

Krok dyskretyzacji i nastawy PID w dyskretnym serwomechanizmie napięciowym

Andrzej Bożek, Leszek Trybus

Politechnika Rzeszowska, Katedra Informatyki i Automatyki, al. Powstańców Warszawy 12, 35-959 Rzeszów

Streszczenie: Przedstawiono metodę doboru kroku dyskretyzacji i nastaw dyskretnego regulatora PID dla modelu serwomechanizmu z silnikiem sterowanym napięciowo, opisanym jako integrator ze stałą czasową. Założeniem metody jest lokalizacja potrójnego bieguna układu zamkniętego, aby zapewnić gładkie przebiegi regulacyjne. Daną projektową stanowi czas regulacji. Zbadano, w jakim stopniu filtracja składowej różniczkującej regulatora skraca wymagany krok dyskretyzacji. Rozważono także rozszerzony problem projektowy z zadaniem dodatkowo stopniem filtracji.

Słowa kluczowe: serwomechanizm napięciowy, integrator ze stałą czasową, regulator PID, sterowanie dyskretne, krok dyskretyzacji

1. Wprowadzenie

Serwomechanizmy, inaczej serwonapędy, są końcowymi urządzeniami wykonawczymi robotów, obrabiarek, przenośników itp. Analizy, metody projektowania i zastosowania serwomechanizmów można znaleźć np. w [1, 2]. Do napędu wykorzystuje się silniki z magnesami trwałymi, przeważnie bezszczotkowe silniki prądu stałego BLDC (ang. *Brushless DC*), ale również synchroniczne silniki prądu zmiennego PMSM (ang. *Permanent Magnet Synchronous Motor*). Sterowanie silnikiem odbywa się przez regulację napięcia lub prądu. Pomijając tarcie, modelem silnika sterowanego napięciowo jest integrator ze stałą czasową, a silnika sterowanego prądowo podwójny integrator [1, 3]. Do sterowania służy regulator PID, który na ogół implementuje się w formie dwóch pętli, wewnętrznej prędkościowej z regulatorem PI i zewnętrznej pozycyjnej z regulatorem P [1].

Nastawy regulatora PID dobierane są metodą częstotliwościową [1, 4] zakładając częstotliwość naturalną i współczynnik tłumienia. Sterowanie dyskretne serwomechanizmami jest rzadko stosowane ze względu na bardziej złożony tok projektowania wymagający zastosowania przekształcenia Z oraz doboru kroku dyskretyzacji, inaczej kroku próbkowania lub czasu cyklu. W praktyce obliczone nastawy regulatora ciągłego modyfikuje się ręcznie, jeśli jest to potrzebne dla dostosowania w implementacji cyfrowej. Wskazuje się jednak na konkretne zalety bezpośredniego projektowania w dziedzinie dyskretniej, np. w odniesieniu do napędów nieliniowych [5] lub przy sterowaniu silnika w pętli ze zmiennymi opóźnieniami [6]. Inną zaletą, na

której koncentruje się niniejsza praca, jest możliwość znacznej redukcji obciążenia procesora sterującego przez przynajmniej kilkukrotne wydłużenie kroku dyskretyzacji w stosunku do wymaganego dla nastaw z modelem ciągłym.

W przypadku serwomechanizmu prądowego relatywnie długi krok dyskretyzacji oraz odpowiadające mu nastawy PID można dobrać metodą linii pierwiastkowych [4, 7] lub metodą lokalizacji bieguna wielokrotnego [8], zbliżoną do metody IMC [9] (ang. *Internal Model Control*). Daną projektową jest czas regulacji lub odpowiadająca mu stała czasowa układu zamkniętego, jak w metodzie IMC. W tym kontekście celem niniejszej pracy jest dobór kroku i nastaw PID w dyskretnym serwomechanizmie napięciowym metodą lokalizacji bieguna. Rozważono ponadto wpływ filtracji składowej różniczkującej regulatora na długość kroku i nastawy. Praca rozpoczyna się od omówienia toku projektowania regulatora ciągłego celem ilustracji metody oraz porównania nastaw ciągłych z nastawami dyskretnymi wyznaczonymi w następnych punktach.

2. Sterowanie ciągłe z podwójną stałą czasową

Rozważany jest model układu sterowania serwomechanizmem napięciowym z rys. 1 zawierający silnik o wzmacnieniu prędkościowym k_v i stałej czasowej T . Standardowy regulator PID ma postać

$$\begin{aligned} R(s) &= k_p + \frac{k_I}{s} + k_D s = k_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) = \\ &= k_p \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{(T_1 + T_2) s}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$T_I = T_1 + T_2, \quad T_D = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \leq \frac{T_I}{4}.$$

Autor korespondujący:

Andrzej Bożek, abozek@prz.edu.pl

Artykuł recenzowany

nadesłany 01.01.2022 r., przyjęty do druku 02.02.2022 r.



Zezwala się na korzystanie z artykułu na warunkach licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 3.0

Filtr F służy do eliminacji przeregulowania. Celem projektowania jest dobór takich nastaw regulatora PID i filtru F , aby układ zamknięty miał postać transmitancji

$$G_{cl}(s) = \frac{1}{(T_{cl}s + 1)^2}, \quad (2)$$

z podwójną stałą czasową T_{cl} zapewniającą wymagany czas regulacji t_s [1, 4]. Przyjmujemy, że $T_{cl} = t_s/6$, co oznacza osiągnięcie 98 % wartości wielkości zadanej w czasie t_s .

Prostą metodą doboru nastaw regulatora PID w takim układzie jest eliminacja stałej czasowej T przez przyjęcie $T_2 = T$. Transmitancja układu otwartego ma wtedy postać

$$G_{op}(s) = k_p k_v \frac{T_1 s + 1}{(T_1 + T) s^2}. \quad (3)$$

Mianownik transmitancji układu zamkniętego doprowadzony do formy z wyrazem wolnym równym 1 powinien wtedy odpowiadać mianownikowi z (2). Wyraża to równanie

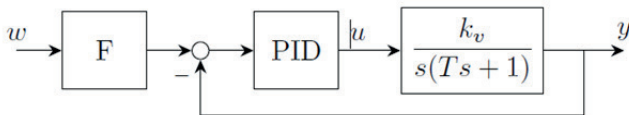
$$\frac{T_1 + T}{k_p k_v} s^2 + T_1 s + 1 = (T_{cl} s + 1)^2, \quad (4)$$

z którego wprost otrzymuje się nastawy k_p , T_1 w zależności od T_{cl} , w tym $T_1 = 2T_{cl}$. Ponieważ $T_{cl} = t_s/6$, więc ostatecznie

$$T_1 = \frac{t_s}{3}, \quad k_p = \frac{36(T_1 + T)}{k_v t_s^2}. \quad (5)$$

Transmitancja układu z rys. 1 przyjmuje formę (2) dla filtru F postaci $1/(T_1 s + 1)$.

Po normalizacji czasu względem wartości t_s oraz normalizacji zmiennych modelu względem zakresów prędkości silnika i napięcia sterującego przeprowadzonych w celu uniknięcia wprowadzania jednostek fizycznych, dostajemy w ogólnym przypadku $k_v = 1$, $t_s = 1$. Biorąc dla przykładu $T = 1$ (znormalizowane), otrzymujemy z (5) $T_1 = 1/3$, $T_2 = 1$, $k_p = 48$, $T_1 = 4/3$, $T_D = 1/4$, $k_i = k_p/T_1 = 36$, $k_D = k_p T_D = 12$. Wyjaśnimy, że ponieważ cechą serwomechanizmów jest szybkie reagowanie, dlatego przyjęto stałą czasową, dla której czas $t_s = 1$ jest czterokrotnie krótszy niż czas ustalania się (98 %) prędkości silnika w układzie otwartym, tzn. $4T = 4$.



Rys. 1. Model układu regulacji z silnikiem sterowanym napięciowo
Fig. 1. Model of a control system with a voltage controlled motor

W celu ograniczenia wpływu szybkich zmian wielkości zadanej i zakłóceń wysokoczęstotliwościowych na sterowanie, w praktycznych realizacjach algorytmu PID składowa różniczkująca $k_D s = k_p T_D s$ jest uzupełniana filtrem o stałej czasowej T_D/D określającej stopień filtracji, czyli ma postać

$$\frac{k_D s}{(T_D/D)s + 1} = \frac{k_D N}{1 + N/s}, \quad N = \frac{D}{T_D}, \quad (6)$$

w nawiązaniu do oznaczenia N przyjętego w pakiecie MATLAB [10]. Domyślna wartość dzielnika D w stałej czasowej T_D/D w bibliotekach oprogramowania sterowników waha się w przedziale od 5 do 10 (np. [11]). Można sprawdzić, że dla $D \geq 4$ odpowiedzi skokowe układu z filtracją różniczkowania oraz bez filtracji dla nastaw (5) są niemal identyczne. Również przebiegi

sterowań zachowują ten sam charakter. Jednakże, aby faktycznie realizowane sterowanie dyscretne można było traktować jako ciągłe, krok dyskretyzacji Δ dla takich nastaw powinien być dostatecznie mały, np. rzędu $t_s/100$ (por. [7]).

3. Sterowanie dyscretne z potrójnym biegunem

Dyscretny odpowiednik transmitancji $k_v/(s(Ts+1))$ można zapisać jako [4]

$$G(z) = k_o \frac{z - z_o}{(z - 1)(z - p_o)}. \quad (7a)$$

gdzie

$$k_o = k_v T (e^{-\Delta/T} + \Delta/T - 1), \quad p_o = e^{-\Delta/T},$$

$$z_o = -(1 - e^{-\Delta/T} (\Delta/T + 1)) / (e^{-\Delta/T} + \Delta/T - 1). \quad (7b)$$

Standardowy dyscretny regulator PID odpowiadający ciągłemu (1) z całkowaniem metodą prostokątów wstecz ma postać

$$R(z) = k_p + k_i \frac{\Delta z}{z - 1} + k_D \frac{z - 1}{\Delta z} = k_r \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{z(z - 1)}, \quad (8a)$$

gdzie

$$k_r = k_p + k_i \Delta + k_D / \Delta,$$

$$z_1 + z_2 = (k_p + 2k_D / \Delta) / k_r, \quad z_1 z_2 = k_D / (\Delta k_r). \quad (8b)$$

Eliminując jak poprzednio biegun p_o przez przyjęcie $z_2 = p_o$ otrzymujemy transmitancję układu otwartego

$$G_{op}(z) = K \frac{(z - z_o)(z - z_1)}{z(z - 1)^2}, \quad (9)$$

w której $K = k_o k_r$. W odróżnieniu od transmitancji (3), jest to teraz transmitancja 3-go rzędu.

Wzorując się na poprzednim postępowaniu zakładamy, że mianownik transmitancji układu zamkniętego powinien mieć potrójny pierwiastek z_3 , czemu odpowiada równanie

$$z(z - 1)^2 + K(z - z_o)(z - z_1) = (z - z_3)^3. \quad (10)$$

Przyrównując odpowiednie współczynniki po obydwu stronach otrzymuje się najpierw

$$K = 2 - 3z_3, \quad z_1 = \frac{z_3^3}{(3z_3 - 2)z_o}. \quad (11a)$$

a następnie równanie na z_3 postaci

$$z_3^3 / z_o - 3z_3^2 + 3z_3 - 1 = 0. \quad (11b)$$

Jest to równanie 3-go stopnia, którego jedyny pierwiastek rzeczywisty wynosi [12]

$$z_3 = z_o - \sqrt[3]{(z_o - 1)^2 z_o}. \quad (12)$$

Gdyby więc był dany krok Δ , to kolejno na podstawie wzorów (7b), (12), (11a) i $K = k_o k_r$ można byłoby obliczyć parametry k_r i z_1 regulatora dyscretnego ($z_2 = p_o$), a następnie oryginalne nastawy k_p , k_i i k_D ze wzorów (26) podanych w Dodatku. Daną projektową jest jednak czas regulacji t_s .

4. Krok dyskretyzacji a czas regulacji

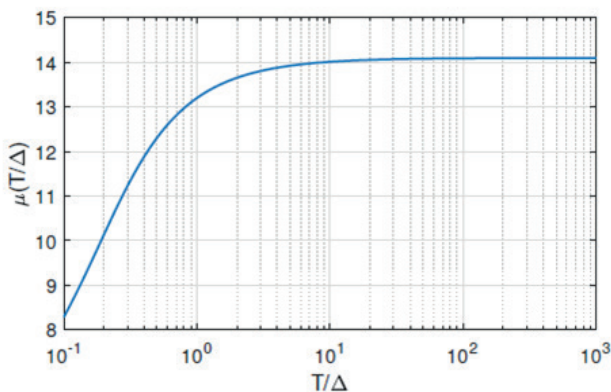
Czas regulacji t_s jest określony przez potrójny biegun $z_3 = e^{\Delta s_3}$, któremu odpowiada stała czasowa $T_{cl} = 1/|s_3| = \Delta/|\ln z_3|$. Odpowiedź skokowa układu o potrójnej stałej czasowej osiąga 98 % wartości ustalonej po 7,5 tych stałych, zatem

$$t_s = 7,5\Delta/|\ln z_3|. \quad (13a)$$

Ponieważ z_3 , wobec (12) i (7b), zależy tylko od Δ/T (lub T/Δ), można więc napisać

$$t_s = \Delta\mu(T/\Delta) \quad (13b)$$

z funkcją $\mu(T/\Delta) = 7,5/|\ln z_3|$ określoną przez (7b) i (12). Wykres jej podano na rys. 2. W przypadku danych T, Δ można byłoby z wykresu określić wartość μ i wyznaczyć czas t_s z (13b).



Rys. 2. Wykres funkcji $\mu(T/\Delta)$ określającej czas regulacji
Fig. 2. Plot of the $\mu(T/\Delta)$ function determining the settling time

W celu uproszczenia obliczeń wykorzystamy fakt, że wartość parametru z_0 określona w (7b) jest bliska -1 , tzn.

$$\lim_{T/\Delta \rightarrow \infty} z_0 = \lim_{T/\Delta \rightarrow 0^+} z_0 = -1. \quad (14a)$$

Wstawiając to do (12), a następnie do (13b) otrzymuje się

$$\lim_{T/\Delta \rightarrow \infty} \mu(T/\Delta) = 7,5 / \left| \ln(\sqrt[3]{4} - 1) \right| \cong 14,1. \quad (14b)$$

Powyższy wynik oraz wykres z rys. 2 pokazują, że formuła

$$t_s = 14\Delta \quad (15)$$

stanowi dobre przybliżenie czasu regulacji dla $T > \Delta$, a bardzo dobre dla $T > 10\Delta$. Analogiczny wzór dla silnika sterowanego prądowo, którego modelem jest podwójny integrator, ma postać $t_s = 26\Delta$ [8]. Wymagany krok Δ jest więc niemal dwukrotnie dłuższy.

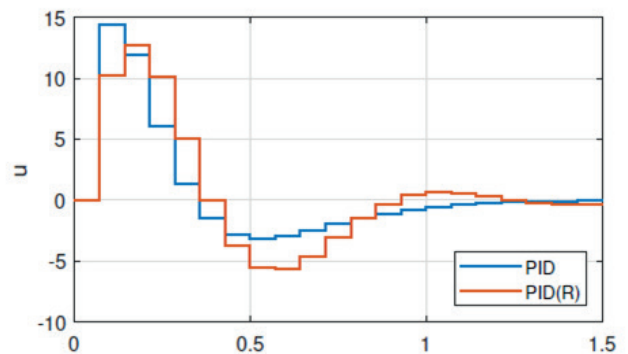
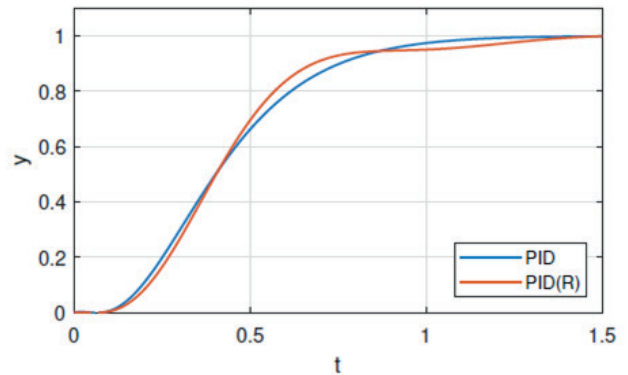
Tak więc mając dane t_s , parametry k_r, z_1, z_2 standardowego regulatora dyskretnego zapewniającego potrójny biegun układu zamkniętego można dobrać dla kroku dyskretyzacji $\Delta = t_s/14$ według obliczeń podanych w poprzednim punkcie. Oryginalne nastawy k_p, k_i i k_d wynikają ze wzorów (8b) i są podane jako (26) w Dodatku. Filtr F wielkości zadanej ma transmitancję $(1-z_1)/(z-z_1)$ z z_1 jak w (11a). Odpowiada temu stała czasowa $T_1 = \Delta/|\ln z_1|$.

Dla danych $k_v = T = t_s = 1$ jak w p. 2 i $\Delta = 1/14$ otrzymuje się kolejno $k_o = 2,491 \cdot 10^{-3}$, $p_o = 0,9311$, $z_o = -0,9765$, $z_3 = 0,5860$, $K = 0,2420$, $k_r = 97,13$, $z_1 = 0,8516$, $z_2 = p_o$ oraz $k_p = 19,12$, $k_i = 13,91$, $k_d = 5,501$, $T_1 = 0,4448$. Nastawy regulatora dyskretnego są więc około 2,5-krotnie mniejsze niż

regulatora ciągłego (por. p. 2). Odpowiedź skokową wraz ze sterowaniem pokazano na rys. 3.

5. Filtracja różniczkowania a krok dyskretyzacji

O ile w przypadku sterowania ciągłego nastawy regulatora wyznaczone dla różniczkowania bez filtracji można stosować dla dzielnika $D \geq 4$ w algorytmie z filtracją (p. 2), o tyle regulator dyskretny w analogicznej sytuacji powoduje pewne zafalowanie odpowiedzi skokowej (rys. 3). Krok dyskretyzacji Δ w stosunku do wyznaczonego poprzednio należałoby więc skrócić.



Rys. 3. Odpowiedź skokowa y i sterowanie u dla standardowego dyskretnego regulatora PID i regulatora PID(R) z filtracją różniczkowania przy jednakowym kroku dyskretyzacji (t, y, u znormalizowane)

Fig. 3. Step response y and control u for the standard discrete PID controller and the controller PID(R) with derivative filtering for the same discretization step (t, y, u normalized)

Można jeszcze dodać, że energia przeznaczona na sterowanie okazuje się wyraźnie mniejsza niż dla układu ciągłego, jak to pokazano w następnym punkcie. Przyczyna tkwi w mniejszych wartościach nastaw.

Rozważymy teraz dyskretny regulator PID z filtracją składowej różniczkującej w formie odpowiadającej (6), czyli

$$R(z) = k_p + k_i \frac{\Delta z}{z-1} + k_d \frac{N}{1 + N \frac{\Delta z}{z-1}} = k_r \frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z-1)(z-p_r)}, \quad (16a)$$

gdzie:

$$p_r = 1/(1 + N\Delta). \quad (16b)$$

Równania na $k_r, z_1 + z_2$ i $z_1 z_2$ podano jako (27) w Dodatku wraz z ich rozwiązaniami (28) określającymi wzmocnienia składowych regulatora.

Na podstawie (6) można również zapisać

$$p_r = e^{-\Delta D / T_D}, \quad (16c)$$

zatem związek między N a tak wyznaczonym p_r określa wzór

$$N = \frac{1}{\Delta} (e^{\Delta D / T_D} - 1). \quad (16d)$$

Porównując transmitancję regulatora (8a) z (16a) widać, że zamiast poprzedniego czynnika z w mianowniku mamy teraz $z - p_r$. Podobnie jest z mianownikami układu otwartego i zamkniętego.

Zakładając, że układ zamknięty ma mieć nadal potrójny biegun z_3 , po przekształceniach jak poprzednio otrzymuje się [12]

$$K = 2 + p_r - 3z_3, \quad (17)$$

$$z_1 = \frac{z_3^3 - p_r}{(3z_3 - p_r - 2)z_o},$$

$$z_3 = z_o - \sqrt[3]{(z_o - 1)^2(z_o - p_r)}.$$

Uwzględniając granicę -1 dla z_o mamy

$$z_3 = \sqrt[3]{4(1 + p_r)} - 1 \quad (18a)$$

oraz czas regulacji

$$t_s = 7,5\Delta / \left| \ln \left(\sqrt[3]{4(1 + p_r)} - 1 \right) \right|. \quad (18b)$$

Ze względu na p_r czas regulacji będzie teraz dłuższy niż poprzednio, o ile krok Δ nie zostanie skrócony.

Zauważmy jednak, że w układzie dyskretnym wartość $T_D = k_D/k_P$, którą należałoby użyć w (16c) dla ścisłego wyznaczenia parametru p_r jest wynikiem projektowania. Stąd znalezienie precyzyjnego T_D zapewniającego potrójny biegun dla założonego dzielnika D wymaga iteracyjnego poszukiwania (p. 6). Dlatego z praktycznych względów proponuje się tutaj najpierw rozwiązanie nieiteracyjne, które zapewniając potrójny biegun zwiększa jednak efektywną wartość dzielnika D , czyli mniej skuteczną filtrację składowej różniczkującej regulatora.

Niech Δ_0 i T_{D0} będą krokiem dyskretyzacji i czasem różniczkowania otrzymanymi w wyniku projektowania bez filtracji, czyli jak w p. 4 ($\Delta_0 = 1/14$, $T_{D0} = k_D/k_P = 0,288$ dla danych z przykłądu). Do projektowania przyjmujemy parametr

$$p_{r0} = e^{-\Delta_0 D_0 / T_{D0}} \quad (19)$$

z założoną wartością dzielnika D_0 . Niech teraz Δ oznacza taki krok, dla którego czas regulacji otrzymany w wyniku projektowania z parametrem p_{r0} jest równy wymaganemu t_s , tzn.

$$\Delta = \frac{t_s}{7,5 / \left| \ln \left(\sqrt[3]{4(1 + p_{r0})} - 1 \right) \right|} = \frac{t_s}{m} \quad (20)$$

wobec (18b). Wartość mianownika m określającego krok dyskretyzacji Δ podano w tab. 1 dla kilku reprezentatywnych wartości D_0 . Jak widać, dla $D_0 = 4$ krok Δ jest dwukrotnie krótszy niż dla przypadku bez filtracji ($D \rightarrow \infty$).

Tab. 1. Dzielnik D_0 a mianownik stosunku t_s/m określającego krok Δ
Tab. 1. Divisor D_0 vs. denominator of the ratio t_s/m determining the step Δ

D_0	1	4	5	6	8	10	∞
m	50	28	24	21	18	16	14

Należałoby jeszcze ocenić, ile wynosi efektywny dzielnik D wynikający z takiego projektowania. Niech k_p , k_i i k_D będą oryginalnymi nastawami otrzymanymi dla kroku Δ i parametru p_{r0} . Określają je wzory (28) w Dodatku dla N wyznaczonego z (16d),

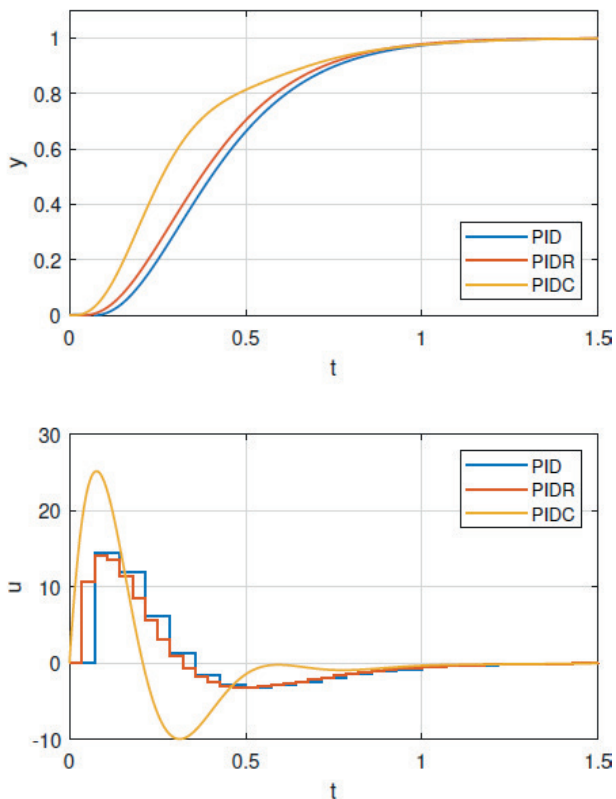
czyli $(1/p_{r0} - 1)/\Delta$. Mając czas różniczkowania $T_D = k_D/k_P$ ($= 6,012/22,52 = 0,2668$ w przykładzie) można również napisać

$$p_{r0} = e^{-\Delta D / T_D}, \quad (21)$$

gdzie D jest efektywnym dzielnikiem. Na podstawie (19) i (21) mamy

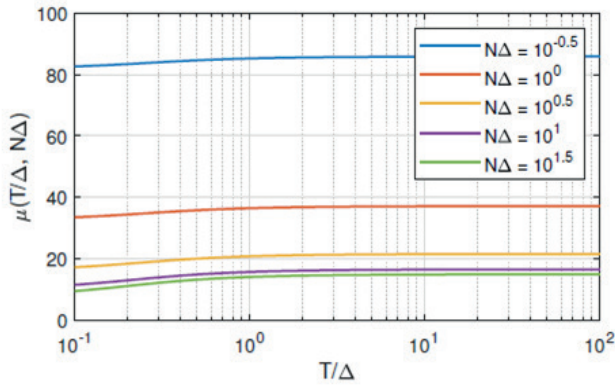
$$D = \frac{\Delta_0}{\Delta} \frac{T_{D0}}{T_D} D_0 \cong \frac{\Delta_0}{\Delta} D_0, \quad (22)$$

ponieważ czasy różniczkowania słabo zależą od kroku dyskretyzacji (por. T_D w p. 2, 4 i wyżej). Dla $D_0 = 4$, $\Delta_0 = t_s/14$, $\Delta = t_s/28$ (tab. 1) mamy $D \cong 2D_0$, co oznacza dwukrotnie słabszą filtrację w stosunku do założonego $D_0 = 4$. Odpowiedź skokową i sterowanie dla standardowego dyskretnego regulatora PID oraz regulatora z filtracją różniczkowania (krótszy krok) pokazano na rys. 4. Zamieszczono również przebiegi dla regulatora ciągłego PIDC z nastawami jak w p. 2 i filtracją różniczkowania z dzielnikiem $D = 4$. Energia sterowania (suma kwadratów u z uwzględnieniem Δ) dla PID, PIDR i PIDC wynosi odpowiednio 30,8, 29,5 oraz 77,3. Sterowanie dyskretne z odpowiednio dobranym krokiem okazuje się więc wyraźnie korzystniejsze energetycznie w liniowym zakresie pracy.



Rys. 4. Odpowiedź skokowa y i sterowanie u dla standardowego dyskretnego regulatora PID, regulatora PIDR z filtracją różniczkowania ($D_0 = 4$) oraz regulatora ciągłego PIDC z filtracją ($D = 4$)
Fig. 4. Step response y and control u for the standard discrete PID controller, the controller PIDR with derivative filtering ($D_0 = 4$), and the continuous controller PIDC with filtering ($D = 4$)

Powyższe wyniki dotyczyły szczególnej wartości p_{r0} parametru p_r w regulatorze PIDR. W ogólnym przypadku p_r jest dane wzorem (16b) w zależności od iloczynu $N\Delta$. Brak filtracji składowej różniczkującej regulatora oznacza $p_r = 0$, czyli $N\Delta \rightarrow \infty$. Wprowadzenie filtracji powoduje spadek $N\Delta$. Na rys. 5 pokazano nomogram funkcji $\mu(T/\Delta, N\Delta)$, która tutaj, podobnie jak poprzednio $\mu(T/\Delta)$ w (13b), określa liczbę kroków Δ przypadających na czas regulacji t_s . Jak widać, wraz ze wzrostem stopnia filtracji (spadek $N\Delta$) wymagana liczba kroków gwałtownie rośnie.



Rys. 5. Wykres funkcji $\mu(T/\Delta, N\Delta)$ określającej czas regulacji dla regulatora z filtracją składowej różniczkującej
 Fig. 5. Plot of the $\mu(T/\Delta, N\Delta)$ function determining the settling time for a controller with derivative component filtering

6. Czas regulacji a dzielnik filtracji

Niemożliwość osiągnięcia założonej wartości dzielnika D stwierdzona powyżej nie miałaby miejsca, gdyby wymaganie uzyskania czasu regulacji t_s uzupełnić wymaganiem dotrzymania założonej wartości D . Tak rozszerzony problem projektowy jest rozważany poniżej.

Dzielnik D , na podstawie wzorów (16b), (16c) oraz uwzględniając $T_D = k_D/k_P$ można zapisać w postaci

$$D = \frac{1}{\Delta} \frac{k_D}{k_P} \left| \ln \frac{1}{1 + N\Delta} \right| \quad (23)$$

z nastawami k_D, k_P jako funkcjami Δ i N zdefiniowanymi przez wzory (28) w Dodatku. Również czas t_s wyrażony w (13a) jest funkcją Δ i N , wobec z_3 jak w (17) i p_r jak w (16b). Określone są zatem pewne funkcje

$$t_s = \tau(\Delta, N), \quad D = \delta(\Delta, N). \quad (24)$$

Ponieważ jako dane projektowe przyjęto t_s i D , zatem w celu wyznaczenia nastaw regulatora należy najpierw rozwiązać układ równań (24) względem Δ i N , a następnie wyznaczyć nastawy według wzorów (28) z Dodatku.

Rozwiązanie układu (24) okazuje się jednak trudne zarówno analitycznie, jak i numerycznie. Bez trudności można natomiast uzyskać Δ i N w wyniku optymalizacji minimalizującej odchyłki od zadanych wartości projektowych t_s i D , tj. wyznaczając

$$(\Delta, N) = \arg \min_{(\tilde{\Delta}, \tilde{N}) \in \Delta \times N} \left\| \begin{array}{c} \tau(\tilde{\Delta}, \tilde{N}) - t_s \\ \delta(\tilde{\Delta}, \tilde{N}) - D \end{array} \right\|_2. \quad (25)$$

Dziedziny zmiennych decyzyjnych zostały zdefiniowane jako $\Delta = [\Delta_{\min}, \infty)$ i $N = [0, \infty)$ odpowiednio dla Δ i N , gdzie Δ_{\min} reprezentuje krok dyskretyzacji, poniżej którego zejście byłoby technicznie niemożliwe. Zadanie optymalizacji zdefiniowane w (25) może skutecznie rozwiązać np. funkcja pakietu MATLAB `fmincon` z domyślnymi parametrami konfiguracyjnymi. W ten sposób udaje się tak dobrać Δ i N , że przy spełnieniu pewnych dodatkowych warunków można uzyskać zadane t_s i D .

Kluczowym warunkiem jest dostatecznie mała wartość stosunku T/t_s dla danego D , a więc nie za mały czas regulacji względem stałej czasowej obiektu. Dla $T = 1$ udaje się uzyskać $t_s = 1$ dopiero, gdy $D \geq 6$, przy Δ_{\min} rzędu 10^{-3} . Z kolei przy $D \geq 4$ wymagane jest $t_s \geq 2,5T$ (albo $T \leq 0,4t_s$), co oznacza, że czas ustalania się prędkości silnika w układzie otwartym

($4T$) nie może być krótszy niż $1,6t_s$. Przykładowa optymalizacja (25) przeprowadzona dla danych $T = 0,4$, $D = 4$, $t_s = 1$ dała $\Delta = 9,76 \cdot 10^{-3}$ i $N = 26,3$. Taki krok Δ jest ponad siedmiokrotnie krótszy od kroku $1/14$ dla standardowego regulatora PID. Odpowiada to również nomogramowi z rys. 5, gdzie iloczyn $N\Delta = 0,256$ wskazuje w przybliżeniu na najwyższą z krzywych.

7. Podsumowanie

Przedstawiono metodę doboru kroku dyskretyzacji i nastaw PID dla serwo mechanizmu dyskretnego z silnikiem sterowanym napięciowo. Założeniem jest lokalizacja potrójnego bieguna układu zamkniętego, co zapewnia gładkie przebiegi. Daną projektową stanowi czas regulacji. Zbadano wpływ filtracji składowej różniczkującej regulatora na krok dyskretyzacji i nastawy oraz przedstawiono metodę projektowania pozwalającą także otrzymać założoną wartość dzielnika D .

W rozpatrywanym przykładzie nastawy dyskretne (p. 4, 5) okazały się wyraźnie mniejsze od nastaw ciągłych. Niezależnie więc od zmniejszenia obciążenia procesora [7], korzyścią sterowania dyskretnego powinna być redukcja wymagań energetycznych. Potwierdzenie tej tezy wymaga jednak obiektowych badań laboratoryjnych. Należy jeszcze dodać, że chociaż pisano bezpośrednio o serwo mechanizmach, to przedstawione wyniki dotyczą w zasadzie każdego obiektu modelowanego jako integrator ze stałą czasową. W pracy pokazano również, że wymóg dotrzymania założonej wartości dzielnika D w filtracji różniczkowania prowadzi do ograniczenia minimalnego osiągalnego czasu regulacji.

Dodatek

A. Nastawy standardowego dyskretnego regulatora PID

Na podstawie równań (8b) otrzymuje się następujące wzmocnienia składowych regulatora

$$\begin{aligned} k_p &= k_r(z_1 + z_2 - 2z_1z_2), \\ k_I &= k_r \frac{(z_1z_2 - z_1 - z_2 + 1)}{\Delta}, \\ k_D &= k_r \Delta z_1z_2. \end{aligned} \quad (26)$$

B. Nastawy dyskretnego regulatora PID z filtracją różniczkowania

Dwie postacie transmitancji regulatora podane w (16a) prowadzą do równań

$$\begin{aligned} k_r &= (\rho k_p + \rho k_I \Delta + N k_D) / \rho, \\ z_1 + z_2 &= (k_p(1 + \rho) + k_I \Delta + 2N k_D) / \rho, \\ z_1z_2 &= (k_p + N k_D) / \rho, \end{aligned} \quad (27)$$

gdzie $\rho = 1/p_r = 1 + N\Delta$. Z rozwiązania powyższych równań uzyskuje się wzmocnienia składowych regulatora

$$\begin{aligned} k_p &= k_r \rho \frac{((z_1 + z_2 - z_1z_2)\rho - N\Delta z_1z_2 - 1)}{N^2 \Delta^2}, \\ k_I &= k_r \rho \frac{(z_1 - 1)(z_2 - 1)}{N \Delta^2}, \\ k_D &= k_r \rho \frac{(\rho z_1 - 1)(\rho z_2 - 1)}{N^3 \Delta^2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Podziękowania

Projekt finansowany w ramach programu Ministra Edukacji i Nauki pod nazwą „Regionalna Inicjatywa Doskonałości” w latach 2019–2022 nr projektu 027/RID/2018/19 kwota finansowania 11 999 900 zł.

Bibliografia

1. Ellis G. (Ed.), *Control System Design Guide*, 4th ed. Butterworth-Heinemann, 2012.
2. Deskur J., Kaczmarek T., Zawirski K., *Automatyka napędu elektrycznego*. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, 2012.
3. Yang S.-M., Lin K.-W., *Automatic Control Loop Tuning for Permanent-Magnet AC Servo Motor Drives*, “IEEE Transactions on Industrial Electronics”, Vol. 63, No. 3, 2016, 1499–1506, DOI: 10.1109/TIE.2015.2495300.
4. Franklin G.F., Powell J.D., Emami-Naeini A.F., *Feedback Control of Dynamic Systems*, 8th ed. Reading: Addison-Wesley, 2019.
5. Chang P.H., Jung J.H., *A Systematic Method for Gain Selection of Robust PID Control for Nonlinear Plants of Second-Order Controller Canonical Form*, “IEEE Transactions on Control Systems Technology”, Vol. 17, No. 2, 2009, 473–483, DOI: 10.1109/TCST.2008.2000989.
6. Qi Z., Shi Q., Zhang H., *Tuning of Digital PID Controllers Using Particle Swarm Optimization Algorithm for a CAN-Based DC Motor Subject to Stochastic Delays*, “IEEE Transactions on Industrial Electronics”, Vol. 67, No. 7, 2020, 5637–5646, DOI: 10.1109/TIE.2019.2934030.
7. Żabiński T., Trybus L., *Tuning P-PI and PI-PI controllers for electrical servos*, “Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences”, Vol. 58, No. 1, 2010, 51–58, DOI: 10.2478/v10175-010-0005-7.
8. Bożek A., Trybus L., *Tuning PID and PI-PI servo controllers by multiple pole placement*, “Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences”, Vol. 70, 2022.
9. Seborg D.E., Edgar T.F., Mellichamp D.A., Doyle F.J., *Process Dynamics and Control*, 4th ed. New York: Wiley, 2016.
10. MATLAB, wersja 9.11.0 (R2021b), Natick, Massachusetts, 2021.
11. BECKHOFF New Automation Technology. Available: <https://www.beckhoff.com/>
12. Maxima CAS homepage. Available: <https://maxima.sourceforge.io/>

Discretization Step and PID Settings for Voltage Controlled Discrete Servo

Abstract: A method for selection of discretization step and discrete PID controller settings is presented for a model of servo with voltage controlled motor, described by an integrator with time constant. The method assumes a triple pole location of the closed-loop system to provide smooth control transients. Settling time is a design data. Influence of filtering degree in controller derivative component on reduction of discretization step is examined. Extended design problem with the filtering degree being an additional requirement is also considered.

Keywords: voltage controlled servo, integrator with time constant, PID controller, discrete-time control, discretization step

dr inż. Andrzej Bożek

abozek@prz.edu.pl

ORCID: 0000-0003-3015-7474

Absolwent Wydziału Elektrotechniki i Informatyki Politechniki Rzeszowskiej (2008). Stopień doktora nauk technicznych w dyscyplinie informatyka uzyskał w 2015 r. Pracuje jako adiunkt w Katedrze Informatyki i Automatyki Politechniki Rzeszowskiej. Jego zainteresowania naukowe dotyczą optymalizacji dyskretnej, harmonogramowania zadań oraz projektowania układów sterowania.



prof. dr hab. inż. Leszek Trybus

ltrybus@prz.edu.pl

ORCID: 0000-0002-1415-3679

Ukończył Akademię Górniczo-Hutniczą w Krakowie (1970), gdzie również uzyskał stopień doktora nauk technicznych, doktora habilitowanego i tytuł profesora. Od ukończenia studiów pracuje w Politechnice Rzeszowskiej. Autor ponad 200 publikacji. Wieloletni członek Komitetu Automatyki i Robotyki PAN. Zajmuje się sterownikami, rozproszonymi systemami automatyki i zastosowaniami teorii sterowania.

