

ANNA SŁOŃ<sup>1</sup>  
 URSZULA PAWLAK<sup>2</sup>  
 Kielce University of Technology  
<sup>1</sup>e-mail: aneczka\_lp@o2.pl  
<sup>2</sup>e-mail: u.pawlak@tu.kielce.pl

# THE COMPARATIVE ANALYSIS OF COMPUTATIONAL METHODS FE AND FD ON THE EXAMPLE OF THE MEMBRANE SURFACE STRUCTURE

## Abstract

The paper contains comparison of FEM and FDM applied in membranes. Innovative element of this calculation method includes replacing a membrane with a framed structure [1]. Sample membranes were tested by two methods, afterwards both results were compared in the state of stress and displacement, which allowed to draw the following conclusions regarding the usage of both methods.

**Keywords:** superficial structures, FEM, FDM, membrane, computational methods

## 1. Introduction

Membrane structures are widely used in construction industry: transport infrastructure, urban, industrial, hydro-engineering and housing [2], thus proper modeling, analysis and design are vital.

Membrane structures can be tested in many ways. They can be analysed in terms of statics, stability and dynamics in linear and nonlinear analysis [3]. Proper calculation method is vital. The comparative analysis of FEM and FDM methods include both theoretical differences between the methods as well as practical tests checking tension in typical prefabricated membranes used in construction industry. Membranes of various support systems were presented in Figure 1. Calculations were carried out with the use of computer and standard calculation methods.

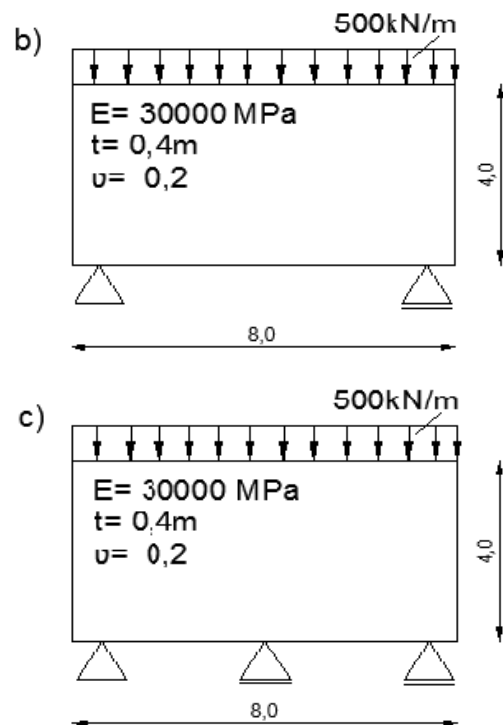
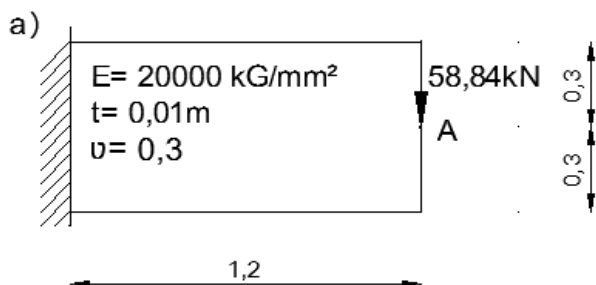


Fig. 1. Sample calculations diagram: a) bracket example, b) supported membrane statically defined, c) supported membrane statically undefined

### 2. A few words about MRS and MES

In mechanics description of analysed phenomenon is presented through equations. Most commonly these are differential equations in boundary conditions. When precise calculation methods are not applicable approximation methods are used, especially FEM and FDM [4].

FDM – a method implemented in static panels calculations, introduced by H. Marcus is based on regular geometry, which may limit application in more complex elements [5]. The idea of FDM is changing differential operators with corresponding difference operator placed on a discrete grid. Membrane calculation procedure is the same as in panels as identical equations are used, however including boundary conditions desirable results are obtained. Prof. Rakowski [1] presented interesting FDM application in membranes, replacing surface element with bar frame representing membrane outline. Inclusion of membrane’s width is of vital importance presenting external forces as force-width quotient. Despite educational purposes and easy grid generating is difficult in automation and problematic in nonlinear boundary. Lack of local grid compaction is another drawback of this method [6].

FDA is a typical computing method based on construction discretization into finite number of simple geometry elements. Finite elements are characterized by simple geometry and precisely defined degree of freedom. Computing is carried out for selected nodes in those elements. It should be checked if the construction bears bend-displacement, stress-bend relation [7]. FEM is widely used and forms basis of many computer programs. Another advantage is wide set of finite elements and precise results. However, nonlinear and complex geometry elements are problematic [6].

### 3. FEM and FDM comparison

To compare both methods brief setting up in terms of a problem, solution and results is presented below (Table 1) [6].

Table 1. Differences between FEM and FDM setting up

	FEM	FDM
The formulation of the problem boundary	Global	Local
Approximation	Shape functions	Differential patterns for derivatives
Boundary conditions	Modification of the system of equations	Additional designs differential
The matrix of the system of equations	Symmetric band	This is usually not symmetrical

### 4. Computational analysis of membrane structures by MES and MRS

Surface structures presented below were tested by the comparative analysis (Fig.1). As for bracket membrane (Fig. 1a) comparative FEM analysis was carried out by counting and in ROBOT system for 8 8FE as well as calculated for 3.0 x 3.0 m grid. Results in terms of bracket displacement and membrane stress are presented in Fig. 2 and Fig. 3.

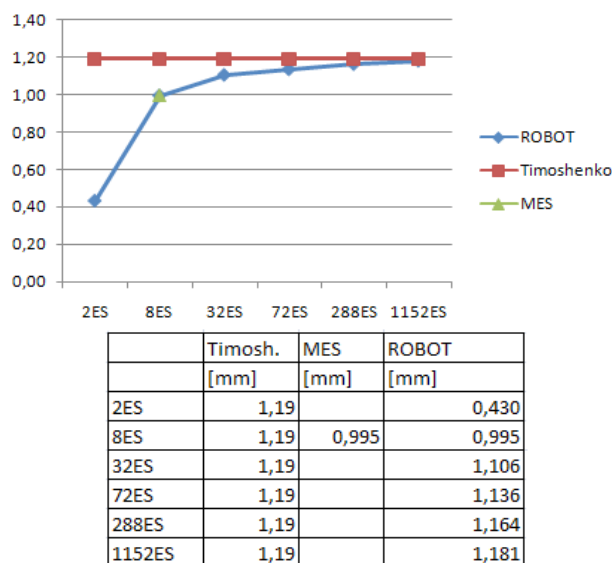


Fig. 2. Analysis of displacement of membrane bracket-results

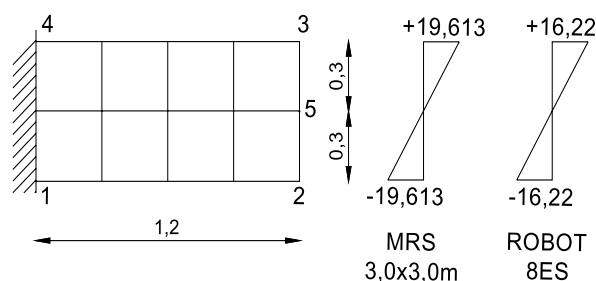
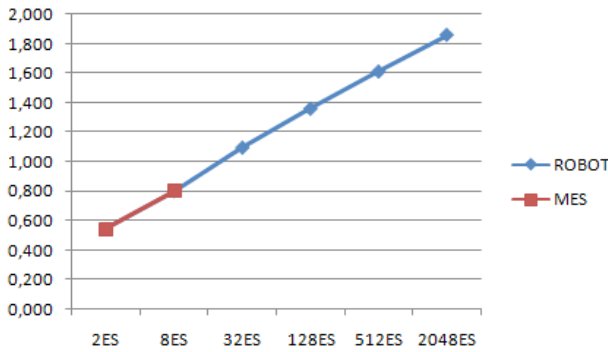


Fig. 3. Results of tension analysis  $\sigma_x$  in membrane bracket

Similar analysis was carried out for statically defined cantilever beam (Fig. 1b) Comparative FEM analysis was conducted by counting and in ROBOT system for 2FE, 8FE, 32FE as well as calculated for 3.0 x 3.0 m grid. A bend in point 5 was searched for as well as stress placement  $\sigma_x$  in  $\alpha$ - $\alpha$  section. Results are shown in fig. 4 and Fig. 5.



	ROBOT [mm]	MES [mm]
2ES	0,543	0,543
8ES	0,800	0,800
32ES	1,095	
128ES	1,359	
512ES	1,611	
2048ES	1,860	

Fig. 4. Center displacement of SSN = 0 cantilever beam – analysis results

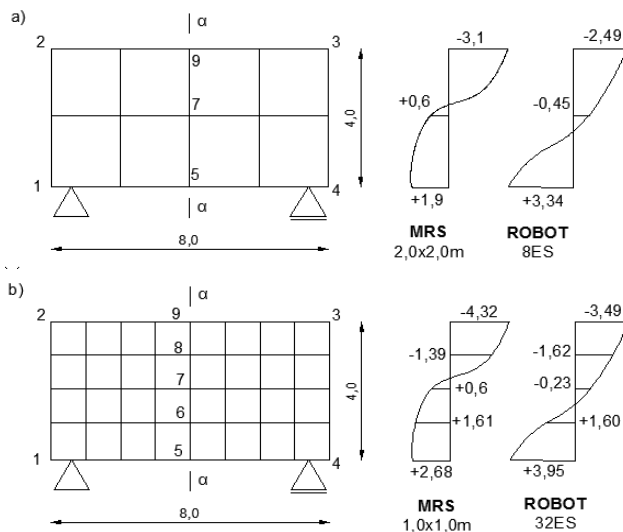


Fig. 5. Results of stress analysis in SSN = 0 cantilever beam: a) FEM-8FE, FDM 2.0 x 2.0 m grid, b) FEM-32FE, FDM 1.0 x 1.0 m grid

For statically defined cantilever beam (Fig 1c) only stress analysis was carried out due to similar geometry to the previous example and the same material data. Stress placement in  $\alpha$ - $\alpha$  section was obtained through FEM computing in ROBOT system for 8FE as well as FDM calculations for 2.0 x 2.0 m grid. The following results were generated Figure 6.

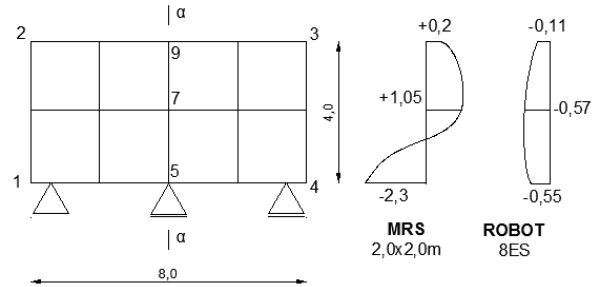


Fig. 6. Cantilever beam stress analysis results

### 5. Conclusion

As a result of carried out analysis conducted by FEM and FDM methods the following differences were noticed. Differences in values are caused by approximations resulting from replacing a membrane with a framed structure in FDM. Surface structures are replaced by bar structure, that is by a structure of different number and different degree of freedom, which undoubtedly affected the results. Stress diagram, despite differences in values and even in signs, indicate similar character and progress.

It can be stated that FDM is useful in simple geometry elements calculations and is characterized by stable solution. Whereas FEM can be applicable in complex geometry problems of infinite degree of freedom [6, 7]. It should be noted that both methods are approximated and not error-free.

### References

- [1] Rakowski G.: *Sprężystość. Problemy i rozwiązania. Metody analityczne i numeryczne*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce 2001.
- [2] Pyrak S., Włodarczyk W.: *Posadowienie budowli, konstrukcje murowe i drewniane*, WSiP 2006.
- [3] <http://fundacjarozwojunauki.pl/res/Tom2/Burczyński.pdf>
- [4] Rakowski G.: *Mechanika budowli. Ujęcie komputerowe*, t. 2, ARKADY, Warszawa 1992.
- [5] Nowacki W.: *Z zastosowań rachunku różnic skończonych w mechanice budowli*, Archiwum Mechaniki Stosowanej, 1951.
- [6] <http://www.l5.pk.edu.pl/~awosatko/MESUP.pdf>
- [7] Łodygowski T., Kąkol W.: *Metoda elementów skończonych w wybranych zagadnieniach mechaniki konstrukcji inżynierskich*, Alma Mater, Politechnika Poznańska, 2003.

Anna Słoń  
Urszula Pawlak

# Analiza porównawcza metod obliczeniowych ES i RS w zastosowaniu do konstrukcji powierzchniowej typu tarcza

## 1. Wstęp

Konstrukcje tarczowe mają szerokie zastosowanie w budownictwie: komunikacyjnym, przemysłowym, komunalnym, hydrotechnicznym, mieszkalnym [2], w związku z tym ważne jest ich prawidłowe zamodelowanie, analizowanie, a w efekcie końcowym projektowanie.

Konstrukcje tarczowe można poddać wielu typom analizy. Można badać: statykę, stateczność, dynamikę w zakresie analizy liniowej i nieliniowej. Potrzebny jest jednak odpowiedni aparat obliczeniowy [3]. Analiza porównawcza metod ES i RS dotyczy zarówno teoretycznych różnic pomiędzy tymi metodami, jak i praktycznego sprawdzenia stanu naprężenia i przemieszczenia w typowych tarczach prefabrykowanych stosowanych w budownictwie. Badaniom zostały poddane tarcze o różnym sposobie podparcia jak i o różnym stopniu statycznej niewyznaczalności, przedstawione na rysunek 1. Obliczenia poprowadzono w sposób ręczny oraz komputerowo.

## 2. Słów kilka o MRS i MES

W mechanice opis analizowanego zjawiska zapisujemy za pomocą równań matematycznych. Najczęściej są to równania różniczkowe związane z warunkami brzegowymi. Gdy niemożliwe są obliczenia w sposób ścisły, korzystamy z metod przybliżonych – najczęściej MES lub MRS [4].

MRS – metoda wprowadzona do obliczeń statycznych płyt przez H. Marcusa opiera się na regularnej siatce węzłów, czyli o prostej geometrii, co może stanowić ograniczenie w zastosowaniu do elementów bardziej złożonych [5]. Ideą MRS jest zamiana operatorów różniczkowych na odpowiadające im operatory różnicowe określone na dyskretnym zbiorze punktów zwanym siatką dyskretyzacyjną.

Tok postępowania w obliczeniu tarcz okazuje się taki sam, jak w obliczeniach płyt, gdyż korzystamy

z tych samych równań różnicowych, lecz poprzez odpowiednie uwzględnienie warunków brzegowych, otrzymujemy pożądane wyniki. Ciekawe rozwiązanie zastosowania MRS w tarczy zaproponował prof. Rakowski [1], zastępując element powierzchniowy elementem prętowym – ramą odpowiadającą obrysowi tarczy. Niezwykle ważne w tym sposobie obliczania tarczy jest uwzględnienie jej grubości, wyrażając wartości sił zewnętrznych jako iloraz siły do grubości. MRS, mimo dydaktycznego charakteru i łatwej generacji siatki, jest trudna do automatyzacji, pojawiają się trudności w przypadku krzywoliniowego brzegu. Wadą tej metody jest także brak możliwości lokalnego zagęszczania siatki [6].

MES jest za to typową metodą komputerową, polegająca na dyskretyzacji konstrukcji na skończoną liczbę obszarów – elementów o prostej geometrii. Elementy skończone charakteryzuje prostota kształtu oraz określona ściśle liczba stopni swobody. Obliczenia metodą MES dokonujemy dla wybranych szczególnych węzłów w tych elementach, dla których znajdziemy warunki równowagi i zgodności. Należy zwrócić uwagę, czy konstrukcja spełnia zależności odkształcenie-przemieszczenie i naprężenie-odkształcenie dla elementów [7]. MES ma bardzo szerokie pole zastosowań i jest podstawą wielu programów komputerowych. Kolejną zaletą jest duży zbiór elementów skończonych i dość dokładne wyniki. Problem powstaje przy uwzględnianiu nieliniowości geometrycznych i w przypadku generacji siatki dla obszarów o skomplikowanej geometrii [6].

## 3. Porównanie MES i MRS

Zestawiając MES i MRS sporządzono krótkie porównanie tych metod pod kilkoma względami, związanymi zarówno z samym zapisem problemu, jak i sposobem jego rozwiązania oraz przedstawianiem wyników (tab. 1) [6].

#### 4. Analizy obliczeniowe konstrukcji tarczowych za pomocą MES i MRS

Analizie porównawczej poddano konstrukcje powierzchniowe przedstawione na rysunku 1. W przypadku wspornika tarczowego (rys. 1a) przeprowadzono analizę porównawczą MES ręcznie i w systemie ROBOT dla 8ES oraz obliczenia ręczne MRS dla siatki 3,0 x 3,0 m. Wyniki odnośnie stanu przemieszczenia końca wspornika i naprężenia w tarczy pokazano na rysunkach 2 i 3.

Podobną analizę wykonano dla belko-ściany statycznie wyznaczalnej (rys. 1b). Analiza porównawcza objęła obliczenia MES ręcznie i w systemie ROBOT dla 2ES, 8ES, 32ES oraz ręcznie MRS w przypadku siatki 1,0 x 1,0 m i 2,0 x 2,0 m. Poszukiwano ugięcia w punkcie 5 oraz rozkładu naprężeń  $\sigma_x$  w przekroju  $\alpha$ - $\alpha$ . Wyniki pokazano na rysunkach 4 i 5.

Dla belko-ściany statycznie niewyznaczalnej (rys. 1c) przeprowadzono jedynie analizę stanu naprężenia z uwagi na zbliżoną geometrię z poprzedniego przykładu oraz te same dane materiałowe. Rozkład naprężeń w przekroju  $\alpha$ - $\alpha$  uzyskano z obliczeń MES w systemie ROBOT dla 8ES oraz MRS ręcznie dla siatki podziału 2,0 x 2,0 m. Otrzymane następujące wyniki analizy zostały przedstawione na rysunku 6.

#### 5. Wnioski

W wyniku przeprowadzonych analiz badanych konstrukcji metodami ES i RS zauważono różnice. Ocenia się, iż rozbieżności w wartościach spowodowane są uproszczeniami związanymi z zastąpieniem tarczy ramą w MRS. Ustroje powierzchniowe zastępujemy tu ustrojami prętowymi, a więc konstrukcjami o różnej liczbie i różnym rodzaju stopni swobody w węzle, co niewątpliwie ma wpływ na wyniki. Wykresy naprężeń mimo różnic w wartościach, a nawet miejscami w znakach, wykazują podobny przebieg i ten sam charakter.

Można stwierdzić, iż MRS jest przydatna do obliczeń elementów o prostej geometrii, charakteryzuje się prostym rachunkiem. MES natomiast może być stosowana do problemów o złożonej geometrii i nieskończonej liczbie stopni swobody [6, 7]. Należy jednak pamiętać, że obie metody opisują zachowanie się układu w sposób przybliżony i są obarczone pewnym błędem.