

Joanna KOLAŃSKA-PLUSKA
Barbara GROCHOWICZ

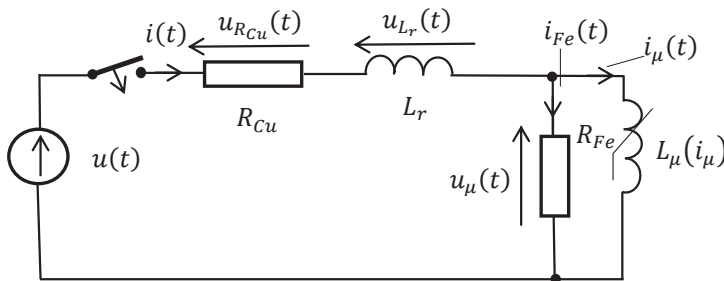
MODELOWANIE I SYMULACJA CEWKI NIELINIOWEJ ZE STRATAMI W ŻELAZIE

STRESZCZENIE *Praca dotyczy badania dynamiki obwodu z cewką nieliniową z uwzględnieniem strat w żelazie. W pracy został przedstawiony model cewki oraz opis za pomocą zmiennych stanu. Przedstawiono również program do badania dynamiki cewki opracowany w środowisku C#, w którym do rozwiązania układu równań różniczkowych nieliniowych modelujących cewkę nieliniową ze stratami w żelazie zastosowano metodę niejawną RADAU IIA różnych rzędów.*

Słowa kluczowe: *Metoda RADAU IIA, cewka nieliniowa, równania różniczkowe nieliniowe sztywne*

1. CEWKA NIELINIOWA

Cewka z rdzeniem ferromagnetycznym ma indukcyjność, która zależy od prądu płynącego w cewce, co powoduje, że badana cewka jest nieliniowa. Obwód zawierający taką cewkę nie spełnia zasady superpozycji, słuszne są oba prawa Kirchhoffa dla wartości chwilowych. Schemat zastępczy takiej cewki podano na rysunku 1.



Rys. 1. Schemat cewki nieliniowej ze stratami w żelazie

Dr inż. Joanna KOLAŃSKA-PLUSKA, dr inż. Barbara GROCHOWICZ
e-mail: [j.kolanska-pluska; b.grochowicz]@po.opole.pl

Politechnika Opolska, Wydział Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki
ul. Prószkowska 76, 45-358 Opole

PRACE INSTYTUTU ELEKTROTECHNIKI, zeszyt 272, 2016

Dla modelu cewki z rysunku 1 przyjęto następujące oznaczenia:

- U_m – amplituda napięcia zasilania cewki,
- f – częstotliwość napięcia zasilania,
- T – okres napięcia zasilania,
- ω – pulsacja napięcia zasilania $\omega = 2\pi f$,
- β – faza początkowa napięcia zasilania,
- l_{srFe} – średnia długość obwodu magnetycznego,
- S_{Fe} – średni przekrój obwodu magnetycznego,
- w – liczba zwojów cewki,
- R_{Fe} – zastępcza rezystancja równoważnego obwodu dla strat w żelazie,
- R – rezystancja cewki,
- L_r – indukcyjność rozproszenia cewki.

Oprócz wyżej wymienionych parametrów, zadana jest charakterystyka obwodu magnetycznego cewki w postaci funkcji:

$$\begin{aligned} B(H) &= a_1 \operatorname{arcsh}(a_2 H) \\ H(B) &= \frac{1}{a_2} \operatorname{sh}\left(\frac{B}{a_1}\right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Stałe a_1, a_2 można estymować mając co najmniej dwa punkty charakterystyki magnesowania $\{B_i, H_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$). W tym celu bierze się pod uwagę układ równań nieliniowych:

$$F_i(a_1, a_2) = B_i - a_1 \operatorname{arcsh}(a_2 H_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N_p) \quad (1.2)$$

Jeżeli $N_p = 2$ otrzymuje się układ dwóch równań nieliniowych ze względu na a_1, a_2 , który można rozwiązać np. metodą Newtona. Jeżeli $N_p > 2$ otrzymuje się układ nieliniowy nadokreślony, dla którego można otrzymać pseudorozwiązanie wybraną metodą minimalizacji normy wektora $[F_1(a_1, a_2), \dots, F_{N_p}(a_1, a_2)]$.

Mając na uwadze formowanie równań stanu układu cewki jako zmienne stanu przyjmuje się prąd zasilania $i(t)$ i strumień magnetyczny główny cewki $\phi(t)$.

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Średnią indukcję magnetyczną B w rdzeniu cewki można wyrazić poprzez zmienną stanu $\phi(t)$:

$$B = \frac{\phi}{S_{Fe}} \quad (1.4)$$

Zgodnie z charakterystyką magnesowania (1.1) przyjmuje się, że średnie natężenie pola magnetycznego w rdzeniu cewki wynosi:

$$H = H\left(\frac{\phi}{S_{Fe}}\right) \quad (1.5)$$

Na mocy prawa przepływu obwodu magnetycznego cewki:

$$H\left(\frac{\Phi}{S_{Fe}}\right) l_{srFe} = w i_{\mu} = \Theta \quad (1.6)$$

Na mocy II prawa Kirchhoffa:

$$u(t) = R_{Cu}i(t) + w \frac{d\phi_c(t)}{dt} \quad (1.7)$$

gdzie:

$$\phi_c(t) = L_r i(t) + \phi(t) \quad (1.8)$$

jest całkowitym strumieniem magnetycznym cewki będący sumą strumienia głównego $\phi(t)$ oraz strumienia rozproszenia $\phi_r(t) = L_r i(t)$. Po podstawieniu wzoru (1.2) do równania (1.1) otrzymuje się:

$$u(t) = R_{Cu}i(t) + L_r \frac{di(t)}{dt} + w \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (1.9)$$

Na mocy I prawa Kirchhoffa oraz prawa przepływu w postaci (1.6) otrzymuje się:

$$i_{Fe}(t) = i(t) - i_{\mu}(t) = i(t) - \frac{1}{w} H\left(\frac{\Phi(t)}{S_{Fe}}\right) l_{srFe} \quad (1.10)$$

Zgodnie ze schematem modelu cewki (rys. 1) oraz na mocy II prawa Kirchhoffa:

$$u_{\mu}(t) = w \frac{d\phi(t)}{dt} = R_{Fe} i_{Fe}(t) \quad (1.11)$$

Podstawiając równanie (1.11) do równania (1.9) otrzymuje się:

$$u(t) = R_{Cu}i(t) + L_r \frac{di(t)}{dt} + R_{Fe} i_{Fe}(t) \quad (1.12)$$

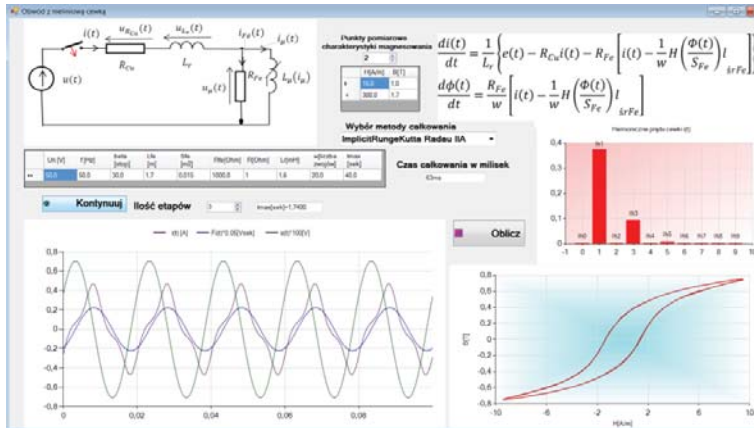
Podstawiając wzór (1.10) na prąd $i_{Fe}(t)$ do równań (1.11) i (1.12) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \frac{di(t)}{dt} &= \frac{1}{L_r} \left\{ e(t) - R_{Cu}i(t) - R_{Fe} \left[i(t) - \frac{1}{w} H\left(\frac{\Phi(t)}{S_{Fe}}\right) l_{srFe} \right] \right\} \\ \frac{d\phi(t)}{dt} &= \frac{R_{Fe}}{w} \left[i(t) - \frac{1}{w} H\left(\frac{\Phi(t)}{S_{Fe}}\right) l_{srFe} \right] \end{aligned} \quad (1.13)$$

Przyjmując oznaczenie wektora stanu (1.3) równania różniczkowe (1.13) można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= \frac{1}{L_r} \left\{ e(t) - R_{Cu}x_1(t) - R_{Fe} \left[x_1(t) - \frac{1}{w} H \left(\frac{x_2(t)}{S_{Fe}} \right) l_{srFe} \right] \right\} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= \frac{R_{Fe}}{w} \left[x_1(t) - \frac{1}{w} H \left(\frac{x_2(t)}{S_{Fe}} \right) l_{srFe} \right] \end{aligned} \quad (1.14)$$

Do badania dynamiki opracowano program w języku C#, który wykorzystuje autorską bibliotekę do rozwiązywania układów równań różniczkowych metodami niejawnymi IRK. Biblioteka zawiera podstawowe metody niejawne jak RADAU IIA, Gaussa-Legendre'a [2] i Lobatto IIIC. Stronę czołową aplikacji pokazano na rysunku 2.



Rys. 2. Interfejs projektu do badania dynamiki obwodu

2. METODY NIEJAWNE IRK (RADAU IIA)

Dla dowolnego układu równań różniczkowych wraz z warunkami początkowymi:

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{F}[\mathbf{X}(t), t], \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \quad (2.1)$$

gdzie $\mathbf{X}(t)$ jest N wymiarowym wektorem w chwili t , natomiast $\mathbf{F}[\mathbf{X}(t), t]$ jest funkcją wektorową zmiennej wektorowej $\mathbf{X}(t)$ i parametru t . Metody niejawne typu Rungego-Kutty [3] mają ogólnie postać:

$$\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{X}_i + \sum_{j=1}^m w_j \mathbf{K}_j^{(i)} \tag{2.2}$$

gdzie w_j są stałymi, natomiast wektory $\mathbf{K}_j^{(i)}$ wyrażają się wzorami:

$$\mathbf{K}_j^{(i)} = h_i \mathbf{F} \left[\mathbf{X}_i + \sum_{l=1}^m a_{jl} \mathbf{K}_l^{(i)}, t_i + c_j h_i \right], \text{ dla } j = 1, \dots, m \tag{2.3}$$

przy czym $h_i = t_{i+1} - t_i$,

$$c_l = \sum_{j=1}^m a_{lj} \tag{2.4}$$

Tabela współczynników Butchera dla metody niejawnej ma postać:

TABELA 1
Tabela Butchera dla metody niejawnej

c_1	a_{11}	a_{12}	...	$a_{1,m-1}$	a_{1m}
c_2	a_{21}	a_{22}	...	$a_{2,m-1}$	a_{2m}
c_3	a_{31}	a_{32}	...	$a_{3,m-1}$	a_{3m}
.	.				
c_m	a_{m1}	a_{m2}	...	$a_{m,m-1}$	a_{mm}
w^m	w_1	w_2		w_{m-1}	w_m

Proces obliczeniowy realizuje się w konstruktorach klas bazowych autorskiego oprogramowania zorientowanego obiektowo.

W przypadku metod niejawnych wektory współczynników tworzą nieliniowy układ równań algebraicznych. Przy rozwiązywaniu układu N równań różniczkowych wektory te mają N składowych więc dla metody m etapowej otrzymujemy układ Nm równań nieliniowych. Fakt rozwiązywania w każdym kroku całkowania układu równań nieliniowych oznacza stosunkowo duży koszt obliczeń numerycznych.

Do rozwiązywania układu równań (1.14) zastosowano metodę Newtona [4]. Rozwiązywanie w procesie iteracyjnym Newtona układu równań liniowych sprowadza niewątpliwie proces całkowania w metodach niejawnych Rungego-Kutty. Dzieje się tak tym bardziej, im większy jest układ równań różniczkowych. W praktyce modelowania dynamiki różnych układów jest bardzo często tak, że im większy układ równań różniczkowych, tym rzadsza jest macierz Jacobiego $\mathbf{J}^{(F)}(\mathbf{X}, t)$ prawej strony równaniu (2.1), tj. funkcji $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$.

Dla niejawnych m -etapowych metod Rungego-Kutty istnieją pewne wybory węzłów c_1, c_2, \dots, c_m , dla których można otrzymać wysokie rzędy metody. Jak wiadomo, kwadraturą o maksymalnym rzędzie aproksymacji jest kwadratura Gaussa. Dlatego celowym jest taki wybór węzłów c_1, c_2, \dots, c_m , które stanowią zera kwadratowej formuły wysokiego rzędu. Kwadratury Gaussa-Legendrea, Radau i Lobatto pozwalają na otrzymanie rzędów metody odpowiednio $2m, 2m-1$ i $2m-2$.

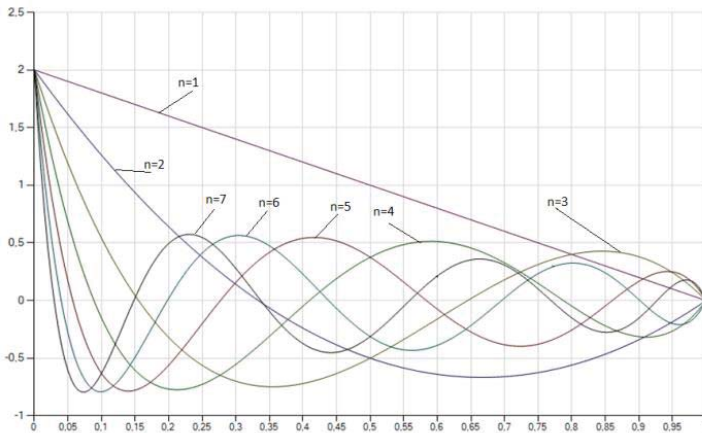
W algorytmie RADAU IIA węzły c_1, c_2, \dots, c_m stanowią zera wielomianu Legendre'a z podstawieniem $1 - 2x$, co gwarantuje że ostatni węzeł jest końcem przedziału całkowania ($c_m = 1$).

$$P_m^{(1)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} P_m(1 - 2x) + P_{m-1}(1 - 2x), \quad m = 1, 2, \dots, s \quad (2.5)$$

Węzły czasowe c_j zadaje się równaniem:

$$P_m^{(1)}(c_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.6)$$

co gwarantuje, że $c_m = 1$, a więc ostatnim węzłem czasowym jest węzeł odpowiadający prawemu końcowi przedziału całkowania.



Rys. 3. Wielomiany Legendre'a w przedziale $[0, 1]$

Zera wielomianów wyznacza się metodą poławiania przedziałów. Macierz Vandermonde'a dla tych współczynników ma postać:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_m \\ (c_1)^2 & (c_2)^2 & (c_3)^2 & \dots & (c_m)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (c_1)^{m-1} & (c_2)^{m-1} & (c_3)^{m-1} & \dots & (c_m)^{m-1} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Wyznaczając jej macierz odwrotną otrzymuje się macierz V postaci:

$$V = U^{-1} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1m} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \dots & v_{mm} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Znajomość macierzy odwrotnej: V^{-1} pozwala zgodnie z teorią metod niejawnych Rungego-Kutty na mocy warunku uproszczonego $B(m)$ wyznaczyć współczynniki w_i tablicy Butchera:

$$w_i = \sum_{k=1}^m v_{ik} \frac{1}{k}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.9)$$

Wykazuje się, że m -etapowej metody Radau IIA osiąga się rząd $2m-1$. Niech zadana jest m -etapowa formuła Radau IIA o współczynnikach c_1, c_2, \dots, c_m spełniających równanie (2.4). Tablica Butchera [5] metody Radau IIA dla 3-etapów 5-go rzędu ma postać:

TABELA 2

Tabela dla 3-etapowej metody Radau IIA rzędu 5

$\frac{4 - \sqrt{6}}{10}$	$\frac{88 - 7\sqrt{6}}{360}$	$\frac{296 - 169\sqrt{6}}{1800}$	$\frac{-2 + 3\sqrt{6}}{225}$
$\frac{4 + \sqrt{6}}{10}$	$\frac{296 + 169\sqrt{6}}{1800}$	$\frac{88 - 7\sqrt{6}}{360}$	$\frac{-2 - 3\sqrt{6}}{225}$
1	$\frac{16 - \sqrt{6}}{36}$	$\frac{16 + \sqrt{6}}{36}$	$\frac{1}{9}$
	$\frac{16 - \sqrt{6}}{36}$	$\frac{16 + \sqrt{6}}{36}$	$\frac{1}{9}$

3. PODSUMOWANIE

Metody niejawne IRK są implementowane dla wysokich rzędów, jednak koszt obliczeń gwałtownie rośnie, co skutecznie ogranicza zastosowania. W metodach niejawnych (RADAU IIA, Gaussa-Legendre'a, Lobatto) koszt obliczeń jest mniejszy, jednak dla dużego układu równań różniczkowych barierą staje się czas obliczeń. Jak pokazano na przykładzie zastosowania metody RADAU IIA do rozwiązywania rzadkiego układu równań cewki nieliniowej, ograniczenie się tylko do niezerowych elementów macierzy Jacobiego w procesie iteracyjnym całkowania, skutecznie skraca czas całkowania. Jest to możliwe jeżeli

w procesie tym zastosujemy metodę rozkładu LU z minimalną ilością dodatkowych niezerowych elementów jakie powstaną w procesie rozkładu.

LITERATURA

1. Alexander R.: Design and implementation of DIRK integrators for stiff systems, Applied Numerical Mathematics, 46 (1), s. 1–17, 2003.
2. Kennedy C. A., Carpenter M. H.: Additive Runge-Kutta Schemes for Convection-Diffusion-Reaction Equations. Technical Report, NASA/TM-2001-211038 NASA, 2001.
3. Dormand J. R., Prince P. J.: A family of embedded Runge-Kutta formulae. J. Computation Applied Maths, 1980.
4. Hairer E., Wanner G.: Solving Ordinary Differential Equations II, stiff and Differential Algebraic Problems, Berlin: Springer-Verlag, 1991.
5. Butcher J. C., and Chen D. J. L.: A new type of singlyimplicit Runge-Kutta method, Applied Numerical Mathematics, 2000.

Przyjęto do druku dnia 22.02.2016 r.

MODELING AND SIMULATIONS OF A NON-LINEAR COIL

Joanna KOLAŃSKA-PŁUSKA, Barbara GROCHOWICZ

ABSTRACT *Solving rigid differential equations systems should be performed with the application of implicit or semi-explicit methods. As proven in the example given in this paper – the implicit RADAU IIA methods can be successfully applied for the purpose of solving the rigid non-linear systems. The high-order methods up to 11 cause that the application performs relatively large integration steps in pursuit of the steady state that is comparable with the explicit methods. Furthermore, the number of iterations and computation time for a sample non-linear equations formulated for a coil with iron losses is comparable to other methods such as, e.g., multistep Gear method. Also a sample test has proved that the implicit Runge-Kutta methods can be competitive for the purpose of research regarding electrical systems described with the rigid differential equations compared to the multistep Gear method.*

Keywords: *implicit Runge-Kutta methods, nonlinear coil*

Dr inż. Joanna KOLAŃSKA-PLUSKA – adiunkt na Wydziale Elektrotechniki Automatyki i Informatyki Politechniki Opolskiej. Jest absolwentką Wydziału Elektrotechniki i Automatyki Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Opolu (1993). Stopień naukowy doktora nauk technicznych w dyscyplinie elektrotechnika uzyskała na Politechnice Opolskiej w roku 2003. Tematem rozprawy doktorskiej była „Analiza harmonicznego pola magnetycznego wokół linii wysokiego napięcia”. Obecnie zajmuje się modelowaniem pola elektromagnetycznego układów ze wzбудnikiem wewnętrznym w procesie nagrzewania indukcyjnego oraz zastosowaniem metod numerycznych do rozwiązywania równań różniczkowych.



Dr inż. Barbara GROCHOWICZ – starszy wykładowca na Wydziale Elektrotechniki Automatyki i Informatyki Politechniki Opolskiej. Stopień naukowy doktora nauk technicznych w dyscyplinie elektrotechnika uzyskała na Politechnice śląskiej w roku 1996. Tematem rozprawy doktorskiej była „Analiza harmonicznego pola elektrycznego wokół przewodów elektroenergetycznych linii napowietrznych z przewodami izolowanymi”. Obecnie pełni funkcję prodziekana ds. dydaktyki.

