

# Rekonstrukcja kształtu obiektu metodą Macierzy Hurwitza-Radona z parametrem $k$

Dariusz Jakóbczak

Wydział Elektroniki i Informatyki  
Politechnika Koszalińska  
ul. Śniadeckich 2, 75-453 Koszalin, Polska

## Streszczenie

Zagadnienie rekonstrukcji kształtu obiektów płaskich wymaga metod, które potrafią w sposób elastyczny zrekonstruować kontur obiektu na podstawie punktów charakterystycznych i które to metody pozwolą na wybór ostatecznego kształtu obiektu spośród kilku wersji. Jedną z takich metod, opracowaną i nazwaną przez autora metodą Macierzy Hurwitza-Radona (MHR), może zostać użyta w modelowaniu i rekonstrukcji obrazów 2D i 3D, które opisane są za pomocą konturów i krzywych. Metoda ta jest oparta na rodzinie macierzy Hurwitza-Radona (HR). Macierze HR są skośnie-symetryczne i składają się z kolumn tworzących ortogonalne wektory. W pracy pokazano jak konstruować Operator Hurwitza-Radona (OHR) oraz jak wykorzystać go w procesie interpolacji konturu i w modelowaniu obiektu. Brakujące punkty konturu obliczane są z zastosowaniem wypukłej kombinacji  $M_2$  dwóch operatorów OHR  $M_0$  i  $M_1$ :  $M_2 = \alpha^k \cdot M_0 + (1 - \alpha^k) \cdot M_1$ . Formuła obliczeń to  $Y(C) = M_2 \cdot C$ . Dobór parametru  $k$  z przedziału  $(0;2]$  pozwala modelować i rekonstruować kontur obiektu. Opisana metoda wymaga odpowiedniego wyboru węzłów, tzn. punktów charakterystycznych odtwarzanej krzywej: węzły powinny być umieszczone w każdym minimum lub maksimum jednej ze współrzędnych i węzły powinny być monotoniczne względem jednej współrzędnej (np. równoodległe). Metoda MHR modeluje kontur i kształt obiektu punkt po punkcie, bez użycia wzoru funkcji opisującej krzywą.

## 1. Wstęp

W pracy omówiono nową metodę Macierzy Hurwitza-Radona (MHR) z parametrem  $k$  (opracowaną przez autora) interpolacji dowolnej krzywej płaskiej i wykorzystanie jej w rekonstrukcji kształtu obiektu [3]. Porównując MHR z krzywymi Béziera, Hermite'a czy B-krzywymi (*B-splines*) [14] oraz NURBS [11,13] należy stwierdzić następującą wadę tych krzywych: niewielka zmiana jednego punktu charakterystycznego może spowodować istotną zmianę całej rekonstruowanej krzywej [8]. Cecha taka nie występuje w metodzie MHR [5]. Także klasyczna interpolacja Lagrange'a czy Newtona [2,12] jest czasami bezradna: na przykład dla funkcji  $f(x) = 1/x$  [5] lub  $f(x) = 1/(1+5x^2)$  w przedziale  $[-1;1]$  z przykładu 2. Wiele metod rekonstrukcji konturu obiektu i modelowania krzywej opiera się na interpolacji [9,10].

Macierze Hurwitza-Radona zbudowane są z kolumn parami ortogonalnych [1]. Metoda MHR wykorzystuje kombinacje liniowe macierzy HR [7,15]. Zastosowanie metody MHR wymaga podziału całego konturu obiektu na części. Pojedynczy fragment konturu jest krzywą, którą można modelować i rekonstruować z wykorzystaniem MHR.

Metoda MHR opiera się na następujących założeniach- dany jest skończony zbiór punktów krzywej, zwany dalej węzłami,  $(x_i, y_i) \in \mathbf{R}^2$  taki że:

1. węzły interpolacji znajdują się w każdym lokalnym ekstremum krzywej oraz w przynajmniej jednym punkcie leżącym między sąsiednimi lokalnymi ekstremami;
2. każdy węzeł  $(x_i, y_i)$  jest monotoniczny we współrzędnej  $x_i$  lub  $y_i$ ;

3. krzywą opisuje przynajmniej pięć węzłów.

Węzły należą do krzywej na płaszczyźnie. Jeżeli jedna część konturu obiektu opisana jest zbiorem węzłów  $\{(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n\}$  monotonicznych we współrzędnej  $x_i$ , wówczas zbudowany zostanie ortogonalny i dyskretny macierzowy Operator Hurwitza-Radona (OHR). Dla węzłów  $(x_1, y_1)$  oraz  $(x_2, y_2)$  OHR wymiaru  $N = 2$  jest następujący [5]:

$$M = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{bmatrix} x_1 y_1 + x_2 y_2 & x_2 y_1 - x_1 y_2 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 & x_1 y_1 + x_2 y_2 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Dla węzłów  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  oraz  $(x_4, y_4)$  monotonicznych w  $x_i$  OHR wymiaru  $N = 4$  wygląda tak [5]:

$$M = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ -u_1 & u_0 & -u_3 & u_2 \\ -u_2 & u_3 & u_0 & -u_1 \\ -u_3 & -u_2 & u_1 & u_0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

gdzie  $u_0 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$ ,  $u_1 = -x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3$ ,  
 $u_2 = -x_1 y_3 - x_2 y_4 + x_3 y_1 + x_4 y_2$ ,  $u_3 = -x_1 y_4 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_4 y_1$ .

Dla węzłów  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ , ...,  $(x_8, y_8)$  monotonicznych w  $x_i$  OHR wymiaru  $N = 8$  wynosi [5]:

$$M = \frac{1}{\sum_{i=1}^8 x_i^2} \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 \\ -u_1 & u_0 & -u_3 & u_2 & -u_5 & u_4 & -u_7 & u_6 \\ -u_2 & -u_3 & u_0 & u_1 & -u_6 & u_5 & -u_8 & u_7 \\ -u_3 & u_2 & -u_1 & u_0 & -u_7 & u_6 & -u_8 & u_5 \\ -u_4 & -u_5 & -u_6 & -u_7 & u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ -u_5 & u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 & u_0 & -u_3 & u_2 \\ -u_6 & u_5 & u_4 & -u_3 & -u_2 & u_1 & u_0 & -u_1 \\ -u_7 & -u_6 & u_5 & u_4 & -u_3 & -u_2 & u_1 & u_0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

gdzie  $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \dots, u_7)^T$ :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 \\ -y_2 & y_1 & -y_4 & y_3 & -y_6 & y_5 & y_8 & -y_7 \\ -y_3 & y_4 & y_1 & -y_2 & -y_7 & -y_8 & y_5 & y_6 \\ -y_4 & -y_3 & y_2 & y_1 & -y_8 & y_7 & -y_6 & y_5 \\ -y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_1 & -y_2 & -y_3 & -y_4 \\ -y_6 & -y_5 & y_8 & -y_7 & y_2 & y_1 & y_4 & -y_3 \\ -y_7 & -y_8 & -y_5 & y_6 & y_3 & -y_4 & y_1 & y_2 \\ -y_8 & y_7 & -y_6 & -y_5 & y_4 & y_3 & -y_2 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Jeżeli natomiast dana część konturu opisana jest zbiorem węzłów  $\{(x_i, y_i), i=1,2,\dots,n\}$  monotonicznych we współrzędnej  $y_i$ , wówczas należy zbudować odwrotny Operator Hurwitza-Radona (odwrotny OHR)  $M^{-1}$  poprzez symetryczną zamianę w  $M$  (1)-(4) każdego  $x_i$  z  $y_i$ . Na przykład dla węzłów  $(x_1, y_1)$  oraz  $(x_2, y_2)$  odwrotny OHR wymiaru  $N = 2$  jest następujący [5]:

$$M^{-1} = \frac{1}{y_1^2 + y_2^2} \begin{bmatrix} x_1 y_1 + x_2 y_2 & -x_2 y_1 + x_1 y_2 \\ -x_1 y_2 + x_2 y_1 & x_1 y_1 + x_2 y_2 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

## 2. Metoda Macierzy Hurwitza-Radona z parametrem $k$

Metoda MHR służy do wyznaczania współrzędnych punktów znajdujących się między węzłami. Na odcinku prostej każda liczba "c" umiejscowiona pomiędzy "a" and "b" opisana jest liniową, wypukłą kombinacją  $c = \alpha \cdot a + (1-\alpha) \cdot b$  dla  $\alpha = (b-c)/(b-a) \in [0;1]$ . Jeżeli węzły są monotoniczne we współrzędnej  $x_i$ , średni operator OHR  $M_2$  rzędu  $k \in (0;2]$  i wymiaru  $N = 2, 4$  lub 8 jest konstruowany następująco:

$$M_2 = \alpha^k \cdot M_0 + (1 - \alpha^k) \cdot M_1 \quad (6)$$

dla operatora  $M_0$  zbudowanego (1)-(3) z węzłów „nieparzystych”  $(x_1=a, y_1), (x_3, y_3), \dots, (x_{2N-1}, y_{2N-1})$  oraz  $M_1$  zbudowanego (1)-(3) z węzłów „parzystych”  $(x_2=b, y_2), (x_4, y_4), \dots, (x_{2N}, y_{2N})$ . Mając operator  $M_2$  (6) znaleziony dla współrzędnych  $x_i < x_{i+1}$  możliwe jest odtworzenie drugich współrzędnych punktów  $(x, y)$  z wykorzystaniem wektora  $C$  definiowanego ze składnikami

$$c_i = \alpha \cdot x_{2i-1} + (1-\alpha) \cdot x_{2i} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

jako  $C = [c_1, c_2, \dots, c_N]^T$ . Formuła obliczeń to

$$Y(C) = M_2 \cdot C, \quad (8)$$

w której elementy wektora  $Y(C)$  oznaczają drugą współrzędną punktów  $(x, y)$  odpowiadającą pierwszej współrzędnej, danej jako składnik wektora  $C$ .

Z drugiej strony, mając operator  $M_2^{-1}$  dla węzłów o współrzędnych  $y_i < y_{i+1}$ , wszystkie obliczenia (6)-(8) są symetrycznie analogiczne:

$$M_2^{-1} = \alpha^k \cdot M_0^{-1} + (1 - \alpha^k) \cdot M_1^{-1}, \quad (9)$$

$$c_i = \alpha \cdot y_{2i-1} + (1-\alpha) \cdot y_{2i} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N \quad (10)$$

$$C = [c_1, c_2, \dots, c_N]^T,$$

$$X(C) = M_2^{-1} \cdot C. \quad (11)$$

Kontur obiektu należy podzielić na części tak [3], aby każdej części odpowiadał zbiór węzłów monotonicznych w jednej ze współrzędnych.

W procesie rekonstrukcji kształtu obiektu metodą MHR kluczową sprawą jest: dobór węzłów, podział konturu na poszczególne krzywe, wymiar macierzy  $N = 2, 4$  lub 8 (dla  $N = 2$  obliczenia mają najmniejszą złożoność obliczeniową [5]) oraz parametr  $k$ . Dla  $k = 1$  metoda MHR ma postać podstawową [7]:

$$M_2 = \alpha \cdot M_0 + (1 - \alpha) \cdot M_1, \quad M_2^{-1} = \alpha \cdot M_0^{-1} + (1 - \alpha) \cdot M_1^{-1}, \quad (12)$$

czyli węzeł początkowy  $(x_i, y_i)$  i końcowy  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  odgrywają taką samą rolę przy odtwarzaniu współrzędnych punktów w przedziale  $(x_i, x_{i+1})$  lub  $(y_i, y_{i+1})$ . Wybór odpowiedniego  $k$  z przedziału  $(0;1)$  lub  $(1;2]$  wiąże się z podkreśleniem większej roli węzła początkowego  $(x_i, y_i)$  albo końcowego  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ :

- a) jeżeli  $k \in (0;1)$ , to  $\alpha^k > \alpha$ : większego znaczenia nabiera węzeł początkowy przedziału, w którym rekonstruowane są punkty;

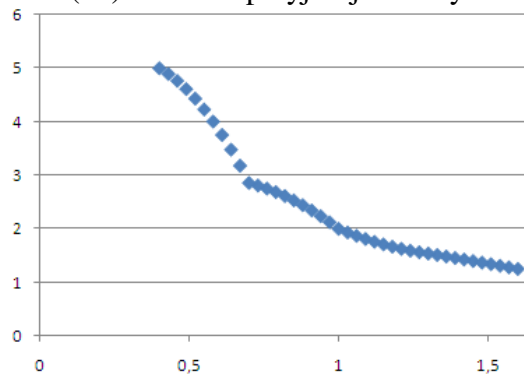
b) jeżeli  $k \in (1;2]$ , to  $\alpha^k < \alpha$ : większego znaczenia nabiera węzeł końcowy przedziału, w którym rekonstruowane są punkty.

W przypadku  $k > 2$  autor doświadczalnie stwierdził, iż model zdecydowanie odbiega od wzorca. Modelowanie kształtu obiektu zostanie przedstawione jako rekonstrukcja i modelowanie poszczególnych części konturu obiektu według założeń MHR.

### 3. Przykłady zastosowania metody MHR z parametrem $k$

#### 3.1. Przykład 1

Pewien fragment konturu przedstawiono jako wykres funkcji  $f(x) = 2/x$  w przedziale  $[0.4;1.6]$ . Dany jest zbiór pięciu węzłów interpolacji dla  $x = 0.4, 0.7, 1.0, 1.3, 1.6$ . Krzywa  $y = 2/x$  zrekonstruowana metodą MHR (12) dla  $k = 1$  przyjmuje niezbyt zadowalającą postać :



Rys. 1. Krzywa  $y = 2/x$  modelowana metodą MHR dla  $k = 1$  i pięciu węzłów wraz z 36 odtworzonymi punktami

Aby uzyskać dokładniejszą rekonstrukcję danej krzywej, dobrany zostanie rząd  $k$  w metodzie MHR (6). Wybór parametru  $k$  polega na porównaniu dokładnych wartości  $w_i$  funkcji  $f(x) = 2/x$  w punktach kontrolnych  $p_i$ , leżących w połowie między węzłami interpolacji (czyli  $\alpha = 0.5$ ), z wartościami w tychże punktach kontrolnych obliczonymi metodą MHR. Punkty kontrolne ustalone w połowie drogi między węzłami są najbardziej miarodajne, gdyż tam błąd interpolacji MHR jest największy [6]. Wybrana zostanie wartość  $k$ , dla której różnica wartości dokładnych  $w_i$  i zrekonstruowanych MHR jest najmniejsza. W przykładzie 1 punkty kontrolne  $p_i$  wyznaczono dla  $x_i = 0.55, 0.85, 1.15, 1.45$ . Porównano cztery wartości krzywej dla parametru  $k = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 2.0$ . Najmniejsza różnica wartości wystąpiła dla  $k = 1.5$ :

$$|w_1 - 3.694| + |w_3 - 1.632| + |w_2 - 2.302| + |w_4 - 1.329| = 0.266. \quad (13)$$

Wykonano obliczenia dla średniego operatora OHR  $M$  (6):

$$M = \begin{bmatrix} 2.405 & 2.062 \\ -2.062 & 2.405 \end{bmatrix}, \quad M \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.694 \\ 1.632 \end{bmatrix},$$

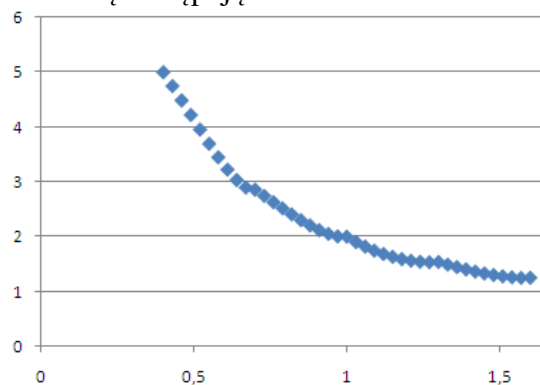
$$M = \begin{bmatrix} 1.375 & 0.782 \\ -0.782 & 1.375 \end{bmatrix}, \quad M \cdot \begin{bmatrix} p_2 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.302 \\ 1.329 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczone wartości występują w (13). Dla porównania pozostałe wyniki :

- $k = 0.1$ :  $|w_1 - 5.815| + |w_3 - 1.939| + |w_2 - 3.209| + |w_4 - 1.601| = 3.456$ ,
- $k = 0.2$ :  $|w_1 - 5.587| + |w_3 - 1.906| + |w_2 - 3.111| + |w_4 - 1.572| = 3.068$ ,
- $k = 0.3$ :  $|w_1 - 5.373| + |w_3 - 1.875| + |w_2 - 3.02| + |w_4 - 1.544| = 2.704$ ,
- $k = 0.4$ :  $|w_1 - 5.174| + |w_3 - 1.846| + |w_2 - 2.935| + |w_4 - 1.519| = 2.366$ ,

- e)  $k = 0.5$ :  $|w_1 - 4.988| + |w_3 - 1.819| + |w_2 - 2.856| + |w_4 - 1.495| = 2.05$ ,  
 f)  $k = 0.6$ :  $|w_1 - 4.815| + |w_3 - 1.794| + |w_2 - 2.782| + |w_4 - 1.473| = 1.756$ ,  
 g)  $k = 0.7$ :  $|w_1 - 4.653| + |w_3 - 1.771| + |w_2 - 2.712| + |w_4 - 1.452| = 1.48$ ,  
 h)  $k = 0.8$ :  $|w_1 - 4.503| + |w_3 - 1.749| + |w_2 - 2.648| + |w_4 - 1.433| = 1.225$ ,  
 i)  $k = 0.9$ :  $|w_1 - 4.362| + |w_3 - 1.728| + |w_2 - 2.588| + |w_4 - 1.415| = 1.008$ ,  
 j)  $k = 1$ :  $|w_1 - 4.23| + |w_3 - 1.709| + |w_2 - 2.532| + |w_4 - 1.398| = 0.822$ ,  
 k)  $k = 1.1$ :  $|w_1 - 4.108| + |w_3 - 1.692| + |w_2 - 2.479| + |w_4 - 1.382| = 0.648$ ,  
 l)  $k = 1.2$ :  $|w_1 - 3.994| + |w_3 - 1.675| + |w_2 - 2.43| + |w_4 - 1.368| = 0.51$ ,  
 m)  $k = 1.3$ :  $|w_1 - 3.887| + |w_3 - 1.66| + |w_2 - 2.385| + |w_4 - 1.354| = 0.387$ ,  
 n)  $k = 1.4$ :  $|w_1 - 3.787| + |w_3 - 1.645| + |w_2 - 2.342| + |w_4 - 1.341| = 0.294$ ,  
 o)  $k = 1.6$ :  $|w_1 - 3.608| + |w_3 - 1.619| + |w_2 - 2.265| + |w_4 - 1.318| = 0.298$ ,  
 p)  $k = 1.7$ :  $|w_1 - 3.527| + |w_3 - 1.608| + |w_2 - 2.231| + |w_4 - 1.308| = 0.434$ ,  
 q)  $k = 1.8$ :  $|w_1 - 3.451| + |w_3 - 1.597| + |w_2 - 2.199| + |w_4 - 1.298| = 0.563$ ,  
 r)  $k = 1.9$ :  $|w_1 - 3.381| + |w_3 - 1.587| + |w_2 - 2.169| + |w_4 - 1.289| = 0.682$ ,  
 s)  $k = 2.0$ :  $|w_1 - 3.315| + |w_3 - 1.577| + |w_2 - 2.14| + |w_4 - 1.281| = 0.795$ .

Widać wyraźnie kiedy błąd maleje, a kiedy rośnie. Rekonstrukcja krzywej  $y = 2/x$  w metodzie MHR rzędu  $k = 1.5$  przedstawia się następująco:



Rys. 2. Krzywa  $y = 2/x$  modelowana metodą MHR dla  $k = 1.5$  i pięciu węzłów wraz z 36 odtworzonymi punktami

Rysunek 2 dokładniej przedstawia krzywą  $y = 2/x$  niż Rysunek 1. Można wyobrazić sobie, że szukamy dalej lepszego  $k$  z większą liczbą cyfr po przecinku:

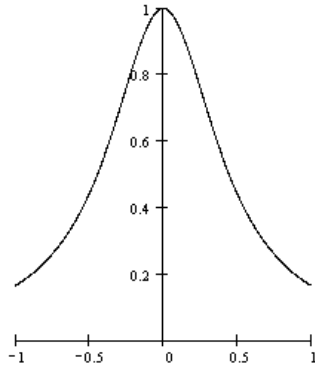
- a)  $k = 1.49$ :  $|w_1 - 3.703| + |w_3 - 1.633| + |w_2 - 2.306| + |w_4 - 1.33| = 0.269$ ,  
 b)  $k = 1.51$ :  $|w_1 - 3.685| + |w_3 - 1.631| + |w_2 - 2.299| + |w_4 - 1.328| = 0.262$ ,  
 c)  $k = 1.52$ :  $|w_1 - 3.677| + |w_3 - 1.629| + |w_2 - 2.295| + |w_4 - 1.327| = 0.261$ ,  
 d)  $k = 1.53$ :  $|w_1 - 3.668| + |w_3 - 1.628| + |w_2 - 2.291| + |w_4 - 1.326| = 0.258$ ,  
 e)  $k = 1.54$ :  $|w_1 - 3.659| + |w_3 - 1.627| + |w_2 - 2.287| + |w_4 - 1.325| = 0.255$ ,  
 f)  $k = 1.55$ :  $|w_1 - 3.65| + |w_3 - 1.626| + |w_2 - 2.284| + |w_4 - 1.324| = 0.251$ ,  
 g)  $k = 1.56$ :  $|w_1 - 3.642| + |w_3 - 1.624| + |w_2 - 2.28| + |w_4 - 1.323| = 0.25$ ,  
 h)  $k = 1.57$ :  $|w_1 - 3.633| + |w_3 - 1.623| + |w_2 - 2.276| + |w_4 - 1.321| = 0.255$ ,  
 i)  $k = 1.58$ :  $|w_1 - 3.625| + |w_3 - 1.622| + |w_2 - 2.273| + |w_4 - 1.32| = 0.268$ ,  
 j)  $k = 1.59$ :  $|w_1 - 3.616| + |w_3 - 1.621| + |w_2 - 2.269| + |w_4 - 1.319| = 0.283$ .

Model krzywej dla  $k = 1.56$  jest dokładniejszy niż dla  $k = 1.5$ .

Niewątpliwie istotną kwestią w metodzie MHR rzędu  $k$  jest stała wypukłość odtwarzanej krzywej. Odpowiedni dobór parametru  $k$  pozwala regulować i sterować wypukłością: model krzywej (rys. 2) zachowuje wypukłość i monotoniczność.

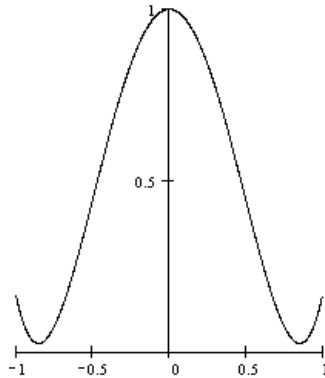
### 3.2. Przykład 2

Pewien fragment konturu modelowanego obiektu przedstawiono jako wykres funkcji  $f(x) = 1/(1+5x^2)$  w przedziale  $[-1;1]$ :



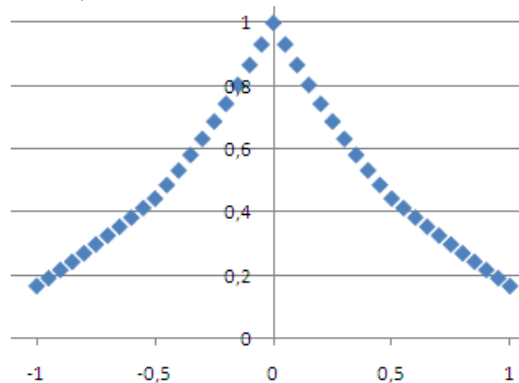
Rys. 3. Wykres funkcji  $f(x) = 1/(1+5x^2)$  w przedziale  $[-1;1]$

Dany jest zbiór pięciu węzłów interpolacji dla  $x = -1.0, -0.5, 0, 0.5, 1.0$ . Jest to przykład funkcji, dla której wielomian interpolacyjny Lagrange'a nie może zostać użyty z powodu zjawiska Rungego – występują niepożądane ekstrema (w tym przypadku dwa minima):



Rys. 4. Wielomian interpolacyjny Lagrange'a znacznie różni się od wykresu funkcji  $f(x) = 1/(1+5x^2)$

Oto jak wygląda model krzywej  $y = 1/(1+5x^2)$  w metodzie MHR (12) dla  $k = 1$ :

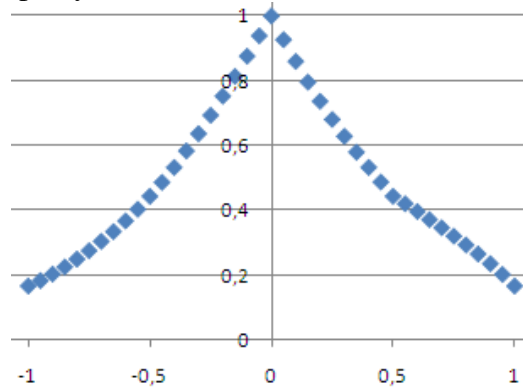


Rys. 5. Krzywa  $y = 1/(1+5x^2)$  modelowana metodą MHR dla  $k = 1$  i pięciu węzłów wraz z 36 odtworzonymi punktami

Zrekonstruowana krzywa (rys. 5) dla  $k = 1$  zachowuje monotoniczność i własność parzystości. Porównanie wartości dokładnych  $w_i$  oraz obliczonych metodą MHR w punktach kontrolnych  $p_i$ , wyznaczonych dla  $x_i = -0.75, -0.25, 0.25, 0.75$ , daje identyczny najlepszy wynik dla  $k = 1$ :

$$|w_1 - 0.299| + |w_3 - 0.688| + |w_2 - 0.688| + |w_4 - 0.299| = 0.221 \quad (14)$$

oraz dla  $k = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.7, 1.8, 1.9$ . Jednak tylko dla  $k = 1$  odtworzona krzywa jest parzysta (zachowuje symetrię), co widać po wartościach występujących w (14). Tak więc jeżeli najlepszych wyników jest więcej niż jeden i występuje wśród nich przypadek  $k = 1$ , to wówczas należy dla niego stworzyć model. Natomiast jeżeli pośród kilku najlepszych wyników nie ma obliczeń dla  $k = 1$ , to wtedy należy wybrać  $k$  będące najbliższą wartości 1. Oto przykład zrekonstruowanej krzywej dla  $k = 1.5$  (jak w przykładzie 1), która nie posiada własności parzystości:



**Rys. 6.** Krzywa  $y = 1/(1 + 5x^2)$  modelowana metodą MHR dla  $k = 1.5$  i pięciu węzłów wraz z 36 odtworzonymi punktami

Najlepszy model krzywej  $y = 1/(1 + 5x^2)$ , rekonstruowany metodą MHR dla  $k = 1$  (rys. 5), zachowuje parzystość (symetrię) i monotoniczność. Kłopoty pojawiają się przy zachowaniu wypukłości, ponieważ część wzorcowej krzywej (rys. 3) jest wypukła ku górze, a część wypukła ku dołowi.

#### 4. Podsumowanie

Podstawowe cechy metody MHR są następujące: dokładność rekonstrukcji kształtu obiektu zależy od podziału konturu obiektu na poszczególne krzywe oraz od liczby węzłów i sposobu wyboru węzłów (na przykład węzły o stałym kroku jednej współrzędnej); błąd interpolacji w wybranych punktach kontrolnych można zmniejszyć poprzez dobór rzędu  $k$  z odpowiednią liczbą cyfr po przecinku; model krzywej zachowuje monotoniczność i parzystość (symetrię); odtworzenie konturu złożonego z  $L$  pikseli jest związane ze złożonością obliczeniową rzędu  $O(L)$  [6]; przekształcenia geometryczne (przesunięcia, obroty, skalowanie) są łatwe: tylko węzły wymagają przekształcenia i nowy kontur dla nowych węzłów może zostać zrekonstruowany; metoda korzysta z lokalnych operatorów OHR: pojedynczy średni operator  $M_2$  lub  $M_2^{-1}$  (3)-(4) zbudowany jest na podstawie kolejnych 4, 8 lub 16 węzłów ( $2N$  dla  $N = 2, 4$  oraz 8), co powoduje znacznie mniej obliczeń niż wykorzystanie do interpolacji wszystkich węzłów; istotny jest także fakt, iż zmiana współrzędnych węzła  $(x_i, y_i)$  np. o indeksie  $i = 3$  nie spowoduje zmian obliczanych wartości współrzędnych punktów między węzłami na przykład o indeksach  $i = 22$  oraz  $i = 23$ . Metoda MHR może znaleźć zastosowanie w obszarze rozpoznawania obiektów [4] oraz kompresji krzywych [6].

## Bibliografia

1. Eckmann B.: *Topology, algebra, analysis- relations and missing links*, Notices of AMS, vol. 46(5), 520-527, 1999.
2. Fortuna Z., Macukow B., Wąsowski J.: *Metody numeryczne*. Warszawa, WNT (1982).
3. Jakóbczak D.: *2D and 3D Image Modeling Using Hurwitz-Radon Matrices*. Polish Journal of Environmental Studies, **16** (4A) , 104-107 (2007).
4. Jakóbczak D.: *Object recognition via contour points reconstruction using Hurwitz-Radon matrices*. Proceedings of 14<sup>th</sup> International Congress of Cybernetics and Systems of WOSC, Wrocław, 09-12.09.2008, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, pp. 567-576, Wrocław 2008.
5. Jakóbczak D.: *Curve Interpolation Using Hurwitz-Radon Matrices*. Polish Journal of Environmental Studies, Vol.18 , No. 3B (2009), 126-130.
6. Jakóbczak D.: *Zastosowanie dyskretnego, ortogonalnego operatora Hurwitza-Radona w kompresji i rekonstrukcji konturów obrazów monochromatycznych*. Zeszyty Naukowe Wydziału Elektroniki i Informatyki, nr 1, str. 95-111, Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Koszalińskiej 2009.
7. Jakóbczak D., Kosiński W.: *Hurwitz-Radon Operator in Monochromatic Medical Image Reconstruction*. Journal of Medical Informatics & Technologies, vol.11, November 2007, pp.69-78.
8. Kiciak P.: *Podstawy modelowania krzywych i powierzchni. Zastosowania w grafice komputerowej*, WNT, Warszawa 2005.
9. Kozera R.: *Curve modeling via interpolation based on multidimensional reduced data*. Gliwice, Poland: Silesian University of Technology Press (2004).
10. Marker J., Braude I., Museth K., Breen D.: *Contour-Based Surface Reconstruction using Implicit Curve Fitting, and Distance Field Filtering and Interpolation*, Volume Graphics 2006, 1-9.
11. Piegl L., Tiller W.: *The NURBS Book*, Springer-Verlag 1995–1997 (2nd ed.).
12. Ralston A.: *A first course in numerical analysis*. McGraw-Hill Book Company (1965).
13. Rogers D. F.: *An Introduction to NURBS with Historical Perspective*. Morgan Kaufmann Publishers 2001.
14. Schumaker L. L.: *Spline functions: basic theory*. Cambridge Mathematical Library 2007.
15. Sieńko W., Cítko W., Jakóbczak D.: *Learning and system modeling via Hamiltonian neural networks* in: *Artificial Intelligence and Soft Computing - ICAISC 2004*, 7th Int. Conference, Zakopane, Poland, June 2004, Rutkowski L., Siekmann J., Tadeusiewicz R., Zadeh A., (Eds.), *Lecture Notes on Artificial Intelligence*, vol. 3070, , Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 266-271, 2004.

## Object shape reconstruction using Hurwitz-Radon matrix with the parameter $k$

### Abstract

Reconstruction of object's shape in the plane needs suitable methods for interpolation of the object contour based on characteristic points. Such a method ought to reconstruct the contour in elastic way and must let us choose a final shape of the object among few versions. One of them, invented by the author and called the method of Hurwitz-Radon Matrices (MHR), can be used in modeling and reconstruction of 2D and 3D objects, which are described by contours and curves. The method is based on a family of Hurwitz-Radon (HR) matrices. The matrices are skew-symmetric and possess columns composed of orthogonal vectors. The Operator of Hurwitz-Radon (OHR), built from these matrices, is described. It is shown how to create the



orthogonal and discrete OHR and how to use it in a process of contour interpolation and object modeling. Contour points are calculated by convex combination  $M_2$  of two OHR operators  $M_0$  and  $M_1$ :  $M_2 = \alpha^k \cdot M_0 + (1 - \alpha^k) \cdot M_1$ . Formula of calculations:  $Y(C) = M_2 \cdot C$ . Parameter  $k$  from range  $(0; 2]$  is responsible for appropriate modeling i reconstruction of object contour. The method needs suitable choice of interpolation nodes, i.e. points of the curve to be reconstructed: nodes should be settled at each local extremum and nodes should be monotonic in one of coordinates. MHR method is modeling the contour and shape of the object point by point, without using any formula of function or mathematical form of curve.