method Fluid Dynamics*. Fifth Edition, Vol. 3, Elsevier, Singapore, 2005
3. Tsepelev I.A., Korotkii A.I., Ismail-Zadeh A.T.: *Numerical approach to 3D forward modeling of slow viscous flow*, Computational Fluid and Solid Mechanics, Elsevier Science, Oxford, pp. 1169-1171, 2003
4. Fard A.S., Hulsén M.A., Anderson P.D.: Extended finite element method for viscous flow inside complex three-dimensional geometries with moving internal boundaries, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 70, Issue 6, pp. 775–792, 2012
5. Versteeg H. K. , Malalasekera W.: *Introduction to Computational Fluid Dynamics, The Finite Volume Method*, NY, 1995
6. Sahina M., Wilson H.J.: A semi-staggered dilation-free finite volume method for the numerical solution of viscoelastic fluid flows on all-hexahedral elements, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 147, Issues 1–2, 2007, pp. 79–91
7. Li J., Chen Z., He Y.: A stabilized multi-level method for non-singular finite volume solutions of the stationary 3D Navier–Stokes equations, *Numerische Mathematik*, Volume 122, Issue 2, pp. 279-304
8. Barbosa E., Daube O.: A finite difference method for 3D incompressible flows in cylindrical coordinates, *Computers & Fluids*, Vol. 34, Issue 8, pp. 950–971, 2005
9. Tan F., Zhang Y., Li Y.: Development of a meshless hybrid boundary node method for Stokes flows, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 37, Issue 6, pp. 899–908, 2013
10. Frangi A.: A fast multipole implementation of the quadrature mixed-velocity–traction approach for exterior Stokes flows, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 29, Issue 11, pp. 1039–1046, 2005

11. Teleszewski T. J., Sorko S.A.: Zastosowanie metody elementów brzegowych do wyznaczenia płaskich przepływów cieczy lepkiej, *Acta Mechanica et Automatica*, Vol.5, nr 1, s. 94-105, 2011
12. Landau L.D., Lifshitz E.M.: *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, 1987
13. Brebbia C. A., Telles J.F.C., Wrobel L.C.: *Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering*. Springer-Verlag, NY, 1984
14. Brebbia C.A.: *Topics in Boundary Element Research Vol. 5. Viscous Flows Applications*, Springer-Verlag, NY, 1984
15. Taneda S.: Visualization of Separating Stokes Flows, *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol.46, No.6 pp. 1935-1942, 1979
16. Kim S., Karrila S.J.: *Microhydrodynamics: Principles and Selected Applications*. w Dover Publications 2005
17. Waite L., Fine J.: *Applied Biofluid Mechanics*, McGrawHill 2007

Streszczenie

W opracowaniu przedstawiono zastosowanie metody elementów brzegowych (MEB) do wyznaczenia przepływów Stokesa w profilowanych przewodach i kołowym przekroju poprzecznym metodą elementów brzegowych. W celu walidacji metody elementów brzegowych porównano rozwiązania numeryczne zrealizowane metodą elementów brzegowych z rozwiązaniem analitycznym i rezultatami eksperymentalnymi. W prezentowanej pracy przedstawiono graficzne rezultaty obliczeń dla wybranych przykładów, dla których nie są znane rozwiązania analityczne.

Słowa kluczowe: metoda elementów brzegowych, przepływ Stokesa, przepływ osiowo-symetryczny

Simulation of Stokes flow through circular pipe with changing of axisymmetric shapes by using the Boundary Element Method

Summary

The aim of the article is to present a simulation of steady Stokes flow with in a circular pipe with changing axisymmetric of radius of the tube using the Boundary Element Method (BEM). Results of this method were compared with experiment result of Taneda and analytical solution. Examples of BEM solution Stokes flow through nozzle, deep caving and rounded caving are also presented. The software was written for a PC computer.

Keywords: boundary element method, Stokes flow, axisymmetric flow

Opracowanie zrealizowano w ramach z pracy statutowej Politechniki Białostockiej.